AS REVOLUÇÕES DOS ORBES CELESTES

Nicolau Copérnico

3.ª Edição

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

NICOLAU COPÉRNICO

AS REVOLUÇÕES DOS ORBES CELESTES

Nicolau Copérnico

Tradução de
A. Dias Gomes
e
Gabriel Domingues

Introdução e notas
de
Luís Albuquerque

3.ª Edição

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Tradução do texto latino
DE REVOLUTIONIBUS ORBIUM COELESTIUM

A edição utilizada foi a da
OFFICINA HENRICPETRINA 1566. Basileia

Edição da
FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN
Av. de Berna | Lisboa
2014

Depósito Legal n.º 383 423/14
ISBN: 978-972-31-0341-0

INTRODUÇÃO

A célebre obra As Revoluções dos Orbes Celestes, *do astrónomo polaco Nicolau Copérnico, com muita frequência e muito justamente considerado um dos textos anunciadores da Ciência moderna, aparece finalmente traduzida em língua portuguesa, mais de 440 anos volvidos sobre a morte do Autor. Parece-me ser este um facto de assinalar e que, só por si, justificaria algumas palavras prévias. Para além disso, caberá aqui, e mais uma vez, dizer alguma coisa sobre a natureza do texto (as suas arrojadas novidades, bem como as suas hesitações e as suas condescendências) e, por outro lado, referir de novo, e com provas, como o seu Autor foi conhecido e criticado em Portugal pelo menos desde o início do século XVII.*

Nicolau Copérnico apresenta neste seu livro, concluído depois de um longo tempo de cuidada reflexão, uma tese frontalmente contrária às concepções da cinemática celeste até o seu tempo aceite de um modo geral; quer dizer: muitas das ideias basilares do esquema ptolomaico para a explicação dos movimentos dos astros e, em particular, os dos planetas do sistema solar (no número dos quais se incluía o Sol), são, na proposta de explicação coperniciana, liminarmente postas de lado, para dar lugar a um outro sistema que, à primeira vista (adiante serão salientadas as ideias tradicionais que, apesar de tudo, Copérnico não abandonou no seu trabalho), nada tinha a ver com o precedente.

Não oferece dúvidas que o astrónomo polaco teve absoluta consciência de que as profundas alterações propostas na sua obra para o esquema do Universo, estavam em *contradição frontal com princípios estabelecidos ou sancionados pela Filosofia e pela Religião vigentes. Prova-o, de modo irrecusável, e em primeiro lugar, o cuidado que teve em divulgar anonimamente, antes de Maio de 1514, o opúsculo* De Hypothesibus Motuum Coelestium a se Constitutis Commentariolus, *que expunha sem cálculos as principais conclusões do seu estudo; este opúsculo foi posto a circular em tal segredo que mesmo um professor contemporâneo, da Universidade de Cracóvia, não soube quem fosse o seu Autor. Mostra-o também, claramente, o cuidado que Copérnico teve em justificar-se, desculpar-se ou defender-se não só com referências a sábios da Antiguidade (como Filolau, Heráclides e Ecfanto, citados a partir de Plutarco) que haviam sustentado o heliocentrismo, mas sobretudo através do prefácio, dedicado ao papa Paulo III, texto em que, presumindo de algumas críticas que poderiam ser-lhe dirigidas, se resolve a enfrentá-las desde logo: «Seguramente bem posso, Santíssimo Padre ter a certeza de que certas pessoas, ao ouvirem dizer que eu atribuo determinados movimentos ao globo terrestre (...) imediatamente hão-de gritar a necessidade de eu ser condenado juntamente com tal opinião» (p. 5); e mostrá-lo-á também a hesitação de longos anos — nada menos de 36, segundo o Autor — que teve até de consentir que se divulgasse pela imprensa o seu texto. Copérnico sabia, de resto, que «aqueles que afirmam ser confirmada pelo julgamento de muitos séculos a opinião de que a Terra está imóvel no meio do Céu (...) haviam de considerar uma cantilena absurda defender eu que é a Terra que se move» (p. 5). Assim, só por insistência de amigos permitira que lhe publicassem o trabalho; entre esses seus pressurosos amigos cita nominalmente, e decerto o não fez sem intenção, o cardeal de Cápua, o bispo de Cúmen e o bispo de Forsombrone; pelo menos este último era geralmente tido por perito em Astronomia, além de ser também homem de confiança de*

Roma, pois tinha sido em tempos nomeado por Leão X para a comissão encarregada de proceder à revisão do calendário.

Segundo confissão sua, Copérnico dedicara-se ao estudo dos movimentos celestes por verificar que os matemáticos discrepavam entre si quanto ao modo de explicar o comportamento cinemático «das esferas do Universo»; com efeito, eles estavam tão incertos, sobretudo quanto aos movimentos do Sol e da Lua, que nem conseguiam concordar acerca da duração do «ano corrente»; por outro lado, ao fixarem os movimentos das esferas do mundo, não partiam de princípios comuns, pois enquanto uns se serviam apenas de «círculos concêntricos», outros recorriam a «excêntricos e epiciclos», sem, de um modo ou de outro, alcançarem uma explicação convincente dos fenómenos observados. A Cúria, de resto, tinha conhecimento directo de que a Astronomia corrente não explicava de modo satisfatório os movimentos aparentes dos astros, pois, na sequência do Concílio de Latrão, fora nomeada a já referida comissão que devia proceder ao acerto do calendário, e os seus trabalhos saldaram-se por um fracasso, em especial por não estarem «convenientemente medidos» os movimentos solares e lunares.

Às explicações e justificações de Nicolau Copérnico juntaria o pastor luterano Andreas Osiander, e logo na primeira página impressa da obra, esclarecimentos talvez mais directos, e também, como se tem pretendido, com muito provável duplo alcance. Osiander não duvidava que «certos eruditos, pela fama já divulgada acerca da novidade das hipóteses desta obra (o Commentariolus *acabara por ser editado em 1530, e isso explica a expressão do comentário) (...) se tinham sentido ofendidos e julguem que não convém deitar a confusão nas artes liberais...» (p. 1). No entanto, não havia motivo para escândalos porque, segundo o parecer de Osiander, era missão do astrónomo, a partir de observações cuidadas, estabelecer hipóteses e leis ade-*

quadas para que se pudessem explicar a calcular os movimentos celestes — no caso de ser possível determinar «leis e hipóteses verdadeiras». Era isso, em sua opinião, o que se tinha sido feito em De Revolutionibus *e, como diz, de «modo notável».*

Há anos Edward Rosen, profundo conhecedor da obra de Nicolau Copérnico, chamou a atenção para o sentido ambíguo com que o vocábulo «hipótese» é usado neste contexto. De facto, no grande livro do Astrónomo, a palavra hipótese nunca é utilizada com o significado de «conjectura»; nesse sentido, podia ser ou não ser apropriada à explicação pretendida, e, por outro lado, estando conforme com os dados iniciais sobre fenómenos de que se pretendia ter uma compreensão correcta, poderia não ser suficiente para tal fim, e propôr para todos os factos em dúvida apenas uma justificação aproximada; neste caso, certamente que a conjectura inicial, se não era só insuficiente, teria de estar também em desacordo com as observações, a menos que os dados delas obtidos enfermassem de erros grosseiros. Para Nicolau Copérnico, porém, uma «hipótese» teria sempre o sentido de «proposição fundamental» e basilar, sendo portanto, e de cero modo, indiscutível.

Assim, parece ser justo depreender-se que Osiander jogou com o duplo sentido da palavra, admitindo expressamente, e de acordo com a sua significação conjectural, não ser sequer "necessário que estas hipóteses [as de Copérnico] sejam verdadeiras nem. até sequer verosímeis, mas bastará apenas que conduzam a um cálculo conforme às observações (. . .)" (p. I).

Depois de referir que uma longa experiência levantava sérios obstáculos a que o sistema proposto em De Revolutionibus *inevitavelmente conduzia, e de adiantar que havia no livro afirmações igualmente absurdas, Osiander assevera que Copérnico ignorava «as causas dos movimentos não uniformes. E se imaginara algumas (. . .), não o faz de* *maneira nenhuma com o objectivo de persuadir alguém de que as coisas são assim, mas apenas para conseguir uma base correcta de cálculo» (p. 2).*

Osiander estava a defender a obra «heterodoxa» de inevitáveis ataques a que seria submetida, ou, pelo contrário, apressava-se a denunciar alguns «erros» que nela se podiam apontar? Parece não haver dúvidas que o Autor desta página espúria era contrário à teoria coperniciana. Sabemos que, pouco depois, cientistas como Galileu e Kepler se indignaram contra o texto de Osiander, em que, embora de modo velado, Copérnico, segundo eles, era quase acusado de ter proposto uma Astronomia revolucionária, e talvez sem fundamento, visto ser hipotética. Kepler, em especial, salientaria que o Astrónomo não só acreditava que as suas hipóteses eram verdadeiras, mas, o que é mais, tinha provado que de facto o eram; no que cabia alguma exageração, como se verá.

Voltando um pouco atrás, deverá insistir-se em que Nicolau Copérnico parecia temer pelas desagradáveis consequências que a edição do seu livro podia ocasionar; dirigindo-se a Paulo III, ele diria que «ao ponderar pois estas razões [a suspeita com que as suas ideias deparariam] comigo mesmo, e recear por causa da novidade e do absurdo da minha opinião, tinha-me levado quase a interromper por completo o trabalho começado» (p. 6). E nesta hesitação afirmada pelo Astrónomo não há sequer sombra de figura literária; ele sabia bem os riscos a que o seu livro se expunha e até procurava responder com antecedência a críticas que poderiam ser-lhe feitas. E tinha razão, como é bem sabido; se, logo após a sua publicação, o tratado passou sem contestação, a despeito da atenção que Osiander, voluntaria ou involuntariamente, chamara para alguns dos seus fundamentos mais polémicos, ele viria mais tarde (já depois da morte do Autor) a ser fortemente impugnado, acabando por ser incluído na lista das obras *proibidas pela Cúria de Roma, por contrárias ou perigosas para a Religião.*

*

Deve ser aqui dito que o trabalho de Copérnico não está isento de limitações, concessões e ambiguidades, como se verá em seguida. Com efeito, o grande Astrónomo, restabelecendo vários princípios contrários aos admitidos no seu tempo, nem por isso pôde distanciar-se completamente de algumas ideias tradicionais. O movimento circular, como se voltará a dizer, e com mais insistência, seria uma delas; Copérnico aceitava que esse movimento «harmonioso por excelência», era o que mais convinha aos corpos celestes, como também ensinava a Filosofia tradicional.

Não deve isso causar-nos surpresa. Num tempo em que a estruturação de uma Dinâmica ainda só esboçava os primeiros e tímidos passos, «toda a ciência da Astronomia», como ensinava Cristóvão Bruno nas suas lições do Colégio de Santo Antão de Lisboa entre 1620 e 1630 (a que hei-de voltar), seria «salvar as aparências», quer dizer, encontrar um modelo matemático que explicasse todos os movimentos observados nos astros, bem como todos os aspectos por eles apresentados; e esse já fora, como todos sabemos, o objectivo de todos os Astrónomos desde os tempos de Ptolomeu, para só incluir na referência as estruturas científicas.

O estudo da Astronomia, assim entendido, implicava uma indagação de tipo interpretativo, *e não de ordem* justificativa, *muito embora, a respeito* De Revolutionibus, *alguns historiadores da ciência pretendam ver que esta última tendência já aí se encontra bem expressa. Parece-me certo, de qualquer modo, que até Copérnico a interpretação dos movimentos observados devia ser procurasda com absoluto respeito pelo princípio da «compatibilidade» dos movimentos propostos para dar lugar à visão perspectiva das aparências anotadas pelos astrónomos. Ele teve a ousadia* *de quebrar essa submissão, embora criando outras dependências, como se verá; só que, e felizmente para a sua obra, o esquema de novo proposto estava de acordo com a realidade.*

*

No entanto, mesmo antes de se reconhecer esta concordância (o que só pôde ser «provado» depois das observações de Galileu, e «consumado» depois de enumeradas as leis de Kepler) algumas ideias de Copérnico já tinham abalado os alicerces do esquema explicativo de Ptolomeu para os movimentos aparentes dos astros, esquema que, de resto, se vinha complicando à medida que lhe era exigida a justificação de certas particularidades e «anomalias» que observações mais cuidadas iam revelando nesses movimentos. Alguns dos princípios divulgados pelo Commentariolus *tinham esse efeito devastador; e bastava que aí se declarassse, por exemplo, que a Terra cumpria «uma revolução em torno do Sol, como qualquer outro planeta», para que ficasse destruído todo o «sistema do mundo» até então aceite. Com efeito, a Terra, em vez do seu lugar privilegiado de corpo inerte situado no centro do cosmos, passava a percorrer uma órbita em redor do Sol; isto é, deixava de ser o centro do Universo e de estar imóvel; para o astrónomo tradicional e para o homem comum com luzes de Astronomia, esta proposta de Copérnico teria de ser considerada absurda, como previu Osiander e como o mesmo Autor declarou.*

Todavia, seria inteiramente a despropósito que procurasse aqui levar a cabo, em meia dúzia de páginas, a análise de todos os aspectos importantes de uma obra tão extensa e tão significativa como é o De Revolutionibus; *por isso me limitarei a referir apenas alguns dos que, a meu juízo, podem ser considerados fundamentais. Advirta-se, em todo o caso, que não me parece uma boa norma de análise* *referir apenas aos princípios, proposições e hipóteses definidos por Copérnico e com consequências renovadoramente definitivas na configuração do Universo; a par disso, estou certo de que tem igualmente relevância, como penso ter já deixado subentendido, mostrar que o grande Astrónomo polaco experimentou hesitações, teve com certas dúvidas — e condescendeu com algumas ideias tradicionais. Como não podia deixar de ser!*

*

Referir-me-ei, em primeiro lugar, à natureza dos argumentos que Copérnico apresenta para explicação dos movimentos de translacção anual e de rotação diurna da Terra. Para o primeiro invoca-se a circunstância do Sol, como astro luminoso que é, dever derramar a luz de modo igual por todo o Universo; assim, deveria situar-se necessariamente *no centro desse mesmo Universo; trata-se de uma razão apriorística e sem qualquer novidade, apesar das suas consequências «incómodas», pois provinha da Filosofia grega. Para explicar o movimento de rotação do nossso planeta, Copérnico invoca a esfericidade da Terra; por ser esférica, a Terra podia e devia estar animada de rotação, que era nela um movimento «natural»; ou seja: tendo a Terra a forma de uma esfera, considerada a «forma mais capaz» para ela ou para qualquer astro, ficaria assim dotada do movimento próprio «que mais lhe convinha»; justificação, como se vê, não menos apriorística.*

Além disso, para contradizer a ideia corrente de que a Terra devia ser o centro do mundo, o Autor teria de refutar ou de substituir o princípio dos «lugares naturais» da Física tradicional: todo o corpo pesado — e a Terra era de há muito considerada como tal — tenderia para o seu «lugar natural», que é o centro do Universo; ou, como expressivamente escreveu João de Sacrobosco (século XIII): «toda a coisa pesada em sumo grau deseja o centro, e ali *folga e cessa de se mover» (Luís de Albuquerque,* Os Guias Náuticos de Munique e Évora, *p. 161, Lisboa, 1965). Esta referência de Sacrobosco tem a virtude de nos encaminhar para interpretação de raiz platónica que Copérnico adoptará para se subtrair a esse princípio; na verdade, o geómatra e aritmético inglês fala de um centro, mas não diz expressamente que ele seja o centro do Universo; assim, o «lugar natural» de um corpo pesado tinha de ser, como se disse, um lugar central; mas porque não aquele que coincide com o centro dos planetas* esféricos *a que os corpos pertencem? Nesse caso, a Terra emparceirava, como é evidente, com os outros planetas, e perdia, mais uma vez, a sua situação única.*

Com fundamento nestas e em outras razões de Copérnico, e penso que com uma clara intenção polémica, R. Hooykaas, apontando de modo certeiro a origem platónica de tais ideias, pôde concluir: «Vê-se, pois, que o copernicianismo é 'novo' não porque abandone *a tradição, mas porque é um regresso a uma tradição mais antiga do que a então reinante. Essencialmente, Copérnico não é um espírito inovador, mas um espírito tipicamente humanista; a sua nova ciência é uma restauração de uma ciência antiga que se perdera num período de decadência» (R. Hooykaas,* Introdução à História da Ciência, *p. 77, Coimbra, 1965). De qualquer modo — e reconheça-se que não deixa de ser sedutor considerar Copérnico como um humanista — o regresso a «uma tradição antiga» teve, no caso presente, efeitos devastadores, porque obrigou a repensar toda a estrutura do Universo em que vivemos.*

Detenhamo-nos agora nas referências da obra às dimensões da Terra e do Universo, e na ligação que delas no texto se faz com a rotaçao diurna da Terra. Já no Commentariolus, *comparando a distância Terra–Estrelas ou Sol–Estrelas com a distância Terra–Sol, o Astrónomo concluiria que qualquer das primeiras devia ser desproporcio-*

nadamente maior do que a última; as estrelas encontravam-se, por consequência, a uma grande distância da Terra e do Sol; não se tratava apenas, pois, de conceber a Terra como um ponto no Universo, como pretendia a doutrina tradicional; era mais do que isso: em relação à imensidade do mesmo Universo, Terra e Sol estavam praticamente confundidos em um ponto. Por outro lado, Copérnico infere da comparação daquelas distâncias que uma linha recta tirada de um ponto da superfície do nosso planeta para um ponto do céu, e a que unisse este com o centro da Terra, seriam «virtualmente paralelas» e, por causa da sua extensão e das relativamente diminutas dimensões da Terra, pareciam ser uma única linha. Assim concluía que o céu é imenso em comparação com a Terra, dando a ideia de ter uma extensão infinita. Todavia, o Autor não toma posição acerca do problema de se saber se o Universo é finito ou infinito: deixa a questão ao cuidado das cogitações dos físicos (p. 40), mas do ponto de vista prático ilude-a, como também já notou Edward Rosen, pois aceita que o Universo é «semelhante» a infinito; o que lhe permitia, por um lado, resolver a dificuldade que a extensão ilimitada criaria à existência do seu Centro, e, por outro lado, pelo seu carácter infinito, explicaria o seu desconhecimento da paralaxe das estrelas. Pura ambiguidade, como se vê.

Em todo o caso Copérnico apressa-se logo a advertir que a conclusão de que «a Terra é em relação ao Céu o que um ponto é em relação ao corpo, e o finito em relação ao infinito» (p. 34) não impunha necessariamente a imobilidade da Terra no centro do Universo; pelo contrário, essa proporção desmedida contribuía para ter de se considerar menos provável o movimento de revolução do Céu de todas as estrelas no período de um dia, do que a rotação, em igual intervalo de tempo, de «uma parte mínima» do Universo, dado que esta última rotação não implicava as velocidades inadmissíveis que era necessário atribuir às estre-

las, vistas as grandes distâncias a que se encontravam do centro do movimento.

A propósito do movimento da rotação da Terra, Copérnico tinha de se ver confrontado com outras questões; uma delas, naturalmente, a dos movimentos «naturais» e «violentos». Ele adianta logo que se «alguém for da opinião que a Terra se mova, dirá por certo que o movimento é natural, e não violento», pois «as coisas que são segundo a Natureza têm efeitos contrários às que são provocadas pela violência» (p. 39); aliás «as coisas que são feitas pela Natureza estão em seu lugar natural e continuam na sua forma perfeita». Há aqui uma evidente condescendência com a Física do tempo.

Condescendência, sem dúvida — mas colocando os princípios dessa Física a seu favor. Tal como situava o problema é evidente que, ao admitir-se a rotação da Terra, já não se podia contrapor que os objectos colocados à sua superfície viriam a ser projectados «para cima», nem que ela mesma «se dissipasse», como haviam de dizer os defensores do sistema de Ptolomeu. Copérnico, de resto, insiste que uma rotação «natural» havia de ser sempre muito diferente da que pode ser «realizada pela arte e pelo engenho humanos»; além disso (e volto a um ponto já aflorado), como compreender que se negasse a rotação diurna da Terra, com o argumento da sua inevitável «dissipação», e não se levantasse a mesma dificuldade a respeito do Universo, «cujo movimento tem de ser tantas vezes mais rápido quanto o céu é maior do que a Terra»? (p. 39). Como se vê o Astrónomo atalhava, adivinhando-as, certas objecções que seriam interpostas por muitos comentadores geocentristas ao princípio da rotação da Terra, como acontece no texto do P.^e^ Cristóvão Bruno, adiante referido; dava, aliás, enorme importância ao assunto, como se pode avaliar pelo tempo que lhe dedica; com efeito, ainda a propósito da ideia de «dissipação» não deixará de perguntar: «Que dire-

mos, pois, das nuvens e de certos corpos da mesma espécie que estão suspensos no ar, senão que não é apenas a Terra com a água, que a ela está unida, que se move, mas também alguma parte do ar e tudo o que de algum modo a ela está ligado?» E insiste: *«... isto passa-se assim, quer porque o ar circundante revista a mesma natureza da Terra, (...) quer porque o movimento do ar é adquirido, pois partilha com a Terra a sua rotação incessante ...» (p. 41).*

O problema dos movimentos é, obviamente, o problema central de De Revolutionibus; *e, como não podia deixar de ser, o seu Autor estava muito bem informado acerca dos movimentos «naturais admissíveis» para os quatro elementos de Aristóteles (terra, água, fogo e ar); a este respeito escreveu: «... o movimento de um corpo simples é simples. Além disso, dos movimentos simples uns são rectos* [*isto é, rectilíneos*] *e outros são circulares. Dos rectos, porém, uns são para cima* [e] *outros para baixo. Pelo que todo o movimento simples se dirige* para *o meio, que é para baixo, ou* do *meio, que é para cima». A doutrina completa-se com a informação de que se considerava como próprio dos elementos terra e água serem impelidos para baixo, enquanto os elementos ditos «leves» deveriam mover-se para cima. A estas ideias, que não aceita, contrapõe Copérnico a seguinte observação: «Seguramente a divisão (...) do movimento em três categorias, 'do meio', 'para o meio', 'à volta do meio', será encarada apenas como um exercício lógico» (p. 43). Liberto, deste modo, de um princípio muito restritivo, mas de grande aceitação, o Astrónomo podia deixar que a sua imaginação procurasse com maior liberdade as explicações mais simples e mais directas para os movimentos observados nos astros. Na sua obra há, pois, uma permanente atenção ao desfazer de algumas ideias aceites sem crítica e sem reflexão, e também uma permanente revalorização de princípios que estavam adormecidos. Isso não prejudica, mas antes vitaliza a estrutura* *discursiva da obra, que é unitária e directa; e nem sequer as oportunas incursões pelos domínios da Trigonometria quebram essas características do discurso, pois surgem nele no momento exacto.*

Nem sempre, contudo, Copérnico logrou libertar-se da grande carga das ideias feitas. Darei como exemplo o caso da explicação do movimento da Lua; é um caso concreto, mas a situação repete-se, de modos apenas ligeiramente diferentes, para as justificações dos movimentos de todos os planetas, com excepção da Terra; *acrescente-se que esta circunstância voltava a situar este planeta num lugar de privilégio, o que, se não podia pôr em causa a sua «teoria» (muito bem fundamentada em* De Revolutionibus*), devia levantar fortes suspeitas acerca das «teorias» imaginadas para os outros planetas, todas subsidiárias de princípios respigados da doutrina ptolomaica, como já se verá; no entanto, deixarei de parte a análise desta questão, aliás interessante.*

Ora para explicarem os movimentos da Lua os «antigos», como diz Copérnico, «imaginaram que havia dois movimentos uniformes, opostos um ao outro, à volta do centro da Terra, isto é, que o epiciclo se movia para Este, e o centro do excêntrico (...) se movia (...) para Oeste, estando a linha da posição média do Sol sempre a meio caminho entre os dois» (p. 136); mas o Autor considera que tal hipótese não é «adequada» nem «conveniente».

A dificuldade bastante séria que com tal suposição se confrontava, residia no facto de esta se não conformar com o «axioma segundo o qual o movimento dos corpos celestes é uniforme» (p. 319); na verdade, o movimento do epiciclo da Lua não respeitava a uniformidade, circunstância em que Copérnico insiste com veemência, e que considera fundamental; na teoria da Lua, que propõe em substituição da ptolomaica, ele procurará resolver a falta acoplando um pequeno epiciclo ao epiciclo considerado pelos seus ante-

cessores; era neste epiciclo de pequeno raio que a Lua descreveria o seu movimento uniforme. O grande Astrónomo recuava, como é evidente: para defender a todo o custo a «uniformidade» do movimento «real» dos planetas, via-se forçado a recorrer, tal como fizera Ptolomeu, à sobreposição de movimentos circulares de epiciclos, sendo apenas um destes a órbita verdadeira do planeta. Assim, Edward Rosen pôde escrever que «as suas [de Copérnico] conclusões, independentemente alcançadas, convergem fortemente para as mesmas falhas teóricas e práticas da astronomia» ptolomaica. Observação profundamente justificada pois, como Copérnico declara, «... desde o princípio se disse que o movimento celeste era uniforme ou composto de movimentos uniformes e circulares» (p. 211).

O que se escreve aqui a partir da solução proposta como «teórica da Lua» (para usar a linguagem do século XVI) repete-se na essência, embora com diferentes fundamentos, para os restantes planetas. Assim, acerca das «anomalias» verificadas nas suas trajectórias, Copérnico escreveu: «Há dois movimentos em longitude dos planetas. Um é provocado pelo movimento da Terra (...) e o outro é o movimento próprio de cada um. Decidimos chamar, com toda a propriedade, ao primeiro, um movimento paraláctico, pois é ele que dá origem às estação, progressões e retrogradações em todos eles, não porque o planeta, que sempre se move para a frente com o seu movimento próprio, assim ande errante ...» (p. 431). Todavia, quando entra na explicação «moderna» do movimento de qualquer planeta distinto da Lua, como Saturno (pp. 455 e segs.) verifica-se que a solução é, de novo, pô-lo a descrever um epiciclo, cujo centro pela sua parte descreve um excêntrico, sendo os dois movimentos uniformes. Nota-se, pois, que Copérnico respeitava, ainda e sempre, o primado dos movimentos circulares e uniformes.

Por outro lado também é certo que, se o Astrónomo nunca aceitou de modo explícito a existência das esferas celestes em que os defensores da doutrina ptolomaica «incrustavam» os planetas, também é verdade que nunca as negou verbalmente e até se pode com razão suspeitar que as admitia. Como de igual modo fez notar Edward Rosen, no contexto da obra a palavra «orbis» (aliás com uma pluralidade de significados), não parece referir-se aos corpos celestes, como algumas vezes se tem entendido, mas aludirá preferentemente às esferas que os transportam; só Tycho Brahe viria a negar de um modo frontal a existência de tais esferas no Céu.

*

Cometeríamos um erro muito grave, no entanto, se analisássemos este livro de Copérnico, como tem sido em parte feito aqui, de uma perspectiva actual, com uma abertura garantida por mais de quatro séculos que dele nos separam. Copérnico não podia ter sido ele mesmo, e ao tempo ser um Kepler e um Galileu, como por vezes dele têm exigido alguns historiadores da Ciência; exibe naturais limitações, respeitou princípios sem fundamento suficiente e que era indispensável abandonar; deste modo, talvez a parte mais importante da sua obra seja apenas um reavivar princípios antigos mais ou menos esquecidos, como sustentou R. Hooykaas; mesmo que a isso se tenha limitado, é forçoso reconhecer que o fez no momento oportuno. Além do mais, a soma de reflexão e de trabalho que serviriam de suporte da sua obra, são exemplares; se reanimou algumas ideias dos Clássicos, também lhes deu a força de uma justificação derivada de observações laboriosa e habilmente comparadas, que elas não tinham.

E não foi só isso: muito do que se encontra escrito nesta obra fundamental revela, na verdade, a coragem de romper com algumas tradições científicas que se contavam entre as *mais enraizadas. Se Copérnico não eliminou todas as ideias feitas e erradas que pautavam a Astronomia do século XV, reduziu consideravelmente o seu número, e rasgou irreversivelmente o caminho para a nova Astronomia do sistema solar, tal como hoje a concebemos. Chamarei aqui a atenção para alguns dos seus contributos decisivos neste sentido.*

É sabido, e já atrás se disse, que no sistema de Ptolomeu a Terra ocupava o centro do Universo, e o Sol era incluído entre os planetas. No De Revolutionibus *o Sol passou a assumir uma posição central (embora o centro do Mundo lhe fosse excêntrico), e em torno dele gravitavam todos os planetas do sistema, Terra incluída. É um passo importante, cujo alcance hoje dificilmente damos conta; mas um dos maiores especialistas da obra coperniciana afirmaria que, deste modo, Copérnico não só «*planetizou*» a Terra, como «*desplanetizou o Sol*», duas condições indispensáveis para se chegar a uma explicação racional dos movimentos celestes.*

Por um lado, o Astrónomo polaco considerou à parte, como aliás já tinham feito todos os seguidores de Ptolomeu, o estudo do movimento da Lua; não pôde resolvê-lo de modo definitivo, mas é certo que contribuiu para a solução que ele teve post-Newton, ao colocar o satélite da Terra no lugar que lhe competia, isolando-o completamente dos outros planetas, em relação aos quais tinha efectivamente um comportamento diferente.

Além disso, ao considerar a revolução de todos os planetas (excepto a Lua, como é claro) em redor do Sol, com movimento próprio, facilitou imediatamente um intrigante fenómeno observado tanto em Mercúrio como em Vénus: efectivamente, descrevendo um e outro órbitas interiores à órbita da Terra, não havia necessidade de recorrer a subterfúgios para se compreender que fossem limitadas as elongações máximas que neles se podiam observar.

É certo também que Copérnico nunca na sua obra se refere a «anjos» ou a «espíritos» que existiriam nos planetas (incluindo o Sol, ainda como tal contado) e provocavam o movimento de cada um deles. A este respeito deve ser observado que para o Astrónomo, «o movimento apropriado a uma esfera é a rotação num círculo, reproduzindo a sua forma no próprio acto como corpo extremamente simples em que se não pode indicar princípio nem fim, nem distinguir um do outro, enquanto através dos mesmos se move sobre si mesma» (p. 25). Ele admitia aqui, embora de um modo apenas implícito, como já alguém notou, a ideia da rotação de todos os planetas; no entanto, nunca chegou a exprimi-la com clareza.

Farei notar ainda dois aspectos que tenho por muito importantes: em primeiro lugar, com efeito, suponho ser de salientar que Copérnico calculou as distâncias de cada um dos cinco planetas então conhecidas (excluída a Terra) ao Sol, expressas em unidades Sol-Terra, tendo valores muito próximos dos exactos; este facto revela o cuidado que dispensava às suas observações, a crítica a que submetia as alheias e o rigor dos cálculos a que procedia; ele não foi, por consequência, um Astrónomo que procurasse estabelecer uma teoria «in abstracto», pois a prática da observação era a pedra de toque de todo o seu trabalho. Em segundo lugar — e retomo um tema já apontado — com Copérnico finda o princípio de um único centro de gravidade em todo o Universo, ou seja, o centro da Terra; cada *centro de um planeta é no seu livro* um *centro de gravidade, isto é, o Universo passa a ter múltiplos centros de gravidade. Que a Terra não podia ser o centro de todas as revoluções celestes era uma consequência que o Astrónomo tirava de dois factos: não ser uniforme o movimento aparente dos planetas e serem variáveis as suas distâncias à Terra, o que não se podia explicar através de círculos concêntricos com ela (mantém-se aqui, mais uma vez, a ideia apriorística do* *movimento dos planetas ser circular). Havia, por consequência, vários centros de gravidade — continua Copérnico — e por isso «não será temerário duvidar se o centro do mundo será, de facto, o centro de gravidade terrestre ou qualquer outro [ponto]»; e conclui: «Quanto a mim penso que a gravidade outra coisa não é senão um certo desejo natural introduzido nas partes pela divina Providência do autor do Universo para que se encontrem na sua unidade e integridade, resumindo-se numa forma de esfera» (p. 45). O primado de uma situação privilegiada para a Terra encontrava aqui, e de novo, uma barreira — muito embora esta tivesse sido construída à custa de razões fornecidas por uma duvidosa Filosofia; não pode esquecer-se, porém, a época em que Copérnico viveu, que ele não era um Físico e que, mesmo que o fosse, seria certo que a Física do primeiro quartel do século XVI dificilmente podia criar asas para voos mais largos. De qualquer modo, a multiplicidade de centros de gravidade, que no texto da sua obra se aceita, já sem dúvida alguma prenuncia Newton.*

*

Suponho ter situado, embora de maneira rápida e necessariamente incompleta, a posição de Copérnico nessa grande e estimulante aventura que a partir do século XVI tem sido a evolução da Ciência. É verdade que os ecos imediatos do De Revolutionibus *foram mais limitados do que a obra merecia; a prova disso estará talvez na circunstância da censura inquisitorial não ter dado imediatamente conta de que as ideias de Copérnico podiam ser «perigosas». E, no entanto, elas iam minando uma Filosofia que procurava a todo o custo manter-se em quadros obsoletos.*

A questão que desejaria agora pôr é, porém, de outra índole. Trata-se, com efeito, de saber se Copérnico foi ou não conhecido e estudado em Portugal; a pergunta tem sido repetidas vezes feita, e nem todas as respostas que se lhe *encontraram estão certas. Já há anos me ocupei do caso, citando três exemplos de referências ao Autor polaco e à sua obra, e detendo-me especialmente na que, pela sua extensão, me pareceu mais importante (*Para a História da Ciência em Portugal, *pp. 121-142, Lisboa, 1973). Do que então foi escrito apenas aqui será retomado o que suponho ser mais relevante. Assim, será intencionalmente que deixarei de lado as referências ocasionais a Copérnico, que acodem à pena de alguns autores do século XVII interessados na técnica de navegar, na topografia ou noutras ciências matemáticas; diga-se, em todo o caso, que nelas se alude por vezes aos chamados «disparates» do astrónomo polaco (que, aliás, Galileu «temerariamente quis defender», como num texto se esclarece), e outras vezes apenas se refere a doutrina coperniciana como condenada pelo decreto pontifício de Paulo V (1616), depois de ter sido subordinada a uma análise pelo Colégio dos Cardeais.*

Contudo, existe um texto em língua portuguesa, redigido por volta de 1625, em que, embora para no final as submeter a um juízo de reprovação, as ideias principais da proposta coperniciana são apresentadas, em linguagem muito simples, correcta e acessível. O texto, que conserva manuscrito em dois códices, um da Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra e outro da Biblioteca Pública de Évora, é devido ao P.^e Cristóvão Bruno, e faz parte das lições que estes jesuíta italiano dava no Colégio de Santo Antão, de Lisboa; a classe em que as proferia era designada «Aula de Esfera». Este curso devia ocupar-se preferentemente de elementos de Cosmografia e das suas relações com a Náutica, mas, como o seu título era de certo modo impreciso, os professores, que o regeram, tiveram grande liberdade de escolha quanto às matérias a versar, e durante o século XVII muitos dos que aí ensinaram até haviam de considerar a astrologia judiciária como tema de interesse, incluindo-a no programa. O P.^e Cristóvão Bruno *não o fez; dedicou toda a sua atenção à Astronomia e à Arte de Navegar, sendo responsável pela ideia impraticável de os pilotos fixarem o ponto no mar pelo conhecimento local da latitude e da declinação magnética, com recurso a cartas dotadas de escalas de latitudes e com as linhas isogónicas traçadas. Se bem que não defendesse como real o sistema de Copérnico, que se atrevia a expor nas suas lições, parece-me ter sido um homem arrojado, que não temia pisar as fronteiras da ortodoxia; com efeito, há documentação comprovativa de que ele defendeu serem os cometas corpos supra-lunares, percorrendo nas suas órbitas esferas de vários planetas, o que ia contra a incorruptibilidade dos céus e lhe valeu sérias admoestações dos superiores da sua ordem, a que ele, aliás, respondeu. (Uma carta de Cristóvão Bruno sobre o caso foi publicada pelo P.ᵉ Domingos Maurício, em «Vicissitudes da Obra do P.ᵉ Cristóvão Bruno»,* Anais *da Academia Portuguesa de História, 2.ª Série, Vol. III, pp. 119-150, Lisboa, 1950.)*

Bruno tinha apenas uma perspectiva cinemática da Astronomia; de facto, para ele esta ciência propunha-se, como único, o objectivo de «salvar as aparências» observadas no Céu; ou seja, e como já ficou dito, a sua missão era definir um complexo de movimentos circulares e uniformes que reproduzisse, até o limite do rigor possível nas observações, os movimentos que cada um dos astros aparentemente seguia. É necessário advertir que para atingir esse fim todos os meios eram aceitáveis, sob condição de se respeitar a chamada «compatibilidade» dos movimentos; por outro lado Cristóvão Bruno entendia que uma Astronomia completa e «actual» devia dar explicação convincente não só das «aparências antigas», mas também das «novas aparências» reveladas por Galileu (fases de Vénus e de Mercúrio, satélites de Júpiter, etc.).

Quanto às antigas, todas relacionadas com a cinemática dos Céus, o P.ᵉ Bruno refere: o movimento diurno (apa-

rente) dos astros; o movimento anual (aparente) dos planetas e do Sol; as retrogradações, estações e progressões (aparentes) dos planetas nas suas órbitas (também aparentes); a variação dos pontos chamados «cabeça» e «cauda» do Dragão, ou seja, os pontos de intersecção da órbita lunar com a eclíptica; e também, por último, os movimentos próprios das estrelas. As aparências «modernas» referiam-se ao facto, averiguado por Tycho Brahe, do planeta Marte se encontrar umas vezes mais afastado e outras mais próximo da Terra do que do Sol, às já referidas observações sobre os cometas, que lhe haviam de merecer severas críticas, como já ficou dito, e ainda às descobertas que Galileu, usando a luneta, fizera nos planetas e no Sol, nomeadamente as manchas solares, as já referidas fases de Vénus e Mercúrio e os também já citados satélites de Júpiter.

No texto reconhecia-se que todos os planetas apareciam a distâncias variáveis da Terra; afirmava-se que o Sol levava mais tempo a descrever aparentemente o semicírculo do equinócio da Primavera ao do Outono do que o semicírculo complementar; discutia-se a existência das montanhas lunares; e apontavam-se desigualdades nos eclipses do Sol. No quadro da astronomia ptolomaica procurava-se explicar alguns destes dados da observação sacrificando os movimentos geocêntricos; com efeito, supunha-se que todas as observações «inconvenientes» podiam ser «justificadas» admitindo que os movimentos de translacção do Sol e dos planetas, em primeira aproximação, se fizessem sobre círculos com centro não coincidente com o da Terra. Todavia, o P.e Bruno ensina a construir uma luneta, cuja ideia atribui a della Porta e que chama «canóculo», que podia facilitar aos seus alunos observações directas de outras «aparências» mais dificilmente compreensíveis ou menos explicáveis nos limites dos pressupostos «recuperados» de Ptolomeu.

Já estava fora de dúvida, por exemplo, que no sistema do astrónomo e geógrafo alexandrino as fasee dos dois planetas interiores eram «inexplicáveis»; eles só podiam ser compreendidos admitindo que percorriam órbitas em redor do Sol e mais próximas dele do que a Terra, hipótese recusada pela astronomia ptolomaica. A necessidade de explicar estas «novas aparências», que, por um momento, parece fazer com que o P.ᵉ Bruno definitivamente assuma, se não a defesa, pelo menos a exposição clara do sistema de Copérnico, juntavam-se outras razões convergentes.

Para começar, ao professor de Santo Antão não agradava a complexidade das 35 esferas a que o sistema de Ptolomeu chegara para explicar a diversidade de aparências; ele tinha, como muitos outros pensadores do seu tempo, a ideia de que as leis da Natureza deviam ser «simples» e também «unitárias»; à custa da conjugação de círculos ainda a cinemática celeste ia sendo passo a passo salvaguardada com unidade, embora com deficiências irrecusáveis (no movimento da Lua, por exemplo); a simplicidade das leis naturais, porém, cada vez estava mais posta em causa. A solução já vinha da Idade Média e consistia em aceitar Ptolomeu e a sua multiplicidade de esferas apenas como solução «provisória» e sem «realidade» física; ou seja, e como diz Bruno, «do falso algumas vezes se colhe a verdade; e ainda que as aparências se salvassem todas com tanta máquina de orbes, e não era esse o caso, (...) nem por isso seria necessário dizer que os há na realidade»; e mais adiante confirmaria esta sua atitude de recusa, escrevendo: «ainda que concedamos [sublinhe-se a relutância que está implícita neste modo de escrever] que por estes orbes de concêntricos, excêntricos e epiciclos de todos os planetas (...) se salvam todas as aparências antigas ou novas, não se seguia que na verdade os havia aí. À uma porque se podiam salvar por outro modo mais fácil *[retenha-se mais esta alusão à simplicidade das leis naturais], ainda que o não soubéssemos então, porque não era bem negar que não podia Deus fazer isto de modo mais fácil, de nós não conhecido. À outra porque já de facto acharam os astrólogos como mui comodamente se podem salvar todos os fenómenos, assim passados até agora como quantos podem vir (...), sem admitir tanta confusão de tantos orbes».*

A par destas razões, o P.ᵉ Bruno também era muito sensível às objecções de fundamento físico. Já atrás ficou dito que a Física escolástica classificava os movimentos em «naturais» e «violentos» ou «contra-naturais»; os primeiros eram produzidos por causas «intrínsecas» ao corpo que se movia, enquanto os movimentos violentos resultavam de acções que lhe eram exteriores; como exemplo do primeiro caso pode indicar-se o movimento da queda livre de um grave; e como exemplo do segundo, o de uma pedra arremessada ao ar. Por outro lado, um princípio da Física escolástica recusava a possibilidade de dois movimentos contrários se manifestarem simultaneamente no mesmo corpo, e este postulado era infringido por Ptolomeu ao considerar o movimento diurno próprio dos planetas, de sentidos opostos. Esta contradição ultrapassava-se desde que se admitisse que um desses movimentos era «natural e próprio» enquanto o segundo era comunicado ao móvel por outro corpo; foi esta a escapatória encontrada por muitos filósofos escolásticos, mas não pelo P.ᵉ Cristóvão Bruno, que a combate com este exemplo: os cometas possuíam dois movimentos próprios e contrários, o diurno, de Oriente para Ocidente, e o segundo, de translacção, descrito através do zodíaco em sentido contrário, sem que fosse possível imaginar que um deles fosse comunicado por outro corpo.

Do que vem de ser dito seria se esperar que o P.ᵉ Bruno fosse levado a expor o sistema de Copérnico através de palavras muito acessíveis, mas com rigor e objectividade;

assim acontece, na verdade. Estou mesmo em crer que ele aceitara, em proncípio, as ideias do Astrónomo polaco, ou que, pelo menos, as encarava sob um ponto de vista «conciliatório». Todavia, a sua posição não era fácil, como se pode avaliar pelas críticas que lhe foram endereçadas, como já se anotou, a respeito dos movimentos dos cometas; e o P.ᵉ Bruno capitularia, fazendo em algumas das suas lições lugar a uma exposição cerrada das críticas mais violentas contra o heliocentrismo coperniciano. Têm, de facto, o travo de uma capitulação, as frases do capítulo do seu texto em que se submete às ordens de Roma; ele escreveria que «na doutrina da Sagrada Escritura não se pode defender esta opinião [a de Copérnico], antes se deve ter por temerária; e contra o parecer dos que tinham sustentado a realidade do sistema coperniciano, declara que para si valia mais o aspecto «da congregação dos Cardeais, os quais, examinando com grande consideração a hipótese de Copérnico quanto à (não) imobilidade da Terra (...) a julgaram, se não errónea, ao menos temerária; e como tal deve ser refutada». O P.ᵉ Bruno abandona-a, portanto, e abraça a hipótese intermediária de Tycho Brahe.

Tomou esta decisão verdadeiramente convicto de que escolhia o caminho cientificamente certo? Tenho as minhas dúvidas, e por duas ordens de razões: em primeiro lugar, o empenhamento com que procurou destruir nas suas lições a argumentação dos astrónomos ptolomaicos, e o mal disfarçado interesse com que defende as ideias de Copérnico; em segundo lugar, porque o P.ᵉ Cristóvão Bruno foi um professor «maldito», tendo sido obrigado a abandonar a cátedra e a ordem a que pertencia, regressando a Itália, onde se lhe perde o rasto no anonimato.

Deixara, porém, espalhada a ideia de que Copérnico existia e tivera ideias novas sobre a Astronomia; na Companhia de Jesus não seria facilmente esquecido, como se *comprova pelo facto do P.ᵉ António Vieira aludir num sermão ao sistema coperniciano; e para o pôr lado a lado, nas consequências «aparentes» que dele se inferiam, com a «máquina do mundo de Ptolomeu», e não para o negar liminarmente, em obediência à determinação cardinalícia de 1616.*

LUÍS DE ALBUQUERQUE

NOTA DO EDITOR

O Plano de Edições do Serviço de Educação da Fundação Calouste Gulbenkian exprime o seu vivo agradecimento à Embaixada da República Popular da Polónia pelas facilidades concedidas para esta primeira tradução portuguesa da grande obra de Nicolau Copérnico.

AO LEITOR
SOBRE AS HIPÓTESES DESTA OBRA

Não duvido de que certos eruditos, pela fama já divulgada acerca da novidade das hipóteses desta obra, onde se afirma que a Terra se move e o Sol está imóvel no centro do Universo, se tenham sentido gravemente ofendidos e julguem que não convém lançar a confusão nas artes liberais, há muito constituídas com exactidão.

Contudo, se quiserem examinar cuidadosamente a veracidade do assunto, verificarão que o autor desta obra nada fez que mereça repreensão, pois é próprio do astrónomo compor a história dos movimentos celestes, servindo-se de observação diligente mas engenhosa e, se não puder de modo nenhum descobrir as suas leis ou hipóteses verdadeiras, conceber ou imaginar quaisquer outras a partir das quais, segundo os princípios da Geometria, esses movimentos se possam calcular com exactidão, tanto em relação ao futuro como ao passado.

Ora este investigador alcançou um e outro destes objectivos de modo notável. Nem tão-pouco é necessário que estas hipóteses sejam verdadeiras nem até sequer verosímeis, mas bastará apenas que conduzam um cálculo conforme às observações, a não ser que se dê o caso de haver alguém tão ignorante em Geometria e em Óptica que considere verosímil o epiciclo de Vénus ou pense que esta é a razão por que ela umas vezes precede o Sol e outras o segue a uns quarenta graus ou mais. Mas admitindo isto, quem não verá que necessariamente se segue ser o diâmetro deste astro mais de quatro vezes maior no perigeu do que no apogeu, e a sua área mais de dezasseis vezes? Contudo, a experiência de todas as épocas contradiz esta conclusão.

Há ainda nesta ciência outras afirmações não menos absurdas, que se torna absolutamente desnecessário abordar neste momento. No entanto é bem evidente que esta ciência ignora pura e simplesmente as causas dos movimentos aparentemente não uniformes. E se imagina algumas, pois certamente imagina muitas, não o faz de maneira nenhuma com o objectivo de persuadir alguém de que as coisas são assim, mas apenas para conseguir uma base correcta de cálculo.

Como, porém, se apresentam por vezes diferentes hipóteses para explicar um e mesmo movimento, por exemplo, a excentricidade e um epiciclo para o movimento do Sol, o astrónomo preferirá aquela que for mais fácil de compreender. Um filósofo procurará talvez mais a aparência da verdade, mas nenhum dos dois atingirá ou transmitirá algo de certo a não ser que estas novas hipóteses, entre tantas outras antigas, em nada mais verosímeis, se tornem conhecidas, sobretudo porque são admiráveis e, ao mesmo tempo, fáceis, trazendo consigo ingente tesouro de observações doutíssimas. E ninguém espere da Astronomia qualquer coisa de certo no que respeita a hipóteses porque ela nada pode garantir como tal. Assim não se afastará desta ciência mais ignorante do que veio, como aconteceria se tomasse como verdadeiras meras hipóteses. Adeus.

NICOLAU DE SCHÖNBERG, CARDEAL DE CÁPUA, SAÚDA NICOLAU COPÉRNICO

Ao ter-me chegado ao conhecimento, há anos atrás, em conversas com toda a gente, que o confirmava, algo acerca do teu talento, comecei então a ter maior consideração por ti e também a felicitar os nossos sábios, entre os quais floresces com tanto prestígio. É que eu tivera conhecimento de que és não só particularmente versado nas descobertas dos antigos matemáticos mas até formulaste uma nova Cosmologia em que ensinas que a Terra se move; que o Sol ocupa o ponto mais inferior e, por isso, central do Universo; que o oitavo céu permanece eternamente imóvel e fixo; que a Lua, juntamente com os elementos compreendidos dentro da sua esfera, situada entre o céu de Marte e o de Vénus, gira em volta do Sol num percurso anual. E soube também que tinham sido elaborados por ti uns *Comentários* acerca de todo este sistema astronómico e descobriras por meio de cálculos, com a maior admiração de todos, os movimentos dos planetas para os reunires em Tabelas.

Por isso, doutíssimo Varão, se não te causo incómodo, peço-te com insistente veemência que comuniques esta tua descoberta aos estudiosos e me envies, na primeira oportunidade possível, as tuas lucubrações acerca da esfera do Universo, juntamente com as Tabelas, e mais alguma coisa que tenhas referente ao mesmo assunto.

Entretanto confiei a Teodorico de Reden o encargo de tudo mandar copiar à minha custa, naquela cidade, e tudo me remeter. Se me fizeres a vontade, hás-de verificar que tratas com um homem preocupado com o teu nome e desejoso de recompensar tão grande mérito. Adeus.

Roma, 1 de Novembro de 1536

PREFÁCIO DE NICOLAU COPÉRNICO AOS *LIVROS SOBRE AS REVOLUÇÕES*, DEDICADO A SUA SANTIDADE PAULO III, SUMO PONTÍFICE

Seguramente bem posso, Santíssimo Padre, ter a certeza de que certas pessoas, ao ouvirem dizer que eu atribuo determinados movimentos ao globo terrestre, nestes meus livros escritos acerca das revoluções das esferas do Universo, imediatamente hão-de gritar a necessidade de eu ser condenado juntamente com tal opinião. No entanto, a mim não me satisfazem as minhas ideias a ponto de deixar de ponderar o que os outros estiveram dispostos a julgar a respeito delas. E, embora eu saiba que as ideias de um filósofo não estão sujeitas ao julgamento do vulgo, uma vez que a preocupação daquele é inquirir da verdade em todas as circunstâncias até onde tal é permitido à razão humana por Deus, todavia penso que as opiniões totalmente erróneas devem ser evitadas. Por isso, ao pensar comigo mesmo como aqueles que afirmam ser confirmada pelo julgamento de muitos séculos a opinião de que a Terra está imóvel no meio do céu e aí está colocada servindo-lhe de centro, haviam de considerar uma cantilena absurda defender eu, pelo contrário, que é a Terra que se move; hesitei comigo durante muito tempo se havia de dar a lume os meus *Comentários* escritos para demonstração desse movimento, ou se seria preferível seguir o exemplo dos Pitagóricos e de alguns outros que procuravam confiar os mistérios da filosofia aos seus familiares, amigos e a ninguém mais, não por escrito mas de viva voz, tal como atesta a carta de Lísis a Hiparco. E quanto a mim, bem me parece que o fizeram não por qualquer espécie de má vontade em comunicar os seus ensinamentos, como alguns julgam, mas para que assuntos tão belos e investigados pelo estudo aturado de grandes homens não fossem desprezados por aqueles que, ou detestam gastar o seu belo tempo em outras letras que não sejam as lucrativas ou, mesmo quando sejam estimulados, pelas exortações e pelo exemplo de outros, para o estudo liberal da filosofia, contudo, por causa da tacanhez da sua inteligência, vivem entre os filósofos como zângãos entre abelhas.

Ao ponderar, pois, estas razões comigo mesmo, o desprezo que eu deveria recear por causa da novidade e do absurdo da minha opinião tinha-me levado quase a interromper por completo o trabalho começado.

Mas os amigos me arrancaram à indecisão e mesmo à relutância em que eu andava, há longo tempo, entre os quais esteve Nicolau de Schönberg, cardeal de Cápua, célebre em todo o tipo de conhecimentos, e um homem a ele semelhante, o meu muito querido amigo Tideman Gísio, bispo de Cúlmen, por ser profundamente interessado pelas ciências sagradas e por todas as belas letras. Foi ele na verdade que frequentemente me exortava e, de mistura por vezes com censuras, me instava a que deixasse publicar e dar finalmente a lume esta minha obra que estava escondida, retida em minha casa, não apenas há nove anos, mas há quatro vezes nove. O mesmo fizeram junto de mim, numerosíssimos outros homens muito eminentes e muito cultos, exortando-me a que, por um preconceito de medo, não recusasse por mais tempo confiar a minha obra à comum utilidade dos estudiosos da Matemática. Segundo eles, havia de suceder que, quanto mais absurda parecesse agora à maioria esta minha teoria acerca do movimento da Terra, tanto maior admiração e estima ela haveria de concitar, depois de verem, através da edição dos meus *Comentários,* dissipada a obscuridade do seu absurdo por meio das mais transparentes demonstrações.

Levado, pois, por estes persuasores e por esta esperança, permiti finalmente aos amigos que fizessem a edição da obra que eles me solicitavam há muito. Contudo não será, porventura, tão grande a admiração de Vossa Santidade pelo facto de eu ter ousado trazer a lume estas minhas lucubrações e de, após tanto trabalho na sua elaboração, me ter decidido a deixar de hesitar em confiar as minhas cogitações acerca do movimento da Terra, também, à letra de imprensa; mas o que mais se espera de mim é ouvir dizer como me veio ao pensamento a audácia de, contra a opinião aceite dos matemáticos e, em certa medida, contra o senso comum, imaginar algum movimento da Terra. Por tal razão não quero que Vossa Santidade ignore que nenhum outro motivo me levou a pensar num método diferente de calcular os movimentos das esferas do Universo senão o facto de ter verificado que os matemáticos não estão de acordo consigo próprios na investigação de tais movimentos. É que em primeiro lugar eles se encontram de tal maneira inseguros quanto ao movimento do Sol e da Lua que nem a duração regular do ano corrente são capazes de explicar e formular.

Em segundo lugar, ao determinarem os movimentos das esferas do Universo e dos cinco planetas não usam até dos mesmos princípios e premissas que nas demonstrações dos movimentos e revoluções aparentes. Com efeito, uns apenas se servem de círculos concêntricos e outros de círculos excêntricos e de epiciclos com os quais, porém, não atingem completamente o que pretendem. É que aqueles que se baseiam nos círculos concêntricos, embora tenham demonstrado que a partir deles se podem estabelecer alguns variados movimentos, não puderam, apesar disso, tirar daí nenhuma certeza que desse segura resposta aos fenómenos. Quanto àqueles que imaginaram os círculos excêntricos, embora pareçam ter dado, em grande parte, solução aos movimentos aparentes com cálculos apropriados, admitiram, no entanto, por vezes, muitos daqueles que parecem opor-se aos princípios fundamentais acerca da regularidade do movimento. Também não conseguiram descobrir ou concluir a partir desses círculos um facto de mais interesse ou seja a forma do Universo e a justa simetria das suas partes, mas aconteceu-lhes como a alguém que fosse buscar a diferentes pessoas mãos, pés, cabeça e outros membros, perfeitamente apresentados sem dúvida mas sem formarem um corpo uno, e sem qualquer espécie de correspondência mútua entre si, de tal maneira que resultaria deles mais um monstro do que um homem. E assim, no processo de demonstração a que chamam método, verifica-se que deixaram de fora algumas das condições necessárias ou incluíram nele alguma coisa estranha e que nada tinha a ver com a matéria. E isto não lhes teria de certeza acontecido se tivessem seguido princípios rigorosos. É que se as suas hipóteses admitidas não fossem falsas, tudo o que delas se conclui verificar-se-ia sem margem de dúvida. É possível que seja confuso o que estou a dizer agora, mas tornar-se-á mais claro em seu devido lugar.

Andando eu, pois, há muito tempo a meditar comigo nesta incerteza dos ensinamentos tradicionais das matemáticas acerca da dedução dos movimentos das esferas do Universo, começou a desgostar-me o facto de os filósofos não terem conhecimento firme de nenhuma explicação da máquina do Mundo que por nossa causa fora construída pelo mais qualificado e modelar artista de todos, eles que, aliás, fazem afinal profundas investigações a respeito das mais minuciosas coisas deste Universo.

Por isso dei-me à tarefa de ler os livros de todos os filósofos que pudesse adquirir, disposto a indagar se nunca nenhum teria opinado a existência de outros movimentos das esferas do mundo, diferentes dos que lhes apresentavam quantos ensinavam Matemática nas escolas. E de facto descobri, primeiro em Cícero, que Nicetas reconhecera que a Terra se move. Depois também em Plutarco verifiquei que tinha havido outros da mesma opinião. Para que as suas palavras sejam acessíveis a todos pareceu-me bem transcrevê-las aqui:

«Outros pensam que a Terra está fixa. Mas o pitagórico Filolau diz que ela gira em órbita à volta do fogo, num círculo oblíquo à semelhança do Sol e da Lua. Heraclides do Ponto e o pitagórico Ecfanto atribuem movimento à Terra, não de maneira a sair da sua posição mas girando como uma roda do Ocidente para Oriente, à volta do seu centro».

Assim, aproveitei, desde logo a oportunidade e comecei também eu a especular acerca da mobilidade da Terra. E embora a ideia parecesse absurda, contudo, porque eu sabia que a outros antes de mim fora concedida a liberdade de imaginar os círculos que quisessem para explicar os fenómenos celestes, pensei que também me fosse facilmente permitido experimentar se, uma vez admitido algum movimento da Terra, poderia encontrar demonstrações mais seguras do que as deles para as revoluções das esferas celestes.

E deste modo, admitindo os movimentos que eu à Terra atribuo na obra infra, com perguntas e longas observações, descobri que, se estabelecermos relação entre a rotação da terra e os movimentos dos restantes astros, e os calcularmos em conformidade com a revolução de cada um deles, não só se hão-de deduzir daí os seus fenómenos mas até se hão-de interligar as ordens e grandezas de todas as esferas e astros assim como o próprio céu, de modo que, em parte nenhuma, nada de si se possa deslocar sem a confusão das restantes partes e de toda a universalidade.

Assim também em todo o desenvolvimento da obra segui esta ordem: descrevo no primeiro livro todas as posições das esferas juntamente com os movimentos da Terra — os que eu lhe atribuo — de maneira que este livro contenha como que a constituição geral do Universo. E nos restantes livros a seguir, comparo os movimentos dos demais planetas e de todas as esferas com o movimento da Terra, para que daí se possa concluir até que ponto será possível conservar os movimentos e comportamentos aparentes dos restantes planetas e esferas, se os confrontarmos com os movimentos da Terra. E não duvido que os talentosos e sábios matemáticos hão-de solidarizar-se comigo se, pois que esta disciplina acima de tudo o exige, quiserem conhecer e ponderar, não superficialmente mas em profundidade, o que por mim vem exposto nesta obra, para demonstração destas matérias. E para que tanto sábios como não-sábios vissem que eu não fujo de modo nenhum ao julgamento de ninguém, resolvi dedicar a Vossa Santidade, de preferência a qualquer outrem, as minhas lucubrações, visto que Vós, até neste remotíssimo canto da Terra onde vivo, sois considerado o mais eminente não apenas na dignidade da Ordem mas na dedicação a todas as letras e também à Matemática, a fim de que com a Vossa autoridade e o Vosso julgamento possais facilmente reprimir as mordeduras dos caluniadores, embora o provérbio diga que não há remédio para as mordeduras dos impostores. E se, por acaso, houver vozes loucas que apesar de ignorarem totalmente as Matemáticas se permitam, mesmo assim, um julgamento acerca destas lucubrações e ousem censurar, atacando o meu trabalho a pretexto de algum passo da Escritura, malevolamente distorcido em vista ao meu propósito, eu não lhes dou importância nenhuma, a ponto de desprezar até o seu juízo como temerário. De facto, não é desconhecido que Lactâncio, célebre escritor, aliás, mas fraco matemático, fala da forma da Terra de uma maneira perfeitamente infantil quando zomba dos que proclamam que a Terra tem a forma de um globo. Portanto, não deve parecer estranho aos estudiosos se alguns que tais zombarem de nós também. As Matemáticas escrevem-se para os matemáticos, aos quais também esta minha obra, se não me engana a mim a ideia, há-de parecer algo útil até a República eclesiástica, cujo principado Vossa Santidade tem agora em Seu poder.

Com efeito, ainda não há muito tempo, sob o pontificado de Leão X, quando se discutia no Concílio de Latrão a reforma do Calendário eclesiástico, ela continuou tão indecisa unicamente pelo facto de se considerar que a duração dos anos e dos meses, bem como os movimentos do Sol e da Lua, ainda não estavam convenientemente medidos. Foi justamente a partir desta altura que voltei a minha atenção com mais diligência para a investigação destas realidades, aconselhado por um homem ilustríssimo, D. Paulo, bispo de Fossombrone, que então dirigia aquele processo. Aquilo, porém, que eu defender nesta matéria confio-o sobretudo ao julgamento de Vossa Santidade e ao de todos os outros sábios matemáticos. E para não parecer que, no referente à virtude da obra, eu estou a prometer a Vossa Santidade mais do que poderei cumprir, passo agora ao seu projecto.

INTRODUÇÃO

Dentre as mais variadas actividades literárias e artísticas, que revigoram as mentes humanas, a de maior dedicação e extremo fervor seria, penso eu, promover os estudos referentes aos mais belos objectos, mais desejáveis de serem conhecidos. Esta é a natureza da disciplina que trata das revoluções diurnas do Universo, movimento dos astros, dimensões, distâncias, nascimentos e ocasos, assim como das causas de outros fenómenos no céu, disciplina que, resumindo, explica totalmente esses acontecimentos. O que é na verdade mais belo que o céu, que, certamente, contém todos os atributos da beleza? Isto é proclamado pelos seus verdadeiros nomes [em latim], *caelum* e *mundus*, este último significando clareza e ornamento, como a escultura antiga. Por causa da perfeição transcendente do céu muitos filósofos têm-lhe chamado um deus visível. Portanto, se o valor das artes é julgado pelo assunto de que elas tratam, esta arte será de longe a mais notável, a chamada astronomia para alguns, astrologia para outros, mas para muitos dos autores clássicos, a consumação da matemática. Indiscutivelmente o vértice das artes liberais e mais digno de um homem livre é apoiado por quase todos os ramos da matemática: aritmética, geometria, óptica, estudo da agrimensura, mecânica e quaisquer outras têm contrbuído para isso.

Apesar de todas as belas-artes servirem para manter a mente do homem afastada dos vícios e guiá-la através de coisas melhores, tal função pode ser mais integralmente realizada por esta arte, que fornece também um extraordinário prazer intelectual. Pois quando um homem está ocupado com coisas que ele vê estabelecidas na ordem mais bela e orientadas por uma vontade divina, não será a ininterrupta contemplação e uma certa familiaridade com elas que o estimulará para o melhor e para a admiração do Autor de tudo, no qual estão toda a felicidade e todas as coisas boas? Porque o piedoso Psalmista [92:4] não queria declarar em vão que ficou satisfeito através do trabalho do Senhor e exulta com as obras feitas pelas Suas mãos, não seriamos nós atraídos para a contemplação das coisas mais belas por este meio, como se fosse um carro triunfal?

O grande benefício e enfeite que esta arte confere ao bem público (para não mencionar as inúmeras vantagens para os indivíduos), são muito mais excelentemente observados por Platão. Em *Leis*, VII ele pensa que [a matemática] deverá ser cultivada em primeiro lugar, porque pela divisão do tempo em grupos de dias, como os meses e os anos, é possível manter um estado vigilante e atento os festivais e os sacrifícios. Negar a sua necessidade para o professor de qualquer ramo do ensino superior é pensamento tolo, segundo Platão. Em sua opinião é altamente desagradável que alguém, possuindo os conhecimentos suficientes sobre o Sol, a Lua, e outros corpos celestes, possa vir a ser conhecido e chamado de divino.

Todavia, esta ciência, muito mais divina do que humana, que investiga os mais complicados temas, não está livre de dificuldades. A principal razão disso reside em que os seus princípios e suposições, chamadas «hipóteses» pelos Gregos, foram um ponto de partida para desacordo, como nós vemos, entre muitos daqueles que decidiram ocupar-se deste tema; e por isso eles não confiavam nas mesmas ideias. Outra razão adicional consiste em que os movimentos dos planetas e a revolução das estrelas não podem ser medidos com precisão numérica e informação completa, excepto com o decorrer do tempo e a contribuição de muitas observações anteriores, através das quais esse conhecimento foi transmitido para a posteridade, de mão em mão, por assim dizer. Para mais certeza, Cláudio Ptolomeu de Alexandria, que de longe sobressaiu dos restantes, pela sua maravilhosa competência e aplicação ao trabalho, trouxe, esta arte no seu todo quase até a perfeição, com o auxílio de observações prolongadas ao longo de um período de mais de quatrocentos anos; portanto, não parece haver qualquer brecha que ele não tenha fechado. Não obstante muitas coisas, como nós as entendemos, não concordam com as conclusões que resultam do seu sistema, além de certos outros movimentos terem sido descobertos, os quais ainda não eram dele conhecidos. Do mesmo modo Plutarco, numa discussão sobre o ano tropical do Sol, diz que a deslocação dos corpos celestes tem fugido muito à perícia dos astrónomos. Para utilizar o próprio ano como um exemplo, é bem conhecido, penso eu, quão diferentes têm sido sempre as opiniões relativas ao problema, e assim muitos abandonaram toda a esperança de que uma exacta determinação do ano pudesse ser encontrada. A situação é a mesma a respeito de outros corpos celestes.

Contudo, para evitar dar a impressão de que esta dificuldade é uma desculpa para a indolência, pela graça de Deus, sem O qual nada podemos aperfeiçoar, vou tentar fazer um estudo mais largo sobre estas matérias. Pelo número de ajudas com que contamos, o nosso objectivo desenvolve-se no intervalo de tempo que se prolonga desde as origens desta arte até nós. As suas descobertas podem ser comparadas com o que eu tenho encontrado recentemente. Admito, além do mais, que vou tratar vários tópicos diferentemente dos meus antecessores, e quero ainda agradecer-lhes, porque foram eles que primeiramente abriram o caminho para a investigação destas variadas questões.

O UNIVERSO É ESFÉRICO

Compete-nos notar desde o início que o Universo é esférico ou porque seja esta a forma mais perfeita de todas, um todo inteiro sem qualquer junção de partes; ou porque ela própria seja a mais capaz das figuras e maximamente conveniente para encerrar e conservar todas as coisas; ou até porque as partes mais perfeitas do Universo, isto é, o Sol, a Lua e as estrelas, se apresentam com essa forma e porque todo o Universo tende a ser por ela delimitado. E isto mesmo se vê nas gotas de água e nos outros corpos líquidos quando revestem a sua forma natural. Pelo que ninguém deverá hesitar em atribuir tal forma aos corpos celestes.

A TERRA TAMBÉM É ESFÉRICA

A Terra também é esférica porque se apoia em todas as direcções no seu próprio centro, embora a totalidade da curva não se veja toda do mesmo lado, pela considerável altura dos montes e concavidade dos vales que não fazem, contudo, variar absolutamente nada a sua total esfericidade. E isto é facto manifesto porque a quem se dirige de qualquer parte que seja para o Norte levanta-se-lhe, a pouco e pouco, aquele pólo de rotação diária, enquanto do lado oposto o outro desce na mesma medida, e se vê que muitas estrelas à volta do Pólo Norte não têm ocaso e que, no Pólo Sul, algumas nunca nascem. Assim a Canopo não é visível na Itália, sendo visível no Egipto. Mas a Itália vê a mais afastada estrela do Rio, a qual a nossa região, numa zona mais frígida, ignora. Pelo contrário, para aqueles que viajam para o Sul, estes dois astros são visíveis enquanto que são invisíveis os que nós vemos.

Entretanto, também as próprias inclinações dos pólos têm em toda a parte a mesma razão aos espaços da Terra percorridos, e isso não acontece em nenhuma outra figura como na esfera. Donde se conclui que também a Terra termina em pólos e por isso é esférica. Acresce ainda que os eclipses vespertinos do Sol e da Lua não são visíveis para os habitantes do Oriente nem os matutinos para os habitantes do Ocidente, mas os que estão na zona média vêem-nos, aqueles mais tarde e estes mais cedo. Que também as águas repousam na mesma forma é o que os navegadores depreendem, porquanto a Terra que não se avista do navio é geralmente avistada do topo do mastro.

Por outro lado, se fixarmos uma luz no topo do mastro, os que estão na praia vêem-na descer lentamente, enquanto o navio se afasta da Terra, até que finalmente se oculta como se tivesse o seu ocaso no horizonte. Diz-se até que as águas, fluidas por natureza, buscam sempre as mesmas partes mais baixas do que a Terra e não sobem da praia até mais além do que a própria convexidade permite. Por isso é que a Terra deve ser mais elevada onde quer que ela surja do Oceano.

COMO A TERRA FORMA UM SÓ GLOBO COM A ÁGUA

Ora o Oceano rodeando a Terra dá origem a mares aqui e ali, enchendo as suas cavidades mais profundas. Convinha pois que houvesse menos água do que Terra para que a água não absorvesse todo o solo, pois ambos pelo seu peso se esforçam por atingir o mesmo centro, e deixasse algumas partes da Terra para sobrevivência das criaturas vivas e muitas ilhas a descoberto, em locais diferentes. Que outra coisa é a Terra, continente ou globo terrestre, senão uma ilha maior que as outras? Nem se deve dar ouvidos a certos peripatéticos que afirmaram que a totalidade das águas é dez vezes maior do que a Terra. E admitem esta hipótese porque, na transmutação dos elementos, uma parte da Terra se transforma em dez de água. Dizem que a Terra se projecta em certa extensão porque o seu deslocamento não está em toda a parte em proporção com o seu peso, pois é cheia de cavidades, e o centro de gravidade não é o mesmo que o centro geométrico. Mas estes enganam-se por ignorância da Geometria, esquecendo que a água não poderia ser nem sete vezes maior e deixar a seco alguma parte da Terra, a não ser que ela se afastasse completamente do centro de gravidade e desse lugar à água, como se esta fosse mais pesada. Uma vez que as esferas (em volume) são proporcionais ao cubo dos seus diâmetros, se por sete partes de água houvesse uma de Terra, o diâmetro desta não podia ser maior do que a distância do centro à circunferência da água. Muito menos pode a água ser dez vezes maior. Segue-se que não há diferença entre o centro de gravidade da Terra e o seu centro geométrico.

Daí se pode aceitar que a curvatura da Terra, estendendo-se a partir do Oceano, não aumente indefinidamente com a distância de contrário manteria as águas do mar o mais afastadas possível e não permitiria de modo nenhum que os mares interiores e as vastas enseadas se formassem. Para além do litoral do Oceano a sua profundidade não cessaria nunca de aumentar pelo que nenhuma ilha, nenhum rochedo ou qualquer espécie de terreno seria avistado pelos navegantes que fizessem grandes viagens. Na verdade já consta que entre o Mar Egípcio e o Golfo Arábico há apenas menos de duas milhas (quinze estádios) de largura, quase no meio da esfera terrestre. E, por outro lado, Ptolomeu, na sua *Geografia*, estende a Terra habitável até o círculo médio (de longitude) da Terra, deixando a Terra desconhecida onde os autores mais recentes colocaram o Cataio e regiões extensíssimas até sessenta graus de longitude, de modo que a Terra desabitada é agora maior em longitude do que o resto do Oceano. Mais claro se tornará isto se juntarmos as ilhas descobertas, na nossa época, às ordens dos príncipes espanhóis e portugueses, principalmente a América que tirou o nome do seu descobridor, um almirante, e que julgam ser outro continente, pois a sua extensão ainda não é conhecida; além das muitas outras ilhas dantes desconhecidas, pelo que até ficaremos menos admirados com a existência de antípodas ou antíctones. O cálculo geométrico força-nos a acreditar que a própria América está diametralmente oposta à Índia do Ganges.

Justamente por tudo isto, julgo evidente que a Terra e a água se apoiam ambas em um único centro de gravidade, que não é diferente do centro geométrico da Terra. Como esta é mais pesada, as suas fendas enchem-se de água, sendo consequentemente a água limitada na sua quantidade comparada com a Terra, embora à superfície se veja haver mais água. Com efeito, é necessário que a Terra com as águas que a rodeiam tenha a forma que a sua própria sombra mostra, visto que, devido ao seu contorno perfeitamente circular, ocasiona um perfeito círculo nos eclipses da Lua. Donde se conclui que a Terra não é plana, como opinaram Empédocles e Anaxímenes, nem timpanóide como afirmava Leucipo, nem em forma de taça como dizia Heraclito, nem de maneira nenhuma côncava como ensinava Demócrito. Também não é cilíndrica como Anaximandro julgava, nem a sua parte inferior se prolonga indefinidamente segundo a opinião de Xenófanes, mas é dotada de perfeita rotundidade como os filósofos pensam.

O MOVIMENTO DOS CORPOS CELESTES É UNIFORME, PERPÉTUO E CIRCULAR OU COMPOSTO DE MOVIMENTOS CIRCULARES

Depois do que atrás fica dito, referiremos que o movimento dos corpos celestes é circular. Com efeito, o movimento apropriado de uma esfera é uma rotação num círculo, reproduzindo a sua forma no próprio acto como corpo extremamente simples em que não se pode indicar princípio nem fim, nem distinguir-se um do outro, enquanto através dos mesmos se move sobre si mesma. Contudo, existem muitos movimentos na multidão das esferas. O mais evidente de todos é a rotação diária a que os Gregos chamam *muchthernuron*, isto é, o intervalo de tempo de um dia e de uma noite. Por esta rotação todo o Universo parece deslocar-se de Oriente para Ocidente, excepto a Terra. Esta rotação é considerada como a medida comum de todos os movimentos porque também medimos o próprio tempo pelo número de dias. Depois vemos outras revoluções em sentido contrário, isto é, de Ocidente para Oriente, por exemplo do Sol, da Lua e dos cinco planetas. Assim o Sol dá-nos o ano, a Lua os meses que são unidades de tempo muito familiares. Da mesma forma cada um dos cinco planetas completa a sua órbita. Existem, porém, muitas diferenças: em primeiro lugar porque não giram nos mesmos pólos que aquele primeiro movimento mas obliquamente, pelo Zodíaco; em segundo lugar porque na sua própria órbita não parecem mover-se uniformemente, pois observamos que o Sol e a Lua são algumas vezes lentos e outras vezes mais rápidos nos seus movimentos. Quanto aos cinco planetas, vemos que também algumas vezes se atrasam e ficam, num lado e noutro, estacionários. E enquanto o Sol percorre sempre o seu caminho directo, os planetas vagueiam de vários modos, andando errantes, umas vezes para o Norte, outras para o Sul, pelo que lhes chamam astros errantes. Acrescente-se também que umas vezes estão mais perto da Terra, e diz-se que estão no perigeu, e outras vezes estão mais afastados, isto é, no apogeu. Convém, não obstante, reconhecer que os seus movimentos são circulares ou compostos de muitos círculos, porque esta irregularidade ocorre de harmonia com uma lei definida e retornos fixos às suas posições originais, o que não poderia acontecer se não fossem circulares.

Na verdade só um círculo pode repetir uma situação anterior. Assim, por exemplo, é por um movimento composto de círculos que o Sol repete para nós o ciclo da desigualdade das noites e dos dias e as quatro estações do ano, e nisto se reconhecem vários movimentos. Com efeito, é impossível que por uma só esfera um corpo celeste simples seja movido não uniformemente. Para que tal acontecesse seria preciso que houvesse inconstância na força motriz, de natureza quer externa quer interna, ou disparidade do corpo em movimento. Mas como à inteligência repugnam ambas estas explicações e é inaceitável atribuir tal coisa a corpos que se encontram estabelecidos numa ordem perfeitíssima, é natural que os seus movimentos, embora regulares, nos apareçam como irregulares, ou porque os pólos dos seus círculos são diferentes [dos da Terra], ou porque talvez a Terra não esteja no centro dos círculos nos quais aqueles se movem, acontecendo que quando observamos a Terra, os percursos destes planetas, por causa das distâncias diferentes, nos pareçam, quando estão mais próximos, maiores do que quando estão mais afastados (como se demonstra na Óptica). Assim, devido às distâncias diferentes donde são observados, os movimentos em arcos iguais de uma esfera parecerão desiguais, em intervalos iguais de tempo. Por esta razão julgo necessário, antes de tudo, que deligentemente verifiquemos qual é a relação entre a Terra e o Céu para que, ao desejarmos sondar coisas tão elevadas, não suceda ignorarmos as que estão próximas de nós e por causa desse erro atribuamos ao Céu o que pertence à Terra.

CONVÉM O MOVIMENTO CIRCULAR À TERRA? QUAL A SUA POSIÇÃO?

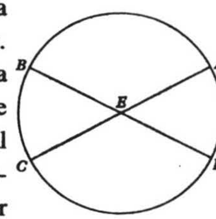
Visto que já está provado que a Terra tem a forma de uma esfera, proponho que se veja também se, além desta forma, tem também movimento e qual a posição do Universo que ocupa, sem o que não é possível saber qual a razão certa dos fenómenos celestes. Posto que haja concordância geral entre os autores em que a Terra está imóvel no centro do Universo, a tal ponto que julgam incompreensível e até ridículo pensar o contrário, se considerarmos a questão mais atentamente, veremos que não está de modo nenhum resolvida, e por isso, incontestavelmente não deve ser posta de lado. É que, de uma maneira geral, toda a mudança de posição que se vê ou é devida ao movimento da coisa observada, ou do observador, ou então seguramente de um e de outro.

Na verdade, entre objectos que se movem igualmente na mesma direcção, não se nota qualquer movimento, isto é, entre a coisa observada e o observador. Ora a Terra é o lugar donde aquela rotação celeste é observada e se apresenta à nossa vista. Portanto, se algum movimento for atribuído à Terra, o mesmo movimento aparecerá em tudo que é exterior à Terra, mas na direcção oposta. É o caso em primeiro lugar da rotação diurna. Esta parece envolver todo o mundo excepto a Terra e as coisas que estão à sua volta. Contudo, se admitirmos que o Céu não tem nenhum destes movimentos e que, ao contrário, a Terra gira de Ocidente para Oriente, reflectindo atentamente, concluiremos que isto se passa assim mesmo em relação ao nascer e ao pôr do Sol, da Lua e das estrelas. E como é o Céu que contém todas as coisas e constitui o espaço onde todos os corpos celestes têm o seu lugar, não se vê imediatamente por que é atribuído movimento não ao que está localizado mas àquilo em que está localizado. Eram sem dúvida desta opinião os pitagóricos Heraclides e Ecfanto bem como o siracusano Nicetas, segundo Cícero, quando colocavam a Terra a girar no centro do Universo. Por isso pensavam que as estrelas desapareciam quando a Terra impedia a sua vista, e nasciam quando ela, movendo-se, as deixava visíveis. Admitindo a rotação diurna, segue-se outro e não menor problema acerca da posição da Terra, embora quase toda a gente admita e creia que ela está no centro do Universo. Porque se alguém negar que a Terra ocupa o centro ou o meio do Universo e reconhecer, contudo, que a sua distância [a ele] é insignificante em comparação com a esfera das estrelas fixas, mas que é notável e apreciável em comparação com as esferas do Sol e das outras estrelas, estando convencido de que, por esta razão, o seu movimento parece variável, como se as esferas fossem uniformes em relação a um centro diferente do centro da Terra, poderá talvez apresentar uma explicação não absurda do movimento aparentemente não uniforme. Porque o facto de os planetas se verem umas vezes mais próximos, outras vezes mais afastados da Terra prova necessariamente que o centro da Terra não é o centro das suas esferas. Também não está assente se a Terra se desvia em direcção a elas para delas se afastar, se são elas que se dirigem para a Terra e dela se desviam. Nem seria muito de admirar se, para além desta rotação diária, alguém supusesse ter a Terra outro movimento, por exemplo, que girasse sobre si própria, movendo-se também com movimentos vários e fosse um dos astros, como se diz que pensava o pitagórico Filolau, matemático não vulgar. Realmente para o ver, Platão apressou-se a viajar para a Itália como contam os seus biógrafos.

Na verdade muitos pensaram que se poderia demonstrar pela Geometria que a Terra está no centro do Universo como se fosse um ponto em relação com a imensidade do Céu; desempenha a função de centro, e, por esta razão, não se move; dado que quando o Universo se move, o seu centro permanece imóvel, movendo-se mais lentamente aquilo que está próximo do centro.

A IMENSIDADE DO CÉU COMPARADA COM O TAMANHO DA TERRA

Ora pode compreender-se que um tão grande volume da Terra não pode comparar-se com a grandeza do Céu porque os círculos-limites (correspondentes ao termo grego *horizons*) cortam em duas partes [iguais] toda a esfera celeste, o que não podia fazer-se sendo a grandeza da Terra ou a distância do centro do Universo comparáveis com o Céu. Com efeito, um círculo que bissecta uma esfera passa pelo centro dessa esfera e é o maior dos círculos que nela se podem traçar. De acordo com isto, seja *ABCD* o círculo do horizonte, e a Terra onde está centrada a nossa visão seja o ponto *E*, que será ao mesmo tempo o próprio centro do horizonte, no qual as coisas visíveis se separam das que se não vêem. Suponha-se, então, que a primeira estrela de Câncer se vê nascer no ponto *C*, servindo-nos de uma dioptra, de um astrolábio ou de um nível de água colocados no ponto *E*. Neste momento a primeira estrela do Capricórnio põe-se no ponto *A*. Ora, uma vez que *A*, *E*, *C* estão em linha recta, de acordo com a dioptra, daí resulta que essa linha é um diâmetro da eclíptica, pois seis signos do Zodíaco perfazem um semicírculo, e o seu centro *E* considera-se também o centro do horizonte. Mudada agora a situação de modo que a primeira estrela do Capricórnio nasça em *B*, Câncer pôr-se-á em *D* e será *BED* uma linha recta e um diâmetro da eclíptica. Ora já se viu que *AEC* é também um diâmetro do mesmo círculo. Está portanto demonstrado que aquele *E*, na intersecção, é o centro.



Assim, portanto, o círculo do horizonte sempre divide ao meio a eclíptica, que é um círculo máximo da esfera. Mas numa esfera, se um círculo bissecta um dos círculos máximos também ele é um círculo máximo e, portanto, o horizonte é um dos círculos máximos e o seu centro é também o centro da eclíptica, pelo menos aparentemente. Contudo a linha traçada a partir da superfície da Terra tem de ser diferente da linha traçada a partir do centro, mas devido à sua extensão imensa em relação à Terra, elas são virtualmente paralelas e por causa da sua extensão parecem ser uma única linha, pois o espaço entre elas é pequeníssimo comparado com essa sua extensão, como se mostra em Óptica. Por este argumento certamente se demonstra satisfatoriamente que o Céu é imenso em comparação com a Terra e dá a impressão de um tamanho infinito, enquanto segundo o testemunho dos sentidos, a Terra é em relação ao Céu o que um ponto é em relação ao corpo, e o finito em relação ao infinito. No entanto não se segue daqui que a Terra tenha de estar parada no centro do Universo. E ainda devíamos ficar mais admirados se o Universo tão vasto fizesse uma rotação em vinte e quatro horas, de que [o mesmo aconteça com] uma parte mínima dele, que é a Terra. Porque dizer que o centro é imóvel e que as coisas próximas do centro são as que se movem menos, não prova que a Terra esteja imóvel no meio do Universo e o mesmo acontece se disseres que o Céu gira mas os pólos estão imóveis e que as coisas próximas dos pólos são as que se movem menos. Do mesmo modo vê-se que Cinosura (a Ursa Menor) se move mais lentamente do que Águia e Canícula porque estando mais próxima do pólo descreve um círculo mais pequeno, pois são todas partes de uma única esfera cuja velocidade de movimento diminui em direcção ao seu eixo e não permite que o movimento de todas as suas partes seja igual, embora a rotação de toda a esfera os faça regressar à sua posição original no mesmo intervalo de tempo mas não de espaço. É nisto pois que se baseia a força do argumento: a Terra é parte da esfera celeste, da mesma espécie e movimento, de modo que estando mais próxima do centro move-se lentamente. Mover-se-á também ela própria sendo um corpo e não um centro, ao mesmo tempo e em círculos semelhantes ao círculo celeste, mas mais pequenos. Quão falso isto é vê-se mais claro do que a luz do dia, pois seria necessário que num lugar fosse sempre meio-dia e noutro sempre meia-noite. De modo que nem o nascer nem o pôr do Sol diários poderiam ocorrer uma vez que o movimento do todo e da parte é uno e inseparável.

Ora é muito diferente a relação entre as coisas que se distinguem por uma diversidade de situações, de sorte que aquelas que estão limitadas a um círculo mais curto percorrem-no mais rapidamente do que as que percorrem um círculo mais longo. Assim Saturno, o mais afastado dos planetas, faz uma revolução em trinta anos e a Lua, indubitavelmente a mais próxima da Terra, completa o seu giro em um mês e a própria Terra, finalmente, faz a sua rotação num dia e numa noite. De igual modo levantar-se-á a mesma dúvida em relação à rotação diurna. Mas há ainda que procurar a posição da Terra que é menos certa ainda pelo que se disse atrás. Sem dúvida aquela demonstração nenhuma outra coisa provou a não ser que o Céu é ilimitado em relação à Terra. Mas não é de modo algum claro até onde se estende esta imensidade.

POR QUE RAZÃO OS ANTIGOS PENSARAM QUE A TERRA SE NÃO MOVE, ESTANDO NO MEIO DO UNIVERSO E SENDO O SEU CENTRO

Claro que algumas outras razões teriam os antigos filósofos para tentarem demonstrar que a Terra está imóvel no meio do Universo. Alegam como razão principal o peso e a leveza. Segundo eles, o elemento mais pesado é a Terra e todas as coisas que têm peso são arrastadas para ela, esforçando-se por alcançar o seu centro. Na verdade, sendo a Terra de forma esférica, os corpos pesados são atraídos de todas as direcções para a sua superfície, em ângulos rectos (1), de harmonia com a sua própria natureza. Se não fossem retidos nessa superfície, colidiriam no seu centro, dado que a linha recta que encontra um plano tangencial onde ela toca uma esfera em ângulos rectos, passa pelo [seu]centro. Ora as coisas que se dirigem para o meio parecem seguir, mas param nele. Com mais razão, pois, toda a Terra estará parada no meio, e como recipiente que recebe todas as coisas que caem nela, permanecerá imóvel devido ao seu peso. Igualmente eles também se esforçam por demonstrar isto servindo-se do argumento do movimento e da sua natureza. Segundo eles, Aristóteles diz que o movimento de um corpo simples é simples. Além disso, dos movimentos simples uns são rectos outros circulares. Dos rectos, porém, uns são para cima outros para baixo.

(1) Nicolau Copérnico usa a expressão «em ângulos rectos» em vez de «perpendicularmente», como aliás era usual na época.

Pelo que todo o movimento simples se dirige para o meio, isto é, para baixo, ou do meio, que é para cima. Se for à volta do meio, esse é circular. Considera-se próprio da Terra e da água, elementos tidos como pesados, serem impelidas para baixo, isto é, procurarem o meio, mas quanto ao ar e ao fogo, elementos leves, é próprio deles moverem-se para cima e afastarem-se do meio. Esta a teoria de Aristóteles [*De Caelo*, I, 2; II, 14].

Se, portanto, diz Ptolomeu de Alexandria [*Almagesto*, I, 7], a Terra se movesse ao menos com uma rotação diária, teria que acontecer o contrário do que acima foi dito. Na verdade teria que haver um movimento muito rápido e a sua velocidade inexcedível, para poder levar a Terra a fazer um circuito completo em 24 horas. Realmente as coisas que fazem uma rotação veloz parecem extremamente incapazes de se associar e capazes de se dispersar se estiverem juntas, a não ser que a Terra se teria precipitado no Céu e ficaria destruída (o que é totalmente ridículo) e ainda menos os seres vivos e outros corpos pesados e soltos teriam ficado nos seus lugares. Nem os corpos, que caem, cairiam em linha recta para a posição que lhes está destinada, em ângulos rectos, porque essa posição seria desviada entretanto pela grande velocidade da Terra. Também veríamos as nuvens e tudo o que está impresso no ar continuamente arrastados para Oeste.

REFUTAÇÃO DAS RAZÕES APRESENTADAS E A SUA INSUFICIÊNCIA

Na verdade, por estas e outras razões semelhantes, dizem que a Terra está imóvel no centro do Universo, e assim se mantém sem dúvida. Mas se alguém for de opinião que a Terra se move, dirá por certo que o movimento é natural e não violento. De facto, as coisas que são segundo a Natureza têm efeitos contrários às que são provocadas pela violência. Com efeito, os objectos a que a força ou o impulso são aplicados têm necessariamente de ser destruídos e não subsistirão durante muito tempo, mas as coisas que são feitas pela Natureza estão no seu estado natural e continuam na sua forma perfeita. É pois em vão que Ptolomeu teme que a Terra venha a dissipar-se, assim como todos os objectos terrestres, devido a uma rotação produzida pela força da Natureza, que é muito diferente do que pode ser realizado pela arte e pelo engenho humanos.

Mas porque não se levanta a mesma questão ainda com mais intensidade acerca do Universo cujo movimento tem de ser tanto mais rápido quanto o Céu é maior do que a Terra? Ou tornou-se o Céu imenso porque foi desviado do centro por um movimento de força indiscritível e acabará por ser precipitar também, se parar? Certamente se este raciocínio fosse razoável também a grandeza do Céu subiria até o infinito. Com efeito, quanto mais alto ele for levado pela força do seu movimento, tanto mais rápido esse movimento será devido ao aumento contínuo da circunferência que ele tem de percorrer no período de 24 horas. Por outro lado, crescendo o movimento cresceria também a imensidade do Céu. Assim a velocidade aumentaria o movimento e o movimento aumentaria a velocidade até o infinito. Mas segundo aquele axioma da Física — o infinito não pode ser percorrido nem movido de forma alguma — o Céu terá necessariamente de permanecer imóvel. Mas eles dizem que fora do Céu não há corpo nem espaço vazio ou lugar, nada, numa palavra, e assim não existe nenhuma parte para onde o Céu possa desviar-se; neste caso é certamente espantoso que alguma coisa possa ser limitada pelo nada. Mas se o Céu é infinito e apenas finito na sua cavidade interior, talvez se possa demonstrar melhor que nada existe fora do Céu, uma vez que todas as coisas estão dentro dele, seja qual for o espaço que ocupem, mas o Céu permanecerá imóvel. De facto, o mais poderoso argumento em que se apoiam para demonstrar que o mundo é finito, é o movimento.

Deixemos pois que os físicos disputem sobre se o mundo é finito ou infinito, tendo nós como certo que a Terra é limitada pelos seus pólos e por uma superfície esférica. Porquê, pois, hesitamos ainda em conceder movimento àquilo que tem uma superfície naturalmente própria para ele, em lugar de acreditar que todo o Universo se move, embora não se conheça se tem fim e nem se possa vir a conhecer? E por que não havemos de admitir que a rotação diária é aparente no Céu mas real na Terra? E é assim que as coisas se passam na realidade, como disse o Eneias de Virgílio: «Nós saímos do porto e a Terra e as cidades recuam» [*Eneida*, III, 72]. Na verdade, quando um navio navega com bonança, tudo o que está fora dele parece aos navegantes mover-se pelo reflexo daquele movimento e, por outro lado, pensam que estão imóveis com todos os objectos junto deles.

Naturalmente, a mesma coisa acontece com o movimento da Terra de maneira que todo o Universo parece rodar. Que diremos, pois, das nuvens e de certos corpos da mesma espécie que estão suspensos no ar, descendo ou subindo, senão que não é apenas a Terra com a água que a ela está unida que se move, mas também uma pequena parte do ar e tudo o que de algum modo à terra está ligado? E isto passa-se assim, quer porque o ar circundante revista a mesma natureza da Terra, por estar misturado com a matéria terrestre e aquosa, quer porque o movimento do ar é adquirido, pois partilha com a Terra da sua rotação incessante, devido à contiguidade e à ausência de resistência. Por outro lado, é com igual surpresa que dizem que a região superior do ar segue o movimento do Céu que é indicado por aqueles astros que aparecem inopinadamente, isto é, os chamados Cometas ou Pogónios pelos Gregos, cujo aparecimento é localizado naquela região e que nascem e se põem como os outros astros. Podemos afirmar que esta parte superior do ar não partilha do movimento da Terra por causa da grande distância a que está dela. Igualmente estará imóvel o ar situado próximo da Terra e os objectos nele suspensos, a não ser que sejam agitados pelo vento ou qualquer outra força, como realmente acontece. Que é, pois, o vento no ar senão as ondas no mar? Impõe-se, assim, dizer que o movimento dos corpos que caem e dos que sobem no Universo é um movimento duplo e em todos os casos rigorosamente composto de movimentos rectilíneo e circular. Seguramente, as partes que são arrastadas para baixo pelo seu próprio peso, uma vez que são principalmente terrestres, sem dúvida conservam a mesma natureza do todo. O mesmo se aplica àquelas que são impelidas para cima pela força da sua natureza ígnea. É que não só este fogo terrestre se alimenta principalmente de matéria terrestre, mas a chama é definida apenas como fumo ardente.

Ora, é propriedade do fogo dilatar aquilo em que entra. Isto faz ele com tanta força que nenhuma acção ou máquina pode impedir que atinja o seu objectivo quando se liberta da sua prisão. Mas este movimento de dilatação parte do centro para a periferia e, assim, se alguma parte da Terra se incendiar, é impelida do meio para as regiões mais elevadas. Por isso é que o movimento de um corpo simples é simples (isto verifica-se particularmente no movimento circular), dado que o corpo simples permanece na sua posição natural e na sua unidade. Quando está nesta posição não pode ter nenhum outro movimento excepto o circular, pois que o corpo simples permanece totalmente em si mesmo como um corpo em repouso. O movimento rectilíneo manifestar-se-á nos objectos que abandonam a sua posição natural ou são arrastados para fora dela ou de qualquer modo de lá saem. Mas nada repugna tanto a toda a ordenação e forma do Universo como existir qualquer coisa fora do seu lugar. Daqui resulta que o movimento rectilíneo só ocorre nos corpos que não se encontram no seu próprio estado nem em harmonia perfeita com a sua natureza e [que estão] privados da sua unidade. Além disso, os corpos que se movem para cima e para baixo, mesmo sem movimento circular, não realizam um movimento simples, constante e uniforme. Na verdade, não podem ser comandados nem pelo seu pouco peso nem pelo impulso dele e todos os objectos que caem, começando por um movimento lento, aumentam a velocidade à medida que caem. Por outro lado, notamos que este fogo terreno (pois não vemos outro) quando irrompe para o alto, imediatamente enfraquece, revelando assim que a causa da [sua] violência era a matéria terrestre. Contudo, o movimento circular processa-se sempre sem alteração porque a sua causa é constante. Pelo contrário, os objectos que se movem em linha recta perdem a causa que os acelera e os levou ao seu próprio lugar. Deixam então de ser leves ou pesados, cessando esse movimento. Portanto, uma vez que o movimento circular é próprio do «todo» enquanto as «partes» têm o movimento rectilíneo, podemos dizer que os dois movimentos coexistem como «o ser vivo» com «o ser doente». Seguramente a divisão que Aristóteles faz do movimento simples em três categorias, «do meio», «para o meio», «à volta do meio», será encarada apenas como um exercício lógico, tal qual distinguimos entre uma linha, um ponto e uma superfície, embora uma não possa existir sem a outra e nenhuma delas sem um corpo.

Um outro ponto é que a imobilidade é considerada uma condição mais nobre e divina do que a mudança, a instabilidade, que são mais próprias da Terra do que do Universo. Acrescento também que seria bastante absurdo atribuir movimento ao que contém e àquele em que algo se localiza e não àquilo que é contido e que se localiza, isto é, a Terra. Finalmente, sendo evidente que os planetas estão umas vezes mais próximos e outras mais afastados da Terra, o movimento de um corpo simples à volta do ponto que se julga ser o centro da Terra será a partir do meio e em direcção a ele. Importa, pois, que o movimento à volta desse ponto se interprete de uma forma mais geral, considerando-se suficiente que cada movimento seja um movimento à volta do seu próprio centro.

Vedes assim que por todas estas razões é mais provável que a Terra se mova do que esteja parada. Isto aplica-se especialmente ao movimento da rotação diária que de sobremaneira é próprio da Terra.

PODEM ATRIBUIR-SE VÁRIOS MOVIMENTOS À TERRA? O CENTRO DO UNIVERSO

Portanto, como nada se opõe a que a Terra se mova, proponho que se veja [agora] se pode ter ainda mais movimentos, de modo a poder ser considerada como um planeta.

Que ela não é efectivamente o centro de todas as revoluções mostram-no o movimento não uniforme e aparente dos planetas e as distâncias variáveis deles à Terra. Estes fenómenos não podem explicar-se com círculos concêntricos com a Terra. Havendo, pois, vários centros, não será temerário duvidar se o centro do mundo será, de facto, o centro de gravidade terrestre ou qualquer outro [ponto]. Quanto a mim penso que a gravidade outra coisa não é senão um certo desejo natural introduzido nas partes pela divina Providência do autor do Universo para que se encontrem na sua unidade e integridade, reunindo-se em forma de esfera.

E é de crer que esta tendência exista também no Sol e na Lua, assim como nos outros planetas, para que por seu efeito eles possam conservar a forma esférica com que se apresentam. Não obstante, percorrem as suas órbitas de muitos modos. Se, portanto, a Terra também executar outros movimentos, por exemplo à volta dum centro, devem ser necessariamente semelhantes àqueles que existem igualmente em muitos corpos nos quais verificamos a existência de uma revolução anual. Pelo que se o movimento é transformado de solar em terrestre, admitindo a imobilidade do Sol, o nascimento e ocaso dos signos do Zodíaco e das estrelas fixas matutinas e vespertinas aparecerão da mesma forma. Também as estações, retrogradações e progressões dos planetas serão consideradas não como um movimento seu mas da Terra, que eles vão buscar para suas aparências. Finalmente verificar-se-á que o Sol ocupa o centro do Universo, o que nos é ensinado pelo princípio que preside à ordem em que todos os corpos ocupam os seus lugares respectivos e pela harmonia de todo o Universo, desde que observemos os factos com os olhos bem abertos, como se costuma dizer.

A ORDEM DAS ESFERAS CELESTES

Vejo que ninguém duvida que o Céu das estrelas fixas é o que há de mais alto em tudo o que é visível. Nós vimos que os antigos filósofos quiseram ordenar os planetas de harmonia com a extensão das suas revoluções, partindo do princípio de que, para igual velocidade, os corpos mais distantes parecem mover-se mais lentamente, como se demonstra na *Óptica* de Euclides. Por esta razão pensam que a Lua descreve uma trajectória circular em brevíssimo período de tempo, porque gira em volta da Terra no mais pequeno círculo. Mas Saturno, o mais alto, descreve maior círculo e no mais longo tempo. Abaixo deste está Júpiter e depois Marte. Acerca de Vénus e Mercúrio há várias opiniões, pois estes planetas não ocupam posições afastadas do Sol como os outros. Por esta razão uns colocam-nos acima do Sol, como o *Timeu* [*38D*] de Platão, outros abaixo dele, como Ptolomeu [*Almagesto*, IX, 1] e uma boa parte dos autores modernos. Alpetrágio coloca Vénus acima do Sol e Mercúrio abaixo. E segundo os discípulos de Platão, todos os planetas, porque são corpos sem luz própria, brilham devido à luz recebida do Sol. Ora, se estivessem abaixo do Sol, não se afastariam muito dele, e assim só se veria metade da sua grandeza ou pelo menos não seriam avistados na sua totalidade. É que, em geral, eles reflectem para cima, isto é, em direcção ao Sol, a luz que receberam, como vimos com a Lua Nova e em Quarto Minguante. Dizem, porém, que algumas vezes o Sol se eclipsa devido à interposição dos planetas e a sua luz fica encoberta numa parte proporcional ao tamanho deles. Como porém nunca se observa isto, os planetas não passam abaixo do Sol em nenhuma circunstância, segundo os discípulos de Platão.

Pelo contrário, aqueles que colocam Vénus e Mercúrio abaixo do Sol apresentam como razão a amplidão do espaço que sabem existir entre o Sol e a Lua. Com efeito, descobriram que a maior distância da Terra à Lua era de $64\,^{1}/_{6}$ unidades, tomando o raio da Terra como unidade, cerca de $^{1}/_{18}$ da mais curta distância entre a Terra e o Sol, isto é, 1160 unidades. Portanto, entre o Sol e a Lua são 1096 unidades [= $1160\text{-}64\,^{1}/_{6}$]. Assim, para que tamanho espaço não fique vazio, dizem que estes números preenchem quase exactamente as distâncias das ápsides pelas quais calculam a espessura daquelas esferas. Deste modo o apogeu da Lua é seguido pelo perigeu de Mercúrio e o apogeu de Mercúrio tem depois de si o perigeu de Vénus, cujo apogeu finalmente quase alcança o perigeu do Sol. Com efeito, entre as ápsides de Mercúrio, calculam uma distância de $177^{1}/_{2}$ unidades referidas, aproximadamente e, depois, o intervalo restante é praticamente preenchido pelas 910 unidades do intervalo de Vénus.

Não admitem, portanto, que haja nestes astros alguma opacidade semelhante à da Lua, mas afirmam que brilham com luz própria, ou então porque todos eles estão impregnados da luz do Sol. E o Sol não é por eles eclipsado porque muito raramente acontece que se interponham entre nós e o Sol, pois geralmente se encontram numa latitude diferente. Outra razão é que são corpos pequenos em comparação com o Sol, visto que sendo Vénus ainda maior do que Mercúrio mal pode ocultar a centésima parte do Sol. Assim pensa Albaténio, que calcula ser o diâmetro do Sol dez vezes maior [do que o de Vénus], e por conseguinte não é fácil avistar uma mancha tão pequena numa luz tão brilhante. Não obstante Averróis, na sua *Paráfrase de Ptolomeu*, lembra que viu algo obscuro quando verificava uma conjunção do Sol e de Mercúrio indicada nas *Tábuas*, e assim conclui que estes dois planetas se movem sob a esfera do Sol.

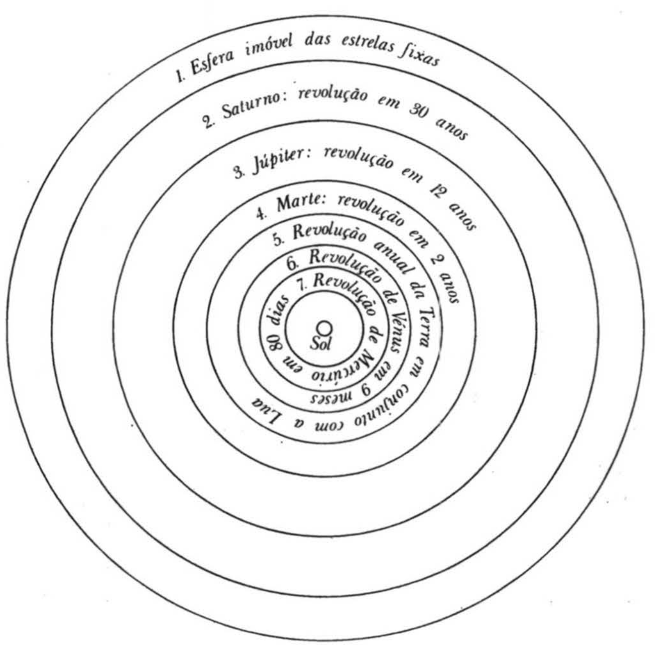
Mas também este argumento é pouco sólido e digno de [pouca] confiança como se deduz do facto de que embora haja uma distância de 38 unidades iguais ao raio da Terra até ao perigeu da Lua, segundo Ptolomeu [*Almagesto*, V, 13], mas mais de 49, segundo um cálculo mais rigoroso, como se mostrará a seguir; contudo um espaço tão grande não contém, como sabemos, senão ar e também o elemento chamado fogo, se aceitarmos tal teoria. Além disso, o diâmetro do epiciclo de Vénus, que leva este planeta 45° graus mais ou menos para os dois lados do Sol, deve ser seis vezes maior do que a distância do centro da Terra ao perigeu de Vénus, como se demonstrará no lugar próprio [IV, 21]. Que dirão então que está contido em todo este espaço muito maior do que o espaço que ocupariam a Terra, o ar, o éter, a Lua, Mercúrio, e além disso o que seria abrangido pelo enorme epiciclo de Vénus, se este planeta fizesse a sua revolução à volta duma Terra imóvel? É evidente quão falho de persuasão é o argumento de Ptolomeu [*Almagesto*, IX, 1], segundo o qual o Sol teve de mover-se necessariamente entre os corpos muito afastados dele ou próximos, sabendo-se que a própria Lua se desvia largamente, e assim manifesta a falsidade deste argumento. Mas que razão alegarão aqueles que põem Vénus abaixo do Sol e logo a seguir Mercúrio, ou os separam do Sol em qualquer outra sequência, para explicar por que Vénus e Mercúrio não atravessam órbitas separadas, divergentes do Sol, tal qual os outros planetas, sem violar a sua ordenação de acordo com a rapidez ou lentidão deles? Será portanto necessário que a Terra não seja o centro ao qual a ordem dos planetas e das esferas se refira, ou então que não haja um princípio de ordenação nem razão possível para se dar a Saturno e não a Júpiter ou a qualquer outro planeta uma posição superior. Assim julgo de maneira nenhuma dispiciendo o argumento que Marciano Capela, o autor de uma enciclopédia, e alguns outros escritores latinos desenvolveram largamente. Efectivamente eles pensam que Vénus e Mercúrio fazem a sua revolução à volta do Sol, situado no meio deles, e julgam que por isso não se afastam dele mais do que a curvatura das suas esferas o permite, porque não giram à volta da Terra como os restantes, mas têm as suas ápsides voltadas em direcção oposta. Que outra coisa pois querem dizer senão que o centro das suas esferas está próximo do Sol? Assim certamente a esfera de Mercúrio ficará encerrada na de Vénus, que se pensa ser duas vezes maior, ou mais, e encontrará lugar suficiente para si dentro da amplidão dela. Partindo deste dado, se alguém atribuir a Saturno, Júpiter e Marte esse mesmo centro desde que tenha em conta que o grandeza das suas esferas, é tal que contenha, juntamente com Vénus e Mercúrio, a Terra, rodeando-a, não se enganará. Isto se mostra pela relação dos seus movimentos nas Tábuas. Vê-se, efectivamente, que estão sempre mais próximos da Terra na altura do seu nascimento vespertino, isto é, quando estão em oposição ao Sol, e a Terra se encontra entre eles e o Sol. Estão, porém, à maior distância da Terra quando ocorre o seu ocaso vespertino, no momento em que são invisíveis perto do Sol, designadamente quando temos o Sol entre eles e a Terra. Estes factos mostram plenamente que o seu centro pertence mais ao Sol e é o mesmo à volta do qual Vénus e Mercúrio também realizam as suas revoluções.

Ora, tendo todos estes um único centro, o espaço compreendido entre a superfície exterior da esfera de Vénus e a superfície interior da esfera de Marte deve ser necessariamente separada como outra esfera concêntrica em relação a estas, limitada por elas, capaz de receber a Terra juntamente com a Lua, seu satélite, e tudo o que se encontra no interior da esfera lunar. Evidentemente não podemos separar a

Terra da Lua, que se encontra indiscutivelmente mais perto dela, pois há neste espaço uma posição bem conveniente para ela.

Consequentemente não nos envergonhamos de afirmar que toda a região contida entre a esfera da Lua e o centro da Terra passa através desse grande círculo, entre os restantes, planetas, numa revolução anual à volta do Sol. O centro do Universo está próximo do Sol e, permanecendo este imóvel, todo o movimento que aparece como seu é na realidade devido ao movimento da Terra. Em comparação com quaisquer outras órbitas dos planetas, a distância da Terra ao Sol é tal que pode considerar-se suficientemente apreciável em proporção a essas dimensões, mas o tamanho do Universo apresenta-se tão grande que a distância da Terra ao Sol é imperceptível em relação à esfera das estrelas fixas. Penso que é muito mais fácil admitir isto do que confundir o espírito com uma multiplicidade quase infinita de esferas, como foram levados a fazer os que afirmaram estar a Terra no centro do Universo. Devemos antes compreender a sabedoria da Natureza que, assim como foi particularmente cuidadosa em nada produzir de supérfluo, também, muitas vezes, dotou uma coisa com muitas propriedades. Embora todas estas afirmações sejam difíceis e quase inconcebíveis, sendo naturalmente opostas às convicções de muitos, torná-las-emos mais claras do que a luz do Sol, ao menos para aqueles que não ignoram a Matemática, à medida que formos avançando, com a ajuda de Deus. E se o primeiro argumento permanece válido porque ninguém apresentará outro mais evidente do que ser a extensão do tempo a medida do tamanho das esferas, a ordem dessas esferas é a seguinte, começando pela mais alta. A primeira e mais alta de todas é a esfera das estrelas fixas que se contém a si própria e todas as coisas, sendo portanto imóvel. É nela que se situa o Universo, ao qual se refere o movimento e posição de todos os restantes astros. De facto, embora alguns pensem que também ela muda de certa maneira, nós apontaremos outra razão desta mudança aparente, na nossa discussão do movimento da Terra [I, 11].

Segue-se depois Saturno, o primeiro dos planetas que percorre a sua órbita em 30 anos. A seguir vem Júpiter que completa a sua revolução em 12 anos e Marte em dois anos. A revolução anual ocupa a quarta posição na qual dissemos que está a Terra juntamente com a esfera lunar como um epiciclo. Em quinto lugar Vénus realiza o seu percurso em nove meses. Por fim, Mercúrio está na sexta posição completando o seu circuito em oitenta dias. No meio de todos encontra-se o Sol. Ora quem haveria de colocar neste templo, belo entre os mais belos, um tal luzeiro em qualquer outro lugar melhor do que aquele donde ele pode alumiar todas as coisas ao mesmo tempo? Na



verdade, não sem razão, foi ele chamado o farol do mundo por uns e por outros a sua mente, chegando alguns a chamar-lhe o seu Governador. [Hermes] Trimegisto apelidou-o de Deus visível e Sófocles em *Electra*, o vigia universal. Realmente o Sol está como que sentado num trono real, governando a sua família de astros, que giram à volta dele. Também a Terra não é nada prejudicada com a companhia da Lua, mas como diz Aristóteles, no seu livro *De animalibus*, possui uma afinidade íntima com a Terra. Entretanto a Terra é fecundada pelo Sol resultando um parto anual. Nós verificamos, portanto, nesta ordenação, a maravilhosa simetria do Universo assim como uma segura união harmoniosa do movimento e da grandeza das esferas que não se pode verificar em qualquer outra circunstância.

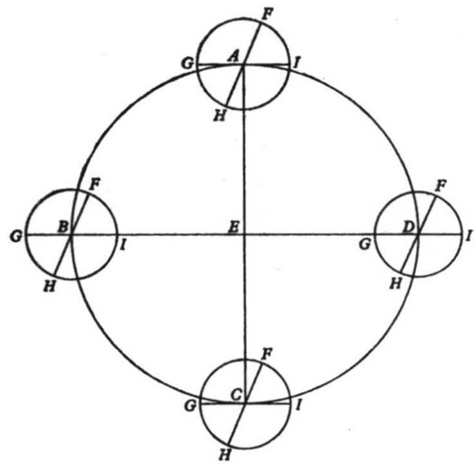
Aqui podemos, pois, observando atentamente, compreender por que Júpiter parece ter uma progressão e uma retrogradação maiores do que Saturno, e menores do que Marte e ainda por que as tem maiores do que Mercúrio. Podemos igualmente compreender por que este movimento alterno se nota mais frequentemente em Saturno do que em Júpiter e ainda mais raramente em Marte e Vénus do que em Mercúrio ou por que Saturno,, Júpiter e Marte estão mais próximos da Terra quando nascem ao pôr do Sol do que no seu ocaso, à tarde, ou [quando] aparecem a uma hora mais tardia. Na, verdade, Marte, quando é visível durante a noite, parece igual a Júpiter em tamanho, embora distinguindo-se pela cor avermelhada. Não obstante, ele dificilmente se distingue, noutros casos, entre as estrelas de 2.ª grandeza, embora visível para aqueles que o seguem com toda a atenção. Todos estes fenómenos procedem da mesma causa — o movimento da Terra. Mas porque nenhum destes fenómenos aparece nas estrelas fixas, é evidente a imensidade da sua altura, que faz mesmo com que a esfera do movimento anual, ou a sua reflexão, desapareça da nossa vista, porque todo o objecto visível tem um certo limite de distância para além do qual já não é possível vê-lo, como se demonstra na Optica. Que há ainda uma enorme distância do mais alto dos planetas, Saturno, à esfera das estrelas fixas, vê-se pela cintilação das suas luzes. É por esta característica que os planetas se distinguem particularmente, pois tinha de existir alguma diferença especial entre os astros que se movem e os que se não movem. Tão maravilhosamente divina é esta arquitectura, tão grande e tão perfeita!

DEMONSTRAÇÃO DO TRÍPLICE MOVIMENTO DA TERRA

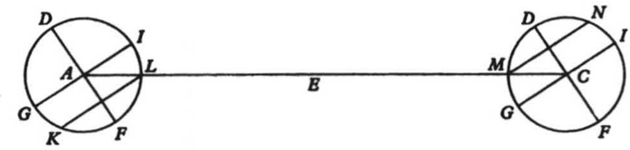
Uma vez que tantos e tão grandes testemunhas referentes aos planetas concordam em que a Terra se move, vamos agora explanar brevemente esse movimento, pois que os fenómenos são por ele explicados considerando-o como uma hipótese. Sem dúvida será necessário admitir que se trata de um movimento tríplice. O primeiro é aquele que, como dissemos, os Gregos chamavam *muchthemeron,* como eu disse [I, 4], a rotação, que é característica do dia e da noite, à volta do eixo da Terra, de Oeste para Este, deslocando-se o Universo de Este para Oeste, segundo parece. Descreve assim o equador a que alguns chamam «o círculo dos dias iguais», imitando o termo usado pelos Gregos — *isemerinos*. O segundo é o movimento anual do centro, que descreve a eclíptica, cerca do do Sol, também de Oeste para Este, isto é, portanto, entre Vénus e Marte, como dissemos [I, 10], juntamente com o que lhe está associado. Assim o Sol parece atravessar o Zodíaco com um movimento semelhante. Por isso, quando, por exemplo, o centro da Terra passa por Capricórnio, o Sol aparece-nos passando através de Câncer e com a Terra em Aquário o Sol parece estar em Leão e assim por diante, como se disse. Deve-se notar que o equador e o eixo da Terra têm uma inclinação variável relativamente ao círculo que a linha média do zodíaco e o seu plano. Realmente, se eles estivessem sempre na mesma inclinação e seguissem exactamente o movimento do centro, não deveria haver nenhuma desigualdade de dias e de noites mas, pelo contrário, o Solstício do Verão ou do Inverno, os Equinócios, a Primavera e o Inverno ou qualquer outra estação, permaneceriam sempre sem mudança.

Segue-se então um terceiro movimento em inclinação. É também uma revolução anual mas em sentido oposto à ordem dos signos, isto é, na direcção oposta à do centro. Sendo estes movimentos quase iguais no período, mas em direcção contrária, o resultado é que o eixo da Terra e o seu maior paralelo de latitude, o Equador, correspondem quase à mesma porção do Céu, como se estivessem imóveis. Entretanto o Sol parece mover-se na obliquidade da eclíptica com o movimento do centro da Terra, como se este fosse o centro do Universo, sem esquecer que em relação à esfera das estrelas fixas a distância entre o Sol e a Terra desaparece da nossa vista imediatamente.

Dado que estes assuntos exigem que os ponhamos mais diante dos olhos do que falemos deles, vamos descrever o círculo *ABCD*, representando a rotação anual do centro da Terra, traçado no plano da eclíptica. Seja *E*, próximo do centro, o Sol. Dividirei este círculo em quatro partes traçando diâmetro pelos pontos *AEC* e *BED*. Suponha-se que *A* representa o princípio de Câncer, *B* o de Balança, *C* o de Capricórnio e *D* o de Aries. Suponhamos agora que o centro da Terra está originariamente em *A*, à volta do qual traço o equador terrestre *FGHI*, mas não no mesmo plano, ressalvando apenas que o diâmetro *GAI* é a intersecção dos círculos, isto é, do equador e da eclíptica. Tracemos depois o diâmetro *FAH* em ângulos rectos com *GAI* e seja *F* o limite da maior inclinação [do equador] para o Sul e H para o Norte. Partindo destes pressupostos, os habitantes da Terra verão o Sol no centro *E*, no seu solstício de Inverno, em Capricórnio. Deve-se isto ao facto de que a inclinação máxima setentrional está voltada para o Sol. Com efeito a inclinação do equador para *AE* assinala, na rotação diária, o solstício do Inverno, paralelo ao equador num intervalo a que corresponde ao ângulo de *EAH*. Agora façamos o centro da Terra mover-se na ordem dos signos e seja *F*, o limite da máxima inclinação, movendo-se de um arco igual mas em sentido inverso à ordem dos signos, até que ambos



tenham atravessado um quadrante dos seus círculos até o ponto B. Entretanto, seja o ângulo *EAI* sempre igual a *AEB*, devido à igualdade das suas revoluções. Seja o diâmetro *FAH* paralelo a *FBH*, e *GAI* a *GBI*, equador paralelo e equador. Pela razão já muitas vezes apresentada parecem coincidir na imensidade do Céu. Assim de *B*, princípio da Balança, *E* parecerá estar no Carneiro e a linha de intersecção dos círculos ficará na linha recta *GBIE*, à qual a rotação diária não permitirá qualquer inclinação, pois toda a inclinação será no plano lateral. Assim veremos, o Sol no seu equinócio da Primavera. Suponhamos que o centro da Terra se move nas condições que indicámos. Quando tiver completado um semicírculo em *C*, o Sol parecerá entrar em Câncer. Mas *F*, o ponto mais ao Sul da inclinação do equador, ficará voltado para o Sol e assim fará com que o Sol pareça seguir pelo solstício do Verão, medido pelo ângulo da obliquidade, *ECF*. Então, quando *F* voltar para o terceiro quadrante do círculo, a linha de intersecção *GI* cairá, uma vez mais, em *ED*. Daqui ver-se-á o Sol na Balança, tendo alcançado o equinócio do Outono. Finalmente, pelo mesmo processo, *HF* girará gradualmente na direcção do Sol e repetir-se-á a situação pela qual começámos a nossa exposição.



Alternativamente, seja *AEC*, do mesmo modo, um diâmetro do plano referido [a ecliptica] e também a intersecção desse plano com um círculo que lhe é perpendicular. Próximo de *A* e *C*, isto é, em Câncer e em Capricórnio, respectivamente, descrevamos um círculo *DGFI* através dos pólos da Terra. Seja *DF* o eixo da Terra, *D*, o pólo norte, *F*, o pólo Sul, e *GI* o diâmetro do equador. Daqui, girando *F* em direcção ao Sol que está próximo de *E*, sendo a inclinação do equador para o Norte medida pelo ângulo *IAE*, o movimento da Terra à volta do seu eixo descreverá um círculo a Sul, paralelo ao equador, com o diâmetro *KL* e na distância *LI*, o trópico do Capricórnio como é visto do Sol, ou, falando mais rigorosamente, este movimento de rotação axial, como se vê de *AE*, dá origem a uma superfície cónica com o seu vértice no centro do Terra e a sua base num círculo paralelo ao equador.

Também no ponto oposto, *C*, tudo acontece da mesma forma, mas em sentido contrário. Assim é evidente como os dois movimentos, isto é, os movimentos do centro e em inclinação, combinando-se, fazem com que o eixo da Terra se mantenha na mesma direcção e numa posição semelhante; deste modo tudo concorre para que estes fenómenos apareçam como movimentos do Sol. Ora nós dissemos que a rotação anual do centro e da inclinação eram quase iguais porque se fossem absolutamente iguais, os pontos dos equinócios, dos soltícios e a obliquidade da eclíptica não poderiam fazer qualquer desvio em relação à esfera das estrelas fixas. Como, porém, a diferença é ligeira, só se tornou notada à medida que cresceu com o tempo. Na verdade, desde Ptolomeu até o nosso tempo a precessão dos equinócios atinge quase 21°. Por este motivo, alguns julgaram que também a esfera das estrelas fixas se movia e por isso propuseram uma nona esfera, mais acima. Como se isto não bastasse, acrescentam agora os mais modernos uma décima. Contudo, estão muito longe de atingir o objectivo que esperamos alcançar com o movimento da Terra. Dele nos serviremos como um princípio e uma hipótese na demonstração dos outros movimentos.

[Copérnico planeou originariamente incluir aqui um pouco mais de que duas folhas caligrafadas, que ele mais tarde retirou do seu autógrafo. Este material retirado, que não foi impresso nas quatro primeiras edições de *De Revolutionibus* (1543, 1566, 1617, 1854), foi incorporado naquelas publicadas depois da recuperação do autógrafo de Copérnico (1773, 1949, 1972), é como segue:]

Admito que os movimentos do Sol e da Lua podem ser demonstrados, como o da Terra, que é estacionário. Isto é, contudo, menos adequado para os restantes planetas. Filolau acreditou no movimento da Terra por estas e similares razões. Isto é plausível porque Aristarco de Samos sustentou também o mesmo ponto de vista, de acordo com algumas pessoas que não foram motivadas pela argumentação apresentada por Aristóteles, e rejeitada por ele. Mas apenas um espírito activo e em perseverante estudo poderia compreender estes temas. Eles eram por esse motivo desconhecidos para a maior parte dos filósofos do tempo, e Platão não ocultou o facto de que havia somente uns poucos que conheciam a fundo a teoria dos movimentos celestes. Mesmo se estes eram conhecidos para Filolau ou qualquer pitagórico, apesar disso não foram provavelmente transmitidos para a posteridade. Aconteceu que a escola pitagórica não entregou os segredos da filosofia para a publicação, nem os divulgou a toda a gente, confiando-os apenas a amigos leais e parentes, e passando-os assim de mão em mão. Como prova desse costume existe uma carta de Lísis para Hiparco. Devido às suas notáveis opiniões e para mostrar o valor que estava ligado à filosofia entre eles prórios, decidi inseri-la aqui, para acabar o primeiro livro com ela. O que se segue é, pois, uma cópia da carta, que eu traduzi do grego, como se pode ver.

«De Lísis para Hiparco, saudações.

Eu nunca teria acreditado que depois da morte de Pitágoras a sua irmandade de discípulos fosse dissolvida. Mas agora, que nós temos sido inesperadamente dispersados por aqui e por ali, como se o nosso barco tivesse sido destruído, é ainda um acto de piedade relembrar os seus ensinamentos proféticos e refrearmo-nos de comunicar os tesouros da filosofia àqueles que não tenham ao menos sonhado com a purificação da alma. Porque é indecente divulgar a toda a gente o que nós alcançámos com tão grande esforço, assim como os segredos das deusas eleusinas não devem ser revelados aos leigos.

Os criminosos de cada um destes dois delitos serão condenados da mesma maneira que os perversos e os impiedosos. Por outro lado, é merecedor de se considerar quanto tempo nós gastamos limpando as manchas que se agarram aos nossos corações até sermos receptivos aos seus ensinamentos, depois de decorrerem cinco anos. Os tintureiros, tendo limpo os tecidos, aplicam-lhe a sua tintura com um mordente para fixar a cor insolúvel e impedindo-os de desbotar facilmente. Aquele homem divino preparou os amantes da filosofia da mesma maneira, para evitar vir a ficar desapontado na esperança que tinha concebido a respeito dos talentos de cada um deles.

Não vendeu os seus ensinamentos por nenhum preço, e as armadilhas com as quais as mentes jovens estão enredadas por muitos anos dos sofistas não foram por ele repudiadas, porque eram desprovidas de valor. Pelo contrário, proclamou-as divinas e humanas.

No entanto, alguns imitadores do seu ensino, desempenharam o seu papel com grande aplicação e grande ruído. As suas instruções aos jovens seguiram desse modo um confuso e impróprio processo, fazendo dos seus auditores uns impertinentes e impetuosos. O resultado é como derramar pura água fresca num abismo cheio de imundície, visto que o esterco é agitado e a água é desperdiçada. Isto é o que acontece àqueles que ensinam e são ensinados desta maneira. Espessos, bosques escuros obstroem as mentes e os corações daqueles que não foram correctamente iniciados, e destroem completamente a suavidade dos seus espíritos e a sua moderação.

Estes bosques são infestados por todo o tipo de vícios que, florescendo, retardam o pensamento e evitam o seu desenvolvimento em qualquer sentido.

Como criadores dos intrometidos, nomearei principalmente o comodismo e a avareza que são ambas extremamente comuns. O comodismo dá origem ao incesto, à embriaguez, à violação, a prazeres perversos e a certos impulsos violentos que levam à morte e à destruição. De facto, a paixão inflamou muitas dessas pessoas a tal extremo que elas não respeitam as mães nem as suas filhas. Têm-nos levado muitas vezes até a entrarem em conflito com os seus advogados, países, governos e leis. Têm estendido armadilhas tais que elas lhes definem um limite para a punição final. A cobiça, por outro lado, cria mutilações, assassínios, assaltos a templos, envenenamentos e outras descendências deste tipo. Os covis nesses bosques, onde estes ímpetos se escondem, têm de ser por esse motivo exterminados pelo fogo, e feita justiça com toda a nossa força. Quando nós descobrimos a razão natural liberta destes desejos, implantaremos então uma excelente e produtiva seara.

Também tu, Hiparco, aprende estas leis com não menor zelo. Mas, meu bom homem, pouca atenção lhes tens dado depois de teres experimentado a luxúrica siciliana, pela qual não devias ter abandonado nada. Muita gente diz até que tu andas a ensinar filosofia publicamente. Esta prática foi proibida por Pitágoras, que deixou em testamento as suas notas a sua filha Damo, com ordem de não as transmitir a ninguém, sem ser da família.

Se bem que Damo poderia tê-las vendido por muito dinheiro, recusou fazê-lo considerando [que isso era] miséria e [que] os conhecimentos de seu pai [eram] mais preciosos para ela do que ouro. Dizem também que quando Damo morreu, deixou a mesma obrigação à sua própria filha Bitale. Agora nós, do sexo forte, desobedecemos ao nosso professor e violamos o nosso juramento. Assim, se tu quiseres mudar de caminho, eu animo-te [para que o faças]. Mas se o não fizeres, o que me afligirá, então estarás morto.

[A carta anterior, cuja verdadeira natureza não foi sequer suspeitada por Copérnico, é o final do Livro I, como estava de início planeado. De acordo com aquele plano, o Livro II começava imediatamente depois da carta, com algum material introdutório, que foi mais tarde retirado. Este material retirado, não foi impresso nas quatro primeiras edições do *De Revolutionibus*, mas foi incluído nas que vieram a lume depois da recuperação do autógrafo de Copérnico; é o seguinte:]

Pelo que empreendi fazer, essas proposições de filosofia natural que parecem indispensáveis como princípios e hipóteses, nomeadamente, que o universo é esférico, imenso, e semelhante ao infinito, e que a esfera das estrelas fixas, que se comporta contendo todas as coisas, é estacionária, visto que todos ou outros corpos celestes têm uma deslocação circular, têm sido brevemente revistas.

Também que a Terra se move com certas revoluções, a partir das quais, como a pedra angular, me esforço por erguer a inteira ciência das estrelas.

A EXTENSÃO DAS CORDAS DE UM CÍRCULO

As demonstrações que vamos fazer em quase toda esta obra estão relacionadas com linhas rectas e círculos, com triângulos planos e esféricos. Embora muitos destes assuntos tenham sido tratados nos *Elementos* de Euclides, não tem, contudo, este livro aquilo de que mais se necessita aqui: um método pelo qual os lados se possam deduzir dos ângulos e estes daqueles. Com efeito, um ângulo não dá a medida da sua corda nem esta a daquele, mas sim o arco. Por isso se encontrou um método para saber qual é a corda de um arco, podendo assim saber-se qual o arco correspondente a determinado ângulo. Consequentemente, não parece irrelevante tratar dos lados e ângulos dos triângulos planos e esféricos. Ptolomeu falou deles em casos isolados. Se aqui desenvolvermos este tema em toda a sua extensão, compreender-se-á com menos dificuldade o que teremos de dizer mais tarde.

De harmonia com o consenso unânime dos Matemáticos, dividimos o círculo em 360°. Por outro lado os antigos aceitaram a divisão do diâmetro em 120 unidades. Contudo, mais recentemente, para evitar a complicação do uso de fracções na multiplicação e divisão de números referentes a cordas cujo comprimento é incomensurável com o diâmetro, e muitas vezes até os seus quadrados, alguns adoptaram 1 200 000 unidades, outros 2 000 000, e ainda outros estabeleceram um outro diâmetro para servir de medida, depois que foi aceite o uso de algarismos hindus ([1]). Estes alga-

([1]) Nicolau Copérnico refere-se evidentemente aos algarismos a que chamamos vulgarmente árabes.

rismos são superiores a quaisquer outros, gregos ou latinos, devido ao seu manejo extremamente simples, sendo muito vantajosos e próprios para toda a espécie de cálculos. Por esta razão também nós adoptámos uma divisão do diâmetro em 200 000 unidades como suficiente para excluir qualquer erro apreciável. Naturalmente, quando as quantidades não correspondem umas às outras, como num número inteiro a outro, é suficiente usar uma aproximação. É isto o que vamos explicar em seis teoremas e um problema, seguindo Ptolomeu de perto.

1.º TEOREMA

Dado o diâmetro de um círculo também são dados os lados do triângulo, do quadrado, do pentágono, do hexágono e do decágono inscritos num círculo. Com efeito, um raio é metade do diâmetro e é igual ao lado do hexágono. O quadrado do lado do triângulo é três vezes, e o do lado do quadrado é o dobro do quadrado do lado do hexágono, como está demonstrado nos *Elementos* de Euclides. Assim se o lado do hexágono contém 100 000 unidades, o do quadrado 141 422 e o do triângulo 173 205. Seja então o lado do hexágono *AB* e dividamo-lo no ponto *C*, na média e extrema razão como se diz no problema 1 do livro II de Euclides ou na 10.ª proposição do livro VI. Seja o segmento maior *CB* ao qual se deve juntar o segmento igual *BD*. Assim toda a linha *ABD* ficará dividida na razão média e extrema e a parte menor que lhe foi acrescentada será o lado de um decágono inscrito no círculo, no qual *AB* é o lado do hexágono inscrito. Resulta isto das proposições 5.ª e 9.ª do livro XIII de Euclides. Agora chega-se a *BD* do modo seguinte. Divida-se *AB* em *E*. Pela 3.ª proposição do mesmo livro de Euclides é manifesto que o quadrado de *EBD* é cinco vezes o quadrado de *EB*. Mas *EB* é igual a

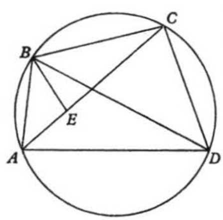
50 000 unidades de comprimento. Cinco vezes o seu quadrado é igual a *EBD* com 111 803 unidades. Se subtrairmos a esta quantidade as 50 000 unidades de *EB*, o resto são as 61 803 unidades de *BD*, o lado do decágono que procurávamos. Também o lado do pentágono cujo quadrado é a soma dos quadrados dos lados do hexágono e do decágono é igual a 117 557 unidades. De tudo isto se conclui que, dado o diâmetro de um círculo, também são dados os lados do triângulo, do quadrado, do pentágono, do hexágono e do decágono inscritos no círculo.

COROLÁRIO

É pois evidente que, quando é dada uma corda subtendendo qualquer arco, também é dada a corda correspondente a todo o restante círculo. O ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo recto. Ora nos triângulos rectângulos o quadrado do lado oposto ao ângulo recto, isto é, o diâmetro, é igual à soma dos quadrados dos lados que definem o ângulo recto. Demonstrou-se [1.º Teorema] que o lado de um decágono, que subtende um arco de 36º, tem 61 803 unidades, tendo o diâmetro 200 000. Por isso sabe-se que os restantes 144º do semicírculo correspondem a uma corda de 190 211 unidades, e quanto ao lado do pentágono, com 117 557 unidades, é a corda de um arco de 72º. A corda correspondente aos restantes 108º do semicírculo tem 161 803 unidades.

2.º TEOREMA

Se um quadrilátero estiver inscrito num círculo, o rectângulo [1] formado pelas suas diagonais é igual ao rectângulo formado pelos lados opostos



Seja *ABCD* o quadrilátero inscrito num círculo. Digo que o quadrilátero formado pelas diagonais *AC* e *DB* [produto $AB \times DB$] é igual aos quadriláteros que têm os lados [produtos $AB \times DC = AD \times BC$]. Consideremos o ângulo *ABE* igual ao ângulo *CBD*. Então o ângulo *ABD* *(ABE+EBD)* é igual ao ângulo *EBC* *(CBD+×EBD)*, pois que o ângulo *EBD* foi acrescentado a ambos [os ângulos iguais].

Também o ângulo *ACB* é igual ao ângulo *BDA* por corresponderem ao mesmo segmento de um círculo; portanto, os dois triângulos *BCE* e *BDA* são semelhantes e terão os seus lados proporcionais. Daqui, *BC* está para *BD* assim como *EC* está para *AD* e o produto $EC \times BD$ é igual ao produto $BC \times AD$. Mas os triângulos *ABE* e *CBD* são também semelhantes porque *ABE* é igual a *CBD* e os ângulos *BAC* e *BDC* são iguais por corresponderem ao mesmo arco do círculo. Portanto, *AB* está para *BD* assim como *AE* está para *CD*. O rectângulo *AB, CD* é igual ao rectângulo *AE, BD*. Mas já demonstrámos que o rectângulo *BD, AC* é igual ao rectângulo *AD, BC* mais o rectângulo *AB, CD*, que é o que se pretendia demonstrar.

3.º TEOREMA

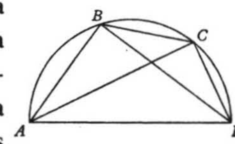
Dos teoremas precedentes se deduz que sendo dadas as cordas que subtendem a arcos desiguais de um semicírculo,

---

[1] Apesar de tudo, conservámos esta tradução que equivale em linguagem moderna a «o produto das suas diagonais».

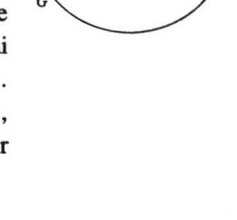
também é dada a corda que subtende a diferença entre os dois arcos.

No semicírculo *ABCD*, com o diâmetro *AD*, sejam *AB* e *AC* as cordas dos arcos desiguais. Nós pretendemos achar a corda *BC*. Ora, segundo o que acima dissemos, [Teorema 1.º, Corolário] são dadas as cordas *BD* e *CD*, que subtendem aos restantes arcos do semicírculo. Com elas se forma no semicírculo o quadrilátero *ABCD*. São dadas as suas diagonais *AC* e *BD* juntamente com os três lados, *AB*, *AD*, e *CD*. Neste quadrilátero o rectângulo formado por *AC* e *BD* é igual à soma dos rectângulos formados por *AB*, *CD*, e por *AD*, *BC* [2.º Teorema]. Portanto, se subtrairmos o rectângulo formado por *AB*, *CD*, do rectângulo formado por *AC*, *BD*, o resto é o rectângulo formado por *AD*, *BC*. Por isso, se dividirmos por *AD*, tanto quanto possível, acha-se o comprimento da corda *BC* que era o que procurávamos. Assim, visto que segundo os teoremas anteriores são dados, por exemplo, os lados do pentágono e do hexágono, também é dada a corda correspondente aos 12°, que é a diferença entre eles [72.º-60.º] como tendo 20 905 unidades, relativamente às do diâmetro.



4.º TEOREMA

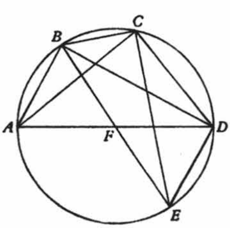
Dada a corda que subtende um arco, é igualmente dada a corda correspondente a metade desse arco.



Descrevamos o círculo *ABC* e seja *AC* o seu diâmetro e *BC* o arco dado com a corda que subtende. Do centro *E* tracemos uma recta *EF* que intersecte *BC* segundo um ângulo recto. Ora, segundo a 3.ª proposição do Livro III de Euclides, *EF* bissecta *BC* em *F* e o seu prolongamento vai bissectar o arco em *D*. Sejam *AB* e *BD* também cordas. Visto que os triângulos *ABC* e *EFC* são rectângulos e têm, além disso, um ângulo comum *ECF*, são semelhantes. Por isso, como *CF* é igual a *BFC*, *EF* é igual a *AB*. Mas *AB*, a corda do arco suplementar do semicírculo, é igualmente dada; assim, *EF* é dada, bem como *DF* por ser o resto da metade do diâmetro. Completemos *DF* para termos *DEG*, e acrescentemos *BG*. Assim, no triângulo *BDG*, a perpendicular traçada do ângulo recto, *B*, para a base é *BF*. Por conseguinte, o rectângulo formado por *GD*, *DF* é igual ao quadrado de *BD*. Assim *BD* é dada como corda correspondente a metade do arco *BDC*. Como a corda correspondente a 12° já foi dada, também é dada a corda correspondente a 6°, com 10 467 unidades; a 3° com 5 235 unidades; a $1\,^1/_2$ com 2 618 unidades e a $^3/_4{}^\circ$ com 1 309 unidades.

5.º TEOREMA

Por outro lado, [se são] dadas as cordas subtendidas por dois arcos, é dada também a corda correspondente ao arco resultante da soma dos dois.



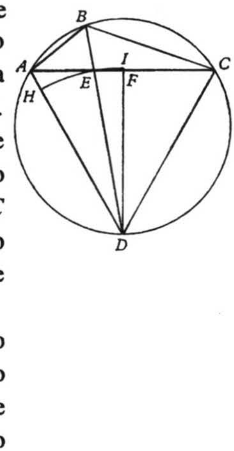
Sejam as cordas dadas *AB* e *BC*. Digo que a corda do arco *ABC*, soma dos dois, também é dada. Porque, se os diâmetros *AFD* e *BFE* forem traçados assim como as cordas *BD* e *CE*, estas cordas são dadas de acordo com o que se disse [1.º Teorema, Corolário], pois *AB* e *BC* são dadas e *DE* é igual a *AB*. Juntemos *CD*, completando o quadrilátero *BCDE*. As suas diagonais *BD* e *CE*, bem como os três lados, *BC*, *DE* e *BE* também são dados. O lado restante, *CD*, também será dado segundo o 2.º teorema. De modo análogo, a corda *AC* [é dada] como corda subtendendo ao arco suplementar do semicírculo, tal como a corda correspondente a todo o arco *ABC*, soma dos dois arcos. Era isto o que se pretendia.

Mas, embora se tenham achado, atrás, as cordas correspondentes aos arcos de 3.º, $1\,^1/_2{}^\circ$ e $^3/_4{}^\circ$ e qualquer pessoa possa construir, nestes intervalos, uma tabela com relações muito precisas, contudo, se a tabela continuar na escala de um grau e se juntarem uns aos outros, ou na escala de $^1/_2°$ ou em qualquer outra, haverá dúvidas justificadas quanto às cordas dos três arcos, pois nos faltam relações gráficas para os determinar.

Não obstante não há motivo para não alcançarmos este resultado por outros meios, sem erro sensível e com diferença muito pequena do seu valor teórico. Também Ptolomeu [*Almagesto*, I, 10], investigou acerca das cordas correspondentes a arcos de 1° e de $^1/_2°$ grau, recordando-nos primeiramente o seguinte.

6.° TEOREMA

A razão entre dois arcos é maior do que a razão entre a corda do maior e a do menor.



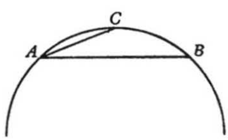
Num círculo, sejam *AB* e *BC* dois arcos desiguais adjacentes e *BC* o maior. Digo que a razão entre os arcos *BC* e *AB* é maior do que a razão entre as cordas *BC* e *AB*. Seja o ângulo *B*, definido por estas cordas, bissectado pela recta *BD*, e tracemos *AC* de modo a intersectar *BD* no ponto *E*. Juntemos igualmente *AD* e *CD*, que são iguais porque subtendem arcos iguais. Assim, uma vez que no triângulo *ABC*, a recta que bissecta o ângulo também intersecta *AC* em *E*, os segmentos da base *EC* e *AE* estarão um para o outro como *BC* está para *AB;* e como *BC* é maior do que *AB*, também *EC* é maior do que *EA*.

Tracemos *DF* perpendicular a *AC*. *DF* bissectará *AC* no ponto *F* que se encontrará necessariamente no segmento maior *EC*. E uma vez que num triângulo o ângulo maior se opõe ao lado maior, no triângulo *DEF* o lado *DE* é maior do que *DF* e *AD* é maior que *DE*. Assim, se com o centro em *D* e o raio *DE*, descrevermos um arco, ele intersectará

AD e passará para além de *DF*. Ele virá intersectar *AD* em *HI;* prolonguemo-lo até encontrar a linha recta *DFI*. Ora, o sector circular *EDI* é maior do que o triângulo *EDF*. Mas o triângulo *DEA* é maior do que o sector circular *DEH*. Assim, a razão entre o triângulo *DEF* e o triângulo *DEA* é menor do que a razão entre os sectores circulares *DEI* e *DEH*. Mas os sectores circulares são proporcionais aos seus arcos ou aos ângulos ao centro, e os triângulos que têm o mesmo vértice são proporcionais às suas bases. Daqui se conclui que a razão entre os ângulos *EDF* e *ADE* é maior do que a razão entre as bases. Por conseguinte, por adição, a razão entre os ângulos *FDA* e *ADE* é maior do que a razão entre *AF* e *AE;* e do mesmo modo a razão entre *CDA* e *ADE* é maior do que a razão entre *AC* e *AE*. E por subtracção, *CDE* e *EDA* estão entre si numa razão maior do que a existente entre *CE* e *EA*.

Mas o ângulo *CDE* está para o ângulo *EDA* assim como o arco *CB* está para o arco *AB*, e a base *CE* está para a base *AE* assim como a corda *CB* está para a corda *AB*. Consequentemente o arco *CB* está para o arco *AB* numa razão maior do que a corda *BC* está para a corda *AB*.

PROBLEMA:



Um arco é sempre maior do que a corda por si subtendida, porquè uma linha recta é a linha mais curta entre dois pontos. Mas esta desigualdade tende para a igualdade quando se passa das secções maiores de um círculo para as mais pequenas. Assim, finalmente, quando a corda tocar o círculo, unem-se numa só a linha recta e a curva. Naturalmente, mesmo antes disso, já não deve haver diferença perceptível entre elas. Seja, por exemplo, *AB* um arco de 3° e *AC* um arco de 1 $^1/_2$°. Demonstrámos que o arco *AB* tem 5 235 unidades, tendo o diâmetro 200 000 e [a corda subtendida] *AC* [tem] 2 618. Assim, embora o arco *AB* seja igual ao dobro do arco *AC*, a corda *AB* é menor do que o dobro da corda *AC*, a qual tem apenas uma unidade mais do que 2 617. Mas se considerarmos *AB* um ângulo de 1° e *AC* de $^3/_4$°, teremos a corda *AB* igual a 2 618 e *AC* igual a 1309. Embora esta devesse ser maior do que a metade da corda *AB*, não parece diferir desta metade, e as razões dos arcos e a das cordas parecem ser agora as mesmas. Ora, desde que chegámos a um ponto em que a diferença entre a linha recta e a curva escapa completamente à nossa observação, como se elas se tivessem transformado numa linha única, não há dúvida que as cordas do arco de 1° e dos arcos das restantes fracções de 1° estão em proporção com as 1 309 unidades da corda do arco de $^3/_4$°; de modo que acrescentando $^3/_4$° a $^1/_4$°, teremos uma corda correspondente a 1°, com 1 745 unidades, a $^3/_4$ com 872$^1/_2$ unidades, a $^3/_4$° com aproximadamente 582 unidades. Contudo, penso que será suficiente indicar na Tabela simplesmente as metades das cordas correspondentes ao dobro dos arcos, pois com esta simplificação incluiremos num quadrante o que teria de ser incluído em todo um semicírculo. Isto é particularmente apropriado porque as metades das cordas são mais frequentemente utilizadas nas demonstrações e cálculos do que as cordas inteiras.

Construímos uma Tabela na escala ascendente de $^1/_6$ e com três colunas: na primeira estão os graus ou partes de um arco e sextas partes de um grau; a segunda tem o valor numérico da metade da corda correspondente ao dobro do arco; a terceira contém as diferenças destes valores numéricos relativos a cada grau. Estas diferenças permitem a interpolação de quantidades proporcionais correspondentes a cada minuto de grau. Eis a Tabela:

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
0	10	291	291	6	10	10742	289
0	20	582		6	20	11031	
0	30	873		6	30	11320	
0	40	1163		6	40	11609	
0	50	1454		6	50	11898	
1	0	1745		7	0	12187	
1	10	2036		7	10	12476	
1	20	2327		7	20	12764	288
1	30	2617		7	30	13053	
1	40	2908		7	40	13341	
1	50	3199		7	50	13629	
2	0	3490		8	0	13917	
2	10	3781		8	10	14205	
2	20	4071		8	20	14493	
2	30	4362		8	30	14781	
2	40	4653		8	40	15069	
2	50	4943	290	8	50	15356	287
3	0	5234		9	0	15643	
3	10	5524		9	10	15931	
3	20	5814		9	20	16218	
3	30	6105		9	30	16505	
3	40	6395		9	40	16792	
3	50	6685		9	50	17078	
4	0	6975		10	0	17365	
4	10	7265		10	10	17651	286
4	20	7555		10	20	17937	
4	30	7845		10	30	18223	
4	40	8135		10	40	18509	
4	50	8425		10	50	18795	
5	0	8715		11	0	19081	
5	10	9005		11	10	19366	285
5	20	9295		11	20	19652	
5	30	9585		11	30	19937	
5	40	9874		11	40	20222	
5	50	10164	289	11	50	20507	
6	0	10453		12	0	20791	

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
12	10	21076	284	18	10	31178	276
12	20	21360		18	20	31454	
12	30	21644		18	30	31730	
12	40	21928		18	40	32006	
12	50	22212		18	50	32282	275
13	0	22495	283	19	0	32557	
13	10	22778		19	10	32832	
13	20	23062		19	20	33106	
13	30	23344		19	30	33381	274
13	40	23627		19	40	33655	
13	50	23910	282	19	50	33929	
14	0	24192		20	0	34202	
14	10	24474		20	10	34475	273
14	20	24756		20	20	34748	
14	30	25038	281	20	30	35021	
14	40	25319		20	40	35293	272
14	50	25601		20	50	35565	
15	0	25882		21	0	35837	
15	10	26163		21	10	36108	271
15	20	26443	280	21	20	36379	
15	30	26724		21	30	36650	
15	40	27004		21	40	36920	270
15	50	27284		21	50	37190	
16	0	27564	279	22	0	37460	
16	10	27843		22	10	37730	269
16	20	28122		22	20	37999	
16	30	28401		22	30	38268	
16	40	28680		22	40	38537	268
16	50	28959	278	22	50	38805	
17	0	29237		23	0	39073	
17	10	29515		23	10	39341	267
17	20	29793		23	20	39608	
17	30	30071	277	23	30	39875	
17	40	30348		23	40	40141	266
17	50	30625		23	50	40408	
18	0	30902		24	0	40674	

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
24	10	40939	265	30	10	50252	251
24	20	41204		30	20	50503	
24	30	41469		30	30	50754	250
24	40	41734	264	30	40	51004	
24	50	41998		30	50	51254	
25	0	42262		31	0	51504	249
25	10	42525	263	31	10	51753	
25	20	42788		31	20	52002	248
25	30	43051		31	30	52250	
25	40	43313	262	31	40	52498	247
25	50	43575		31	50	52745	
26	0	43837		32	0	52992	246
26	10	44098	261	32	10	53238	
26	20	44359		32	20	53484	
26	30	44620	260	32	30	53730	245
26	40	44880		32	40	53975	
26	50	45140		32	50	54220	244
27	0	45399	259	33	0	54464	
27	10	45658		33	10	54708	243
27	20	45916	258	33	20	54951	
27	30	46175		33	30	55194	242
27	40	46433		33	40	55436	
27	50	46690	257	33	50	55678	241
28	0	46947		34	0	55919	
28	10	47204	256	34	10	56160	240
28	20	47460		34	20	56400	
28	30	47716	255	34	30	56641	239
28	40	47971		34	40	56880	
28	50	48226		34	50	57119	238
29	0	48481	254	35	0	57358	
29	10	48735		35	10	57596	
29	20	48989	253	35	20	57833	237
29	30	49242		35	30	58070	
29	40	49495	252	35	40	58307	236
29	50	49748		35	50	58543	
30	0	50000		36	0	58779	235

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
Gr.	Min.			Gr.	Min.		
36	10	59014	235	42	10	67129	215
36	20	59248	234	42	20	67344	
36	30	59482		42	30	67559	214
36	40	59716	233	42	40	67773	
36	50	59949		42	50	67987	213
37	0	60181	232	43	0	68200	212
37	10	60413		43	10	68412	
37	20	60645	231	43	20	68624	211
37	30	60876		43	30	68835	
37	40	61107	230	43	40	69046	210
37	50	61337		43	50	69256	
38	0	61566	229	44	0	69466	209
38	10	61795		44	10	69675	
38	20	62024		44	20	69883	208
38	30	62251	228	44	30	70091	207
38	40	62479		44	40	70298	
38	50	62706	227	44	50	70505	206
39	0	62932		45	0	70711	205
39	10	63158	226	45	10	70916	
39	20	63383		45	20	71121	204
39	30	63608	225	45	30	71325	
39	40	63832		45	40	71529	203
39	50	64056	224	45	50	71732	202
40	0	64279	223	46	0	71934	
40	10	64501	222	46	10	72136	201
40	20	64723		46	20	72337	200
40	30	64945	221	46	30	72537	
40	40	65166	220	46	40	72737	199
40	50	65386		46	50	72936	
41	0	65606	219	47	0	73135	198
41	10	65825		47	10	73333	197
41	20	66044	218	47	20	73531	
41	30	66262		47	30	73728	196
41	40	66480	217	47	40	73924	195
41	50	66697		47	50	74119	
42	0	66913	216	48	0	74314	194

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
Gr.	Min.			Gr.	Min.		
48	10	74508	194	54	10	81072	170
48	20	74702		54	20	81242	169
48	30	74896		54	30	81411	
48	40	75088	192	54	40	81580	168
48	50	75280	191	54	50	81748	167
49	0	75471	190	55	0	81915	
49	10	75661		55	10	82082	166
49	20	75851	189	55	20	82248	165
49	30	76040		55	30	82413	164
49	40	76229	188	55	40	82577	
49	50	76417	187	55	50	82741	163
50	0	76604		56	0	82904	162
50	10	76791	186	56	10	83066	
50	20	76977		56	20	83228	161
50	30	77162	185	56	30	83389	160
50	40	77347	184	56	40	83549	159
50	50	77531		56	50	83708	
51	0	77715	183	57	0	83867	158
51	10	77897	182	57	10	84025	157
51	20	78079		57	20	84182	
51	30	78261	181	57	30	84339	156
51	40	78442	180	57	40	84495	155
51	50	78622		57	50	84650	
52	0	78801	179	58	0	84805	154
52	10	78980	178	58	10	84959	153
52	20	79158		58	20	85112	152
52	30	79335	177	58	30	85264	
52	40	79512	176	58	40	85415	151
52	50	79688		58	50	85566	150
53	0	79864	175	59	0	85717	
53	10	80038	174	59	10	85866	149
53	20	80212		59	20	86015	148
53	30	80386	173	59	30	86163	147
53	40	80558	172	59	40	86310	
53	50	80730		59	50	86457	146
54	0	80902	171	60	0	86602	145

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
60	10	86747	144
60	20	86892	
60	30	87036	143
60	40	87178	142
60	50	87320	
61	0	87462	141
61	10	87603	140
61	20	87743	139
61	30	87882	
61	40	88020	138
61	50	88158	137
62	0	88295	
62	10	88431	136
62	20	88566	135
62	30	88701	134
62	40	88835	
62	50	88968	133
63	0	89101	132
63	10	89232	131
63	20	89363	
63	30	89493	130
63	40	89622	129
63	50	89751	128
64	0	89879	
64	10	90006	127
64	20	90133	126
64	30	90258	
64	40	90383	125
64	50	90507	124
65	0	90631	123
65	10	90753	122
65	20	90875	121
65	30	90996	
65	40	91116	120
65	50	91235	119
66	0	91354	118

Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
66	10	91472	118
66	20	91590	117
66	30	91706	116
66	40	91822	115
66	50	91936	114
67	0	92050	113
67	10	92164	
67	20	92276	112
67	30	92388	111
67	40	92499	110
67	50	92609	109
68	0	92718	
68	10	92827	108
68	20	92935	107
68	30	93042	106
68	40	93148	105
68	50	93253	
69	0	93358	104
69	10	93462	103
69	20	93565	102
69	30	93667	
69	40	93769	101
69	50	93870	100
70	0	93969	99
70	10	94068	98
70	20	94167	
70	30	94264	97
70	40	94361	96
70	50	94457	95
71	0	94552	94
71	10	94646	93
71	20	94739	
71	30	94832	92
71	40	94924	91
71	50	95015	90
72	0	95105	

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos Gr.	Arcos Min.	Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
72	10	95195	89	78	10	97875	59
72	20	95284	88	78	20	97934	58
72	30	95372	87	78	30	97992	
72	40	95459	86	78	40	98050	57
72	50	95545	85	78	50	98107	56
73	0	95630		79	0	98163	55
73	10	95715	84	79	10	98218	54
73	20	95799	83	79	20	98272	
73	30	95882	82	79	30	98325	53
73	40	95964	81	79	40	98378	52
73	50	96045		79	50	98430	51
74	0	96126	80	80	0	98481	50
74	10	96206	79	80	10	98531	49
74	20	96285	78	80	20	98580	
74	30	96363	77	80	30	98629	48
74	40	96440		80	40	98676	47
74	50	96517	76	80	50	98723	46
75	0	96592	75	81	0	98769	45
75	10	96667	74	81	10	98814	44
75	20	96742	73	81	20	98858	43
75	30	96815	72	81	30	98902	42
75	40	96887		81	40	98944	
75	50	96959	71	81	50	98986	41
76	0	97030	70	82	0	99027	40
76	10	97099	69	82	10	99067	39
76	20	97169	68	82	20	99106	38
76	30	97237		82	30	99144	
76	40	97304	67	82	40	99182	37
76	50	97371	66	82	50	99219	36
77	0	97437	65	83	0	99255	35
77	10	97502	64	83	10	99290	34
77	20	97566	63	83	20	99324	33
77	30	97630		83	30	99357	
77	40	97692	62	83	40	99389	32
77	50	97754	61	83	50	99421	31
78	0	97815	60	84	0	99452	30

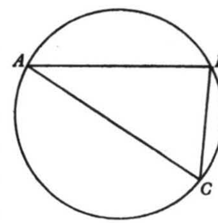
TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
Gr.	Min.			Gr.	Min.		
84	10	99482	29	87	10	99878	14
84	20	99511	28	87	20	99892	13
84	30	99539	27	87	30	99905	12
84	40	99567		87	40	99917	
84	50	99594	26	87	50	99928	11
85	0	99620	25	88	0	99939	10
85	10	99644	24	88	10	99949	9
85	20	99668	23	88	20	99958	8
85	30	99692	22	88	30	99966	7
85	40	99714		88	40	99973	6
85	50	99736	21	88	50	99979	
86	0	99756	20	89	0	99985	5
86	10	99776	19	89	10	99989	4
86	20	99795	18	89	20	99993	3
86	30	99813		89	30	99996	2
86	40	99830	17	89	40	99998	1
86	50	99847	16	89	50	99999	0
87	0	99863	15	90	0	100000	0

OS LADOS E ÂNGULOS DOS TRIÂNGULOS PLANOS E RECTILÍNEOS

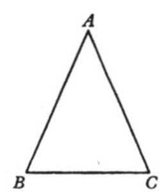
I

Dados os ângulos de um triângulo, estão dados também os seus lados.



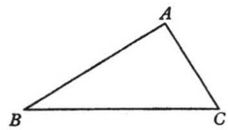
Seja *ABC* um triângulo. Circunscrevamos-lhe um círculo, como está exemplificado no 5.º problema do IV Livro de Euclides. Assim, os arcos *AB*, *BC* e *CA* serão também dados num sistema em que 180° equivalem a dois ângulos rectos. Mas sendo dados os arcos, também são dados os lados de um triângulo inscrito num círculo, de acordo com a Tabela acima apresentada, em unidades iguais àquela em que atribuímos 200 000 ao diâmetro.

II



Mas se dois lados de um triângulo e um ângulo são dados, serão também conhecidos o lado restante e os outros ângulos. Na verdade, ou os lados dados são iguais ou desiguais e o ângulo dado é recto, agudo ou obtuso. Os lados dados definem ou não o ângulo dado. Suponhamos então que no triângulo *ABC* os dois lados *AB* e *AC* são dados como iguais e que é dado o ângulo *A* definido por eles. Os ângulos restantes, adjacentes à base *BC*, são iguais e são também dados como metades da diferença entre *A* e dois ângulos rectos. Se um dos ângulos da base for também dado inicialmente, também é dado o seu igual assim como, a partir destes, aquele que somado com eles faz dois ângulos rectos. Mas quando os ângulos de um triângulo são dados, igualmente são dados os lados, e a base *BC* é dada pela Tabela, num sistema de unidades em que os raios têm 100 000 ou o diâmetro 200 000.

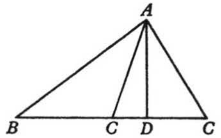
III



Mas se o ângulo *BAC* é um ângulo recto e é definido pelos dois lados dados, segue-se o mesmo resultado.

Na verdade, é evidente que os quadrados de *AB* e *AC* têm uma soma igual ao quadrado da base *BC*; além disso, conhecido o comprimento de *BC* é conhecida também a proporção entre os dois lados. Mas o segmento de um círculo em que está inscrito um triângulo rectângulo é um semicírculo, cuja base *BC* será o diâmetro. Ora, se *BC* tem 200 000 unidades, *AB* e *AC* serão dados como lados opostos dos ângulos restantes *B* e *C*. O seu lugar na Tabela de acordo com isto, dará o seu valor em graus, num sistema em que 180° equivalham a dois ângulos rectos. O mesmo acontecerá se *BC* for dado juntamente com um dos lados que definem o ângulo recto. Penso que isto fica claro.

IV



Se forem dados o ângulo *ABC* e os lados que o definem, *AB* e *BC*, tracemos a perpendicular *AD*, do ponto *A* para *BC*, de modo que esta seja prolongada ou não, consoante a perpendicular cai dentro ou fora do triângulo. Com ela se formarão dois triângulos rectângulos *ABD* e *ADC*. Os ângulos de *ABD* são dados, pois *D* é um ângulo recto e *B* é dado por hipótese. Ora *AD* e *BD* considerados como lados opostos aos ângulos *A* e *B* são dados pela Tabela em unidades de um sistema em que *AB*, como diâmetro de um círculo, tem 200 000 unidades. E, no mesmo sistema de unidades em que o comprimento de *AB* foi dado, *AD* e *BD* são igualmente dados, assim como *CD* que é a diferença entre *BC* e *BD*. No triângulo rectângulo *ADC*, portanto, sendo dados os lados *AD* e *CD*, o lado pedido *AC* e o ângulo *ACD* são igualmente dados, segundo a demonstração precedente.

V

Será exactamente o mesmo se o ângulo *B* for obtuso, porque a perpendicular traçada do ponto *A* para a linha recta, *BC*, dá origem ao triângulo *ABD* cujos ângulos são dados. Com efeito, *ABD* é dado como ângulo suplementar do ângulo *ABC* e *D* é um ângulo recto. Portanto, *BD* e *AD* são dados num sistema de unidades em que *AB* tem 200 000. Como a razão entre *BA* e *BC* é dada, *BC* também é dada nas mesmas unidades que *BD*, assim como toda a linha *CBD*. Por conseguinte, também no triângulo rectângulo *ADC*, visto os dois lados serem dados, o lado procurado *AC* é dado, assim como o ângulo *BAC* juntamente com o restante ângulo *ACB*, que eram pedidos.

VI

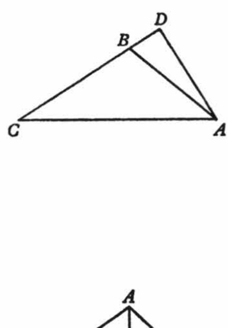
Seja agora um dos dois lados dados oposto ao ângulo dado *B*.

Seja este lado oposto *AC* e o outro lado dado *AB*. Ora *AC* é dado pela Tabela em unidades de um sistema em que o diâmetro do círculo onde está inscrito o triângulo *ABC* vale 200 000. Pela razão dada entre *AC* e *AB*, *AB* é dado no mesmo sistema de unidades. Ora o ângulo *ACB* é dado pela Tabela juntamente com o ângulo restante *BAC*. A partir deste também é dada a corda *CB*. Quando esta razão é dada, o comprimento dos lados é dado em qualquer sistema de unidades.

VII

Se todos os lados de um triângulo forem dados, são dados os seus ângulos.

Seguramente o caso de um tiângulo equilátero é suficientemente conhecido para que seja necessário dizer que cada um dos seus ângulos é um terço de dois ângulos rectos. Nos triângulos isósceles também é evidente que os lados iguais estão para o terceiro como metade do diâmetro está para a corda subtendida pelo arco. Por meio do arco, o ângulo definido pelos lados iguais é dado pela Tabela, no sistema em que 360° são iguais a quatro ângulos rectos. Os outros ângulos na base são também dados, como metades da diferença entre o ângulo definido pelos dois lados iguais e dois ângulos rectos.



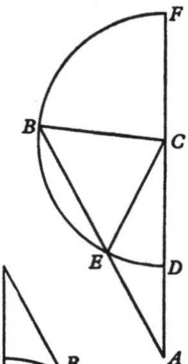
Falta agora, portanto, fazer a demonstração em relação aos triângulos escalenos, que do mesmo modo decomporemos em triângulos rectângulos. Seja, pois, *ABC* o triângulo escaleno cujos lados são dados. Tracemos a perpendicular *AD* sobre o seu lado maior, *BC*. Ora a 13.ª proposição do II Livro de Euclides recorda-nos que o quadrado do lado *AB*, oposto a um ângulo agudo, é menor do que os quadrados dos outros dois lados, sendo a diferença duas vezes o produto de *BC* por *BD*.

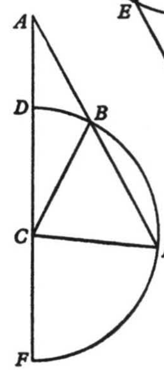
Na verdade *C* tem de ser um ângulo agudo porque senão *AB* seria o lado de maior extensão, o que é contrário à hipótese, como se pode ver pela 17.ª proposição do I Livro de Euclides e pelos dois teoremas seguintes. De harmonia com isto são dados *BD* e *DC*, sendo *ABD* e *ADB* triângulos rectângulos cujos lados e ângulos também são dados, como se tem repetido muitas vezes. Isto nos permite também conhecer os ângulos do triângulo *ABC*, como pretendemos.

Segundo outra via de demonstração, talvez mais cómoda, o penúltimo teorema do III Livro de Euclides mostra-nos o mesmo resultado. Sendo *BC* o lado menor, com o centro em

C e o raio o mesmo *BC*, descrevamos o círculo que intersectará os outros dois lados ou um deles. Que ele intersecte, então, *AB* no ponto *E*, e *AC* em *D*, prolongando a recta *ADC* até ao ponto *F*, para completar o diâmetro *DCF*. Esta construção torna evidente que, de harmonia com o teorema de Euclides citado, o rectângulo formado por *FA* e *AD* [$= FA \times AD$] é igual ao rectângulo formado po *BA* e *AE* [$= BA \times AE$], uma vez que ambos são iguais ao quadrado da tangente ao círculo, que parte de *A*.

Ora nós sabemos já quanto vale *AF*, visto que todos os seus segmentos são dados, designadamente *CF* e *CD*, pois são iguais a *BC* por serem raios do mesmo círculo. *AD* é a diferença entre *CA* e *CD*. Consequentemente o rectângulo formado por *BA* e *AE* [$= BA \times AE$] também é dado, assim como o comprimento de *AE* juntamente com o restante, *BE*, que é corda do arco *BE*. Juntando *EC*, teremos o triângulo isósceles *BCE* com lados dados. Assim o ângulo *EBC* é dado e no triângulo *ABC* os ângulos restantes em *C* e *A* também serão conhecidos a partir do que se acaba de dizer. Suponhamos, porém, que o círculo não intersecta *AB* como na 2.ª figura, na qual *AB* cai sobre a curva da circunferência. No entanto, *BE* será dado. Além disso no triângulo isósceles *BCE* é dado o ângulo *CBE* e também o seu ângulo suplementar *ABC*. Seguindo exactamente o mesmo raciocínio anterior são dados os ângulos restantes.





Dissemos o suficiente sobre os triângulos planos de que se compõe grande parte da Geodesia. Passemos agora aos triângulos esféricos.

TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Por triângulo convexo entendemos aqui aquele que é limitado por uma superfície esférica e é definido por arcos de três círculos máximos. Ora o lado de um ângulo, assim como a diferença entre os ângulos, é medida num arco do círculo máximo que é descrito com o ponto do ângulo de intersecção está para quatro ângulos rectos que, como se quadrantes que incluem o ângulo. Na verdade, o arco assim definido está para toda a circunferência como o ângulo de intersecção está para quatro ângulos rectos que, como se disse, contêm 360 graus iguais.

I

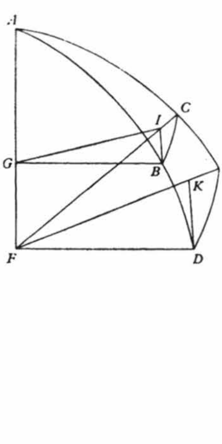
Se há três arcos de círculos máximos de uma esfera, dois dos quais reunidos são maiores do que o terceiro, é óbvio que um triângulo esférico pode ser formado por eles. Porque a afirmação aqui proposta acerca de arcos está demonstrada na 23.ª proposição do XI Livro de Euclides, referente aos ângulos, e uma vez que a razão dos ângulos e dos arcos é a mesma, e os círculos são círculos máximos que passam pelo centro da esfera, é evidente que os três sectores dos círculos dos quais são arcos constituem um ângulo sólido ao centro da esfera. Por conseguinte o teorema é óbvio.

II

Qualquer arco de um triângulo tem de ser menor do que um semicírculo, porque um semicírculo não faz ângulo ao centro mas passa por ele em linha recta. Por outro lado, os dois ângulos restantes a que pertencem os arcos não podem determinar um ângulo sólido ao centro e, portanto, também não um triângulo esférico. Penso que esta foi a razão por que Ptolomeu, na sua exposição sobre esta categoria de triângulos, particularmente ao discutir a figura de um sector esférico, declara que os arcos considerados não podem ser maiores do que um semicírculo [*Almagesto*, I, 13].

III

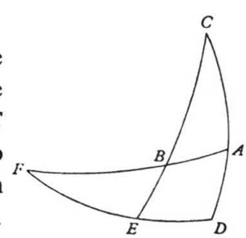
Nos triângulos esféricos que têm um ângulo recto, a corda correspondente ao dobro do lado oposto ao ângulo recto está para a corda subtendida pelo dobro de um dos lados que definem o ângulo recto é igual à razão do diâmetro da esfera para a corda subtendida pelo dobro do ângulo definido pelo lado restante e pela hipotenusa, num círculo máximo da esfera. Assim, seja *ABC* um triângulo esférico no qual *C* é um ângulo recto. Digo que a corda subtendida pelo dobro de *AB* está para a corda subtendida pelo dobro de *BC* como o diâmetro da esfera está para a corda subtendida pelo dobro do ângulo *BAC*, num círculo máximo. Com *A* por pólo, descrevemos um arco de um círculo máximo *DE* e completemos os quadrantes *ABD* e *ACE*. Do centro da esfera, *F*, tracemos as linhas de intersecção dos círculos: *FA*, de *ABD* e *ACE*; *FE*, de *ACE* e *DE*; *FD* de *ABD* e *DE*; e também *FC* dos círculos *AC* e *BC*. Depois tracemos *BG* perpendicular a *FA*; *BI* a *FC*; e *DK* a *FE*.Unamos *G* com *I*.



Uma vez que se um dos círculos intersecta um outro que passa pelos seus pólos, intersecta-o em ângulos rectos, o ângulo *AED* será um ângulo recto como o é *ACB*, por hipótese. Os planos *EDF* e *BCF* estão ambos em ângulos rectos com *AEF*. Assim, se uma linha recta for traçada no plano referido a partir do ponto *K*, definindo ângulos rectos com a linha de intersecção *FKE*, formará também um ângulo recto com *KD*, segundo a definição dos planos perpendiculares entre si. Consequentemente, de harmonia com a 4.ª proposição do XI Livro de Euclides, *KD* define também ângulos rectos com *AEF*. De modo semelhante, *BI* é perpendicular ao mesmo plano e, por conseguinte, *DK* e *BI* são paralelas de acordo com a 6.ª proposição do mesmo Livro. Mas *GB* é também paralela a *FD*, porque *FGB* e *GFD* são ângulos rectos, e pela 10.ª proposição do XI Livro de Euclides, o ângulo *FDK* é igual a *GBI*. Mas o ângulo *FKD* é um ângulo recto como *GIB*, de harmonia com a definição de linha perpendicular. Assim, são lados proporcionais de triângulos semelhantes, e *DF* está para *BG* assim como *DK* está para *BI*. Mas *BI* é metade da corda correspondente (1) ao dobro do arco *CB*, visto que determina em ângulos rectos com o raio *FC*, e pela mesma razão *BG* é igual a metade da corda correspondente ao dobro do lado *BA*. *DK* é igual a metade da corda correspondente ao dobro do lado *DE* ou igual ao dobro do ângulo em *A*. *DF* é igual a metade do diâmetro da esfera. É pois evidente que a corda correspondente ao dobro de *AB* está para a corda correspondente ao dobro de *BC*, como o diâmetro está para a corda correspondente ao dobro do ângulo em *A*, ou igual ao dobro do arco *DE* por ele definido. A demonstração deste teorema há-de mostrar-se útil.

IV

Em qualquer triângulo que tem um ângulo recto, se forem dados outro ângulo e qualquer lado, o ângulo restante e os lados restantes também serão dados. Assim, seja *ABC* um triângulo com um ângulo recto em *A*, e seja dado também um dos outros ângulos, por exemplo, o ângulo em *B*. Quanto ao lado dado, distinguimos três casos possíveis.



(1) Daqui em diante adoptamos, como em latim, «corda correspondente a um arco», em vez da expressão «corda subtendida por um arco».

Pode ser adjacente aos ângulos dados, como é *AB*; adjacente apenas ao ângulo recto, como é *AC*; ou oposto ao ângulo recto, como é *BC*. Então, seja em primeiro lugar *AB* o lado dado. Como o pólo em *C*, descrevamos o arco de um círculo máximo, *DE*. Completemos os quadrantes *CAD* e *CBE*. Tracemos *AB* e *DE*, até que se intersecta no ponto *F*. Então, por sua vez, haverá também um pólo de *CAD*, em *F*, porquanto os ângulos em *A* e *D* são ângulos rectos e porque, se os círculos máximos de uma esfera se intersectam em ângulos rectos, então eles bissectam-se, e cada um passa pelo pólo do outro; assim, *ABF* e *DEF* são quadrantes de círculo.

Desde que *AB* seja dado também *BF* é dado como parte restante do quadrante; o ângulo *EBF* é igual ao ângulo verticalmente oposto *ABC*, que é dado. Mas de harmonia com a demonstração anterior, a corda correspondente ao dobro do arco *EF*, é igual à razão do diâmetro da esfera para a corda correspondente ao dobro do ângulo *EBF*. Mas já são conhecidos três destes valores: o diâmetro da esfera, o dobro de *BF*, e o dobro do ângulo *EBF*, ou as suas metades. Por isso, segundo a 16.ª proposição do VI Livro de Euclides, metade da corda correspondente ao dobro de *EF* também é dada, e, pela Tabela, o próprio arco *EF*, assim como *DE*, [que é] o resto do quadrante ou o ângulo procurado, *C*. Do mesmo modo, a corda correspondente ao dobro de *DE* está para a corda correspondente ao dobro de *EBC* está para a corda correspondente ao dobro de *CB*. Mas as três cordas, *DE*, *AB* e *EBC* como um quadrante, já são dadas. Portanto a quarta, a corda correspondente ao dobro de *CB*, também é dada, assim como o lado pedido, *CB*. Ora, a corda correspondente ao dobro do arco *CB* está para a corda correspondente ao dobro de *CA*, como a corda correspondente ao dobro de *BF* está para a corda correspondente ao dobro de *EF*, uma vez que ambas as razões são iguais à razão entre o diâmetro da esfera e a corda correspondente ao dobro do ângulo *CBA*. Ora as razões iguais a uma terceira são iguais entre si.

Portanto, sendo dados *BF*, *EF* e *CB* também é dado *CA*, que é o terceiro lado do triângulo *ABC*. Mas seja agora *AC* o lado dado. Tentemos encontrar os lados *AB* e *BC* juntamente como o ângulo desconhecido *C*. Assim, se invertermos o argumento, a corda correspondente ao dobro de *CA* está para a corda correspondente ao dobro de *CB* como para a corda correspondente ao dobro do ângulo *ABC* está para o diâmetro. Deste modo, é dado o lado *CB* bem como *AD* e *BE* como partes restantes dos quadrantes. Assim teremos que a corda correspondente ao dobro de *AD* está para a corda correspondente ao dobro de *BE* como a corda correspondente ao dobro *ABF*, que é o diâmetro, está para a corda correspondente ao dobro do arco *BF*. Por conseguinte é dado *BF* e o lado *AB*, a parte restante do quadrante. Segundo um cálculo semelhante ao anterior, a partir das cordas correspondentes ao dobro de *BC*, *AB* e *FBC*, é dada a corda correspondente ao dobro de *BC*, *AB* e *FBC*, é dada a corda correspondente ao dobro de *DE* ou o último ângulo, *C*. Além disso, se *BC* é dado, uma vez mais, como anteriormente, também serão dados *AC* assim como os restantes lados *AD* e *BE*. A partir deles, através das cordas e do diâmetro, como se afirmou várias vezes, são dados o arco *BF* e o lado que falta *AB*. Deste modo, segundo o teorema precedente, a partir de *BC*, *AB* e *CBE*, que são dados, obtém-se o arco *ED*, isto é, o ângulo pedido *C*. E assim pois, se no triângulo *ABC* são dados os dois ângulos *A* e *B*, sendo *A* um ângulo recto, juntamente com um dos três lados, são igualmente dados os outros dois lados. Q.E.D.

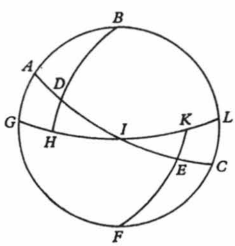
V

Se os ângulos de um triângulo são dados, sendo um deles um ângulo recto, são dados os lados.

Servimo-nos da figura anterior. Uma vez que é dado o ângulo *C*, é dado o arco *DE* assim como *EF*, parte que falta para quadrante do círculo. Ora *BEF* é um ângulo recto, porque *BE* é traçado a partir do pólo de *DEF;* além disso, o ângulo *EBF* é o ângulo verticalmente oposto de um ângulo dado. Assim, no triângulo *BEF*, que tem um ângulo recto e também dados um ângulo, *B*, e o lado *EF*, os seus ângulos e lados são dados, segundo o teorema precedente. Daqui se conclui que são dados *BF* assim como *AB*, a parte restante do quadrante. Do mesmo modo, no triângulo *ABC*, os lados restantes *AC* e *BC* são dados, como se mostrou anteriormente.

VI

Se na mesma esfera dois triângulos têm um ângulo recto e dois ângulos correspondentes bem como dois lados correspondentes iguais, quer estes todos sejam adjacentes aos ângulos iguais, quer sejam opostos a um desses ângulos, os correspondentes lados restantes também são iguais, bem como os restantes ângulos correspondentes. Seja *ABC* um hemisfério em que *ABD* e *CEF* são os dois triângulos a considerar. Suponhamos que *A* e *C* são ângulos rectos e que além disso, o ângulo *ADB* é igual a *CEF* e um lado a outro lado. Em primeiro lugar sejam os lados iguais adjacentes a ângulos iguais, isto é, *AD* igual a *CE*. Digo que o lado *AB* é também igual ao lado *CF* e *BD* a *EF*, assim como o ângulo restante *ABD* do primeiro triângulo é igual ao ângulo restante *CFE* do segundo. Assim, com pólos em *B* e *F*, descrevamos os quadrantes dos círculos máximos *GHI* e *IKL*. Tracem-se *CEI* e *ADI*, que devem intersectar-se no pólo do hemisfério que está no ponto *I*, pois que os ângulos em *A* e *C* são ângulos rectos e porque *GHI* e *CEI* passam pelos pólos do círculo *ABC*. Por conseguinte, visto que são dados como iguais os lados *AD* e *CE*, os restantes arcos *DI* e *IE* são iguais, o mesmo acontecendo com os ângulos *IDH* e *IEK*, porque são verticalmente opostos a ângulos considerados iguais.

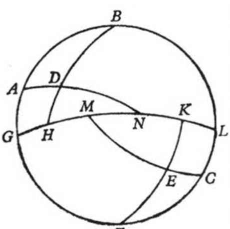


Os ângulos em *H* e *K* são ângulos rectos, e dado que as razões iguais a uma terceira são iguais entre si, a corda correspondente ao dobro de *ID* está para a corda correspondente ao dobro de *HI* assim como a corda correspondente ao dobro de *EI* está para a corda correspondente a *IK*. Com efeito, cada uma destas razões, segundo o 3.º teorema atrás mencionado, é igual à razão do diâmetro da esfera para a corda correspondente ao dobro do ângulo *IDH*, ou a corda igual correspondente ao dobro do ângulo *IEK*. Além disto, de acordo com a 14.ª proposição do V Livro dos *Elementos* de Euclides, assim como a corda correspondente ao dobro do arco *DI* é igual à corda correspondente ao dobro de *IE*, assim a corda correspondente ao dobro de *IK* é igual à corda correspondente ao dobro de *HI*. E como em círculos iguais, cordas iguais correspondem a arcos iguais, e fracções multiplicadas pelo mesmo factor mantêm a mesma razão, os arcos simples *IH* e *IK* serão iguais, o mesmo acontecendo com *GH* e *KL*, pois são os resultados das diferenças de *IH* e *IK* para um quadrante. Assim o ângulo *B* é igual ao ângulo *F*.

Por conseguinte, a corda correspondente ao dobro de *AD* está para a corda correspondente ao dobro de *BD* assim como a corda correspondente ao dobro de *EC* está para a corda correspondente ao dobro de *EF*. Na verdade, cada uma destas razões é igual à razão da corda correspondente ao dobro de *HG*, ou igual ao dobro de *KL*, a corda correspondente ao dobro de *BDH*. Pelo teorema 14.º do V Livro dos *Elementos* de Euclides, *BD* é igual a *EF* pois que as cordas correspondentes ao dobro destes arcos são iguais. Do mesmo modo, a partir da igualdade entre *BD* e *EF* podemos provar que os lados e ângulos restantes são iguais. E assim, se os lados *AB* e *CF* são dados como iguais, tirar-se-ão as mesmas conclusões a partir da igualdade das razões.

VII

Além disto, se não há ângulo recto, mas desde que o lado adjacente a ângulos iguais seja igual ao lado correspondente, chegar-se-á à mesma conclusão. Por exemplo, se em dois triângulos, *ABD* e *CEF*, os dois ângulos *B* e *D* são iguais aos dois ângulos correspondentes, *E* e *F*, e se também o lado *BD*, adjacente a ângulos iguais, é igual ao lado *EF*, digo que os triângulos são equiângulos e equiláteros. Assim, supondo novamente os pólos em *B* e *F*, descrevemos os arcos de círculos máximos, *GH* e *KL*, de modo que *AD* e *GH* quando prolongados se intersectem entre si no ponto *N*, assim como *EC* e *LK*, em *M*. Por conseguinte, dado que os dois triângulos *HDN* e *EKM* têm os ângulos *HDN* e *KEM* iguais por, serem verticalmente opostos a ângulos que são considerados iguais, e como os ângulos em *H* e *K* são ângulos rectos, porque passam pelos pólos, e os lados *DH* e *EK* são iguais, os triângulos são equiângulos e equiláteros segundo o teorema precedente. Ora, uma vez que o arco *GH* é igual ao arco *KL*, por serem iguais os ângulos *B* e *F*, todo o arco *GHN* é igual a todo o *MKL*, segundo o axioma da adição de partes iguais. Ora, também neste caso há dois triângulos, *AGN* e *MCL* que têm o lado *GN* igual ao lado *ML*, o ângulo *ANG* igual ao ângulo *CML* e *G* e *L* ângulos rectos. Portanto, os triângulos terão também lados e ângulos iguais. Quando quantidades iguais são subtraídas de quantidades iguais, as diferenças são iguais; assim *AD* é igual a *CE*, *AB* a *CF*, e o ângulo *BAD* ao ângulo restante *ECF*. Q.E.D.

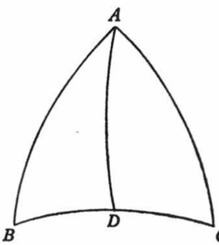


VIII

Além disto, se dois triângulos têm dois lados iguais aos dois lados correspondentes e um ângulo igual a um ângulo, quer seja o ângulo determinado pelos dois lados iguais quer o ângulo na base, eles terão também as bases e os ângulos restantes iguais. Como na figura anterior, seja o lado *AB* igual ao lado *CF* e *AD* igual a *CE*. Seja, em primeiro lugar o ângulo *A*, determinado pelos dois lados iguais, igual ao ângulo *C*. Digo que a base *BD* é igual à base *EF*, o ângulo *B* igual ao ângulo *F*, e o restante *BDA* igual ao ângulo restante *CEF*. Com efeito, teremos dois triângulos, *AGN* e *CLM*, em que os ângulos *G* e *L* são ângulos rectos, e *GAN* igual a *MCL*, pois são ângulos suplementares de *BAD* e *ECF*, que são iguais; e *GA* é igual a *LC*. Por conseguinte estes triângulos são equiângulos e equiláteros. Daí resulta que *DN* é igual a *ME*, como partes restantes que são dos lados iguais *AD* e *CE*. Mas já se demonstrou que o ângulo *DNH* é igual ao ângulo *EMK* e os ângulos *H* e *K* são ângulos rectos.

Os dois triângulos *DHN* e *EMK* terão também os seus ângulos e lados correspondentes iguais. Portanto, como partes restantes *BD* será também igual a *EF* e *GH* a *KL*. Os seus ângulos *B* e *F* são iguais assim como os ângulos restantes *ADB* e *FEC*. Mas, se em vez dos lados *AD* e *EC*, as bases *BD* e *EF* forem dadas como iguais, sendo opostas a ângulos iguais, permanecendo as outras condições inalteradas, o método de demonstração será o mesmo. Na verdade, sendo os ângulos *GAN* e *MCL* iguais como suplementos de ângulos iguais, *G* e *L* ângulos rectos, e *AG* igual a *CL*; do mesmo modo, e como anteriormente, teremos os dois triângulos *AGN* e *MCL*, com os seus ângulos e lados correspondentes iguais. O mesmo se dá também com *DHN* e *MEK*, que são partes dos triângulos *AGN* e *MCL*, pois *H* e *K* são ângulos rectos; *DNH* e *KME* são iguais. Os lados *DH* e *EK* são lados iguais por serem partes restantes dos quadrantes. Destas igualdades resultam as mesmas conclusões que referimos.

IX



Numa esfera, os ângulos na base dos triângulos isósceles são iguais. Seja *ABC* um triângulo em que os dois lados *AB* e *AC* são iguais. Do vértice *A*, descrevamos um círculo máximo que intersecte a base em ângulos rectos, isto é, que passe pelos pólos da base. Seja este círculo *AD*. Ora, dado que nos dois triângulos, *ABD* e *ADC*, o lado *BA* é igual ao lado *AC*, *AD* é comum a ambos. Os ângulos em *D* são ângulos rectos. Naturalmente, de acordo com a demonstração anterior, os ângulos *ABC* e *ACB* são iguais.

Daqui se segue como corolário que o arco que passa pelo vértice de um triângulo isósceles, em ângulos rectos com a base, bissectará tanto a base como o ângulo definido pelos lados iguais e reciprocamente, como se prova por este teorema e pelo precedente.

X

Quaisquer dois triângulos, na mesma esfera, que tenham lados correspondentes iguais, terão também os seus ângulos correspondentes iguais, cada a cada um. Na verdade, em ambos os casos, os três segmentos dos círculos máximos formam pirâmides que têm os seus vértices no centro da esfera. As suas bases são triângulos planos limitados por cordas correspondentes aos arcos dos triângulos convexos. Estas pirâmides são semelhantes e iguais. Ora, quando duas figuras são semelhantes, a regra é que os seus ângulos correspondentes considerados em qualquer ordem são iguais. Por conseguinte, estes triângulos terão os seus ângulos correspondentes iguais. Particularmente aqueles que definem figuras semelhantes de uma maneira mais genérica, entendem por figuras semelhantes aquelas que têm configurações semelhantes e cujos ângulos correspondentes são iguais. Por isso eu penso que é evidente que, numa esfera, os triângulos com lados correspondentes iguais são semelhantes, como no caso dos triângulos planos.

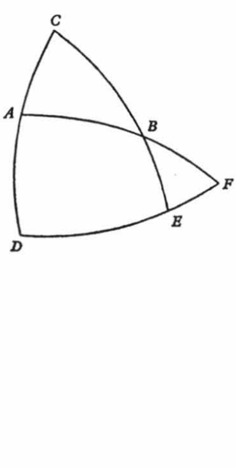
XI

Qualquer triângulo com dois lados e um ângulo dados torna-se um triângulo de ângulos e lados dados. Na verdade, se os lados dados são iguais, os ângulos da base devem ser iguais. Descrevendo um arco a partir do vértice, em ângulos rectos com a base, ficará bem evidente o resultado de acordo com o corolário do teorema IX. Suponhamos, porém, que os lados dados são iguais como no triângulo *ABC*, no qual o ângulo *A* é dado juntamente com os dois lados, que definem ou não o ângulo dado. Aceitemos primeiramente que os lados *AB* e *AC* o definem. Com um pólo em *C*, descrevamos o arco *DEF* de um círculo máximo. Completemos os quadrantes *CAD* e *CBE* e tracemos *AB* que intersecte *DE* no ponto *F*. Assim, no triângulo *ADF*, o lado *AD* é dado como parte restante do quadrante, depois de lhe subtrairmos *AC*. Além disso o ângulo *BAD* é dado como parte restante quando se subtrai *CAB* de dois ângulos rectos. De facto, as razões entre os ângulos e as suas grandezas são as mesmas que as resultantes da intersecção das linhas rectas e dos planos. *D* é um ângulo recto. Por conseguinte, de acordo com o IV teorema deste capítulo, os ângulos e os lados do triângulo *ADF* são dados. Por um lado, no triângulo *BEF*, o ângulo *F* foi encontrado, *E* é um ângulo recto porque os seus lados passam pelos pólos. Igualmente o lado *BF* é a diferença entre *ABF* e *AB*. Donde resulta, segundo o mesmo teorema, que os ângulos e os lados do triângulo *BEF* são dados. Assim, a partir de *BE* é dado *BC*, como parte restante do quadrante e um lado procurado. A partir de *EF* é dado *DE*, como parte restante de todo o arco *DEF* e correspondente ao ângulo *C*. A partir do ângulo *EBF* o seu ângulo verticalmente oposto *ABC* é dado, que era o ângulo procurado.

Mas, se em vez de *AB*, se considerar *CB*, lado oposto ao ângulo dado, o resultado será o mesmo. Na verdade, *AD* e *BE* são dados, como partes restantes dos quadrantes. Isto também acontece com os ângulos e os lados dos dois triângulos *ADF* e *BEF*, como atrás se viu. A partir destes são igualmente dados os lados e os ângulos do triângulo em questão, *ABC*, como se tinha proposto.

XII

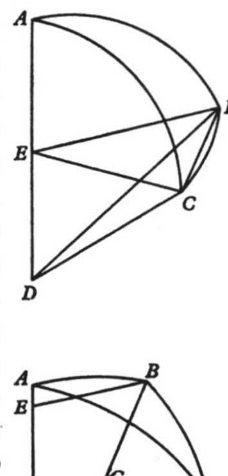
Além disto, se dois ângulos e um lado são dados, o resultado será o mesmo. Assim, servindo-nos da construção anterior, sejam dados, no triângulo *ABC*, os dois ângulos *ACB* e *BAC* juntamente com o lado *AC*, que é adjacente a ambos os ângulos. Ora, se um dos ângulos dados fosse um ângulo recto, tudo o mais podia ser deduzido, por um cálculo de acordo com o teorema IV, atrás referido. Mas nós pretendemos que este seja um caso diferente, em que nenhum dos ângulos dados seja um ângulo recto. Assim *AD* será a parte restante do quadrante *CAD*, o ângulo *BAD* é o resto resultante de subtrair *BAC* a dois ângulos rectos, e *D* é um ângulo recto. Por conseguinte são dados os ângulos e os lados do triângulo *AFD*, de acordo com o teorema IV, supramencionado. Mas, dado que o ângulo *C* é dado, o arco *DE* é dado assim como a parte restante *EF*. *BEF* é um ângulo recto e *F* um ângulo comum a ambos os triângulos. Do mesmo modo, de acordo com o teorema IV, referido acima, *BE* e *FB* são dados, e a partir destes serão conhecidos os lados restantes procurados *AB* e *BC*. Mas um dos ângulos dados pode ser oposto ao lado dado. Por exemplo, se o ângulo *ABC* é dado em vez do ângulo *ACB*, mantendo-se as outras condições inalteradas, pela mesma razão ficará demonstrado que os ângulos e



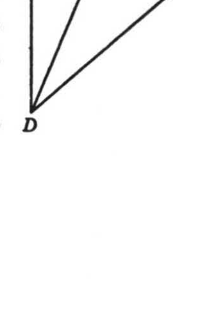
lados de todo o triângulo ADF são dados, assim como do subtriângulo BEF. Na verdade, como o ângulo F é comum a ambos e EBF é verticalmente oposto a um ângulo dado, sendo E um ângulo recto, está provado nos teoremas anteriores que são também dados todos os seus lados. Finalmente, de tudo isto resultam as mesmas conclusões que referimos. Com efeito, todas estas propriedades estão sempre interligadas por mútuas relações invariantes, como convém a uma forma esférica.

XIII

Finalmente são dados os ângulos de um triângulo se todos os seus lados forem dados.



Assim, sejam dados todos os lados do triângulo ABC. Digo que são também dados todos os seus ângulos. Na verdade, ou o triângulo tem lados iguais ou não. No primeiro caso, sejam AB e AC iguais. É claro que as metades das cordas correspondentes ao dobro destes arcos serão também iguais. Sejam estas metades de corda, BE e CE, que se intersectam no ponto E, porque são equidistantes do centro da esfera em DE, a intersecção dos seus círculos como se mostra pela 3.ª definição do III Livro dos *Elementos* de Euclides e dos seu converso. Mas de acordo com a 3.ª proposição do mesmo III Livro dos *Elementos* de Euclides, DEB é um ângulo recto, no plano ABD e igualmente o é o ângulo DEC no plano ACD. Por conseguinte, de harmonia com a 4.ª definição do XI Livro de Euclides, o ângulo BEC é o ângulo de inclinação destes planos que acharemos da forma seguinte. Uma vez que a sua corda é uma linha recta, BC, teremos um triângulo rectilíneo cujos lados são dados pelos seus arcos, correspondentes a cordas dadas. Igualmente são dados os ângulos do triângulo BEC. Teremos assim o ângulo BEC pretendido, isto é, o ângulo



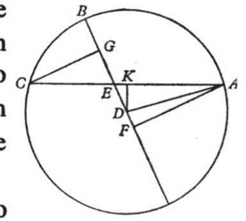
esférico *BAC* e os ângulos restantes, de acordo com os teoremas anteriores.

Mas se o triângulo é escaleno, como na segunda figura, é evidente que as metades das cordas correspondentes ao dobro dos arcos não se intersectarão. Na verdade se o arco *AC* é maior do que *AB*, então a metade da corda correspondente ao dobro do arco *AC*, isto é, *CF*, passará mais abaixo. Se, porém, o arco é menor, a metade da corda passará mais acima segundo estas linhas estiverem mais próximas ou mais afastadas do centro, de acordo com a 15.ª proposição do III Livro de Euclides. Tracemos, então, *FG*, paralela a *BE*, de modo a intersectar *BD*, intersecção dos círculos, no ponto *G*, e juntemos *CG*. Ora é claro que o ângulo *EFG* é um ângulo recto por ser igual a *AEB*, e *EFC* é também um ângulo recto, porque *CF* é a metade da corda correspondente ao dobro de *AC*. Por conseguinte, *CFG* será o ângulo de intersecção dos círculos *AB* e *AC*. Assim também achamos *CFG*. Na verdade *DF* está para *FG* assim como *DE* está para *EB*, porque os triângulos *DFG* e *DEB* são semelhantes. Daqui resulta que *FG* é dado nas mesmas unidades em que *FC* é dado. Mas a razão entre *DG* e *DB* é também a mesma. *DG* é dado igualmente nas unidades em que *FC* tem 100 000. Além disso, o ângulo *GDC* é dado a partir do arco *BC*. Deste modo, e de acordo com o teorema III sobre os triângulos planos, teremos o ângulo *GFC*, isto é, o ângulo esférico pedido *BAC*, e assim acharemos os ângulos restantes, segundo o teorema XI sobre os triângulos esféricos.

XIV

Se um arco dado de um círculo é dividido em qualquer ponto de modo que a soma dos segmentos é menor do que um semicírculo, e se a razão entre a metade da corda correspondente ao dobro de um segmento e a metade da corda correspondente ao dobro do outro segmento é dada, são dados também os arcos dos segmentos.

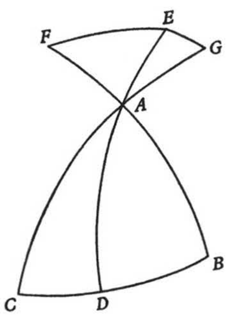
Assim, seja o arco dado *ABC*, com o centro em *D*. Dividamo-lo em qualquer proporção pelo ponto *B*, mas de modo que a soma dos segmentos seja menor do que um semicírculo. Seja agora a razão entre a metade da corda do dobro de *AB* e a metade da corda do dobro de *BC* dada em alguma medida de comprimento. Digo que os arcos *AB* e *BC* também são dados.



Assim, tracemos a corda *AC*, que será intersectada pelo diâmetro no ponto *E*. Das suas extremidades, *A* e *C*, baixemos as perpendiculares *AF* e *CG* para o diâmetro. Estas devem ser as metades das cordas correspondentes a *AB* e *BC*. Ora, nos triângulos rectângulos *AEF* e *CEG*, os ângulos verticalmente opostos em *E* são iguais. Por conseguinte os triângulos têm os seus ângulos correspondentes iguais. Sendo triângulos semelhantes, têm os seus lados opostos a ângulos iguais proporcionais: *AF* está para *CG* assim como *AE* está para *EC*. Por conseguinte, *AE* está para *EC* nas mesmas unidades em que *AF* ou *CG* tiveram sido dadas. Daqui resulta que toda a linha *AEC* será dada nas mesmas unidades. Mas a corda correspondente ao arco *ABC* é dada nas mesmas unidades que o raio *DEB*, assim como *AK*, metade de *AC*, e também como a parte restante *EK*. Juntemos *DA* e *DK*, que serão também dadas nas mesmas unidades que *DB*. Com efeito, *DK* é a metade da corda correspondente ao segmento, resto da subtracção de *ABC* a um semicírculo. Este segmento, portanto, é definido pelo ângulo *DAK*. A partir daqui é dado o ângulo *ADK*, pois define a metade do arco *ABC*. Mas no triângulo *EDK*, como os dois lados são dados e o ângulo *EKD* é um ângulo recto, também é dado *EDK* bem como todo o ângulo *EDA*, que define o arco *AB*. Igualmente, partindo desta conclusão, se achará *CB*, a parte restante do arco. Era isto o que se queria demonstrar.

XV

Se são dados todos os ângulos de um triângulo, mesmo que nenhum deles forme ângulo recto, todos os lados são dados.



Seja *ABC* um triângulo cujos ângulos são todos dados mas nenhum deles é um ângulo recto. Digo que também são dados todos os seus lados. Assim, de qualquer dos seus ângulos, por exemplo *A*, tracemos pelos pólos de *BC* um arco, *AD*, que intersectará *BC* em ângulos rectos. *AD* cairá dentro do triângulo a não ser que um dos ângulos *B* ou *C*, na base, seja obtuso e o outro agudo. Nesse caso, a perpendicular devia ser traçada do ângulo obtuso para a base. Completemos os quadrantes *BAF*, *CAG* e *DAE*. Com os pólos em *B* e *C* descrevamos os arcos *EF* e *EG*; os ângulos em *F* e *G* serão [também] ângulos rectos. Assim, nos triângulos rectângulos, a metade da corda correspondente ao dobro de *AE* está para metade da corda correspondente ao dobro de *EF*, como metade do diâmetro da esfera está para metade da corda correspondente ao dobro do ângulo *EAF*. De modo semelhante, no triângulo *AEG*, com um ângulo recto em *G*, metade da corda correspondente ao dobro de *AE* está para metade da corda correspondente ao dobro de *EG*, como metade do diâmetro da esfera está para metade da corda correspondente ao dobro do arco *EAG*. Por conseguinte, tendo em conta que as razões são iguais, metade da corda correspondente ao dobro de *EF* está para metade da corda correspondente ao dobro de *EG*, como metade da corda correspondente ao dobro do ângulo *EAF* está para metade da corda correspondente ao dobro de *EAG*.

Mas *FE* e *EG* são arcos dados, pois são os restos das diferenças entre os ângulos *B* e *C* para ângulos rectos. Partindo desta conclusão, acharemos a razão dos ângulos *EAF* e *EAG*, que é a razão entre *BAD* e *CAD*, que lhes são verticalmente opostos. Ora todo o ângulo *BAC* é dado.

Assim, de acordo com o teorema anterior, também são dados os ângulos *BAD* e *CAD*. Então, de harmonia com o teorema V, obteremos os lados *AB, BD, AC, CD* e todo o lado *BC*.

Oxalá que estas observações gerais sobre os triângulos, feitas com a extensão que julgámos essencial para o nosso objectivo, sejam suficientes. Se tivéssemos de desenvolver esta matéria, seria necessário um volume.

LIVRO II

INTRODUÇÃO

Tendo exposto resumidamente, no Livro precedente, os três movimentos da Terra com os quais prometemos explicar todos os fenómenos dos corpos celestes [I, 11] cumpriremos agora a nossa promessa em pormenor, tanto quanto nos seja possível, examinando e investigando cada ponto em particular. Começaremos pela revolução mais conhecida de todas, a que se completa em um dia e uma noite. Os Gregos chamam-lhe *muchthemeron*, como dissemos [I, 4], e nós consideramo-la como pertencendo particular e directamente ao globo terrestre, uma vez que dela derivaram os meses, os anos e outros períodos de tempo com muitos nomes, como o número deriva da unidade, sendo o movimento a medida do tempo. Portanto, sobre a desigualdade dos dias e das noites, sobre o nascimento e o ocaso do Sol e dos graus do zodíaco e dos seus signos pouco diremos, assim como sobre as coisas deste género que são consequência directa desta rotação. Faremos assim principalmente porque muitos escreveram largamente sobre isto coisas que aprovamos e aceitamos. E não importa que aquilo que eles demonstraram pela imobilidade da Terra e pelo movimento de rotação do Universo, nós o procuremos partindo de um princípio oposto, embora tentando alcançar o mesmo objectivo. É que, ordinariamente, os fenómenos que estão relacionados entre si mostram uma concordância recíproca. Contudo, não omitiremos nada que seja essencial. Ninguém se admire, no entanto, se continuarmos a empregar os termos mais usuais para o nascer e o pôr do Sol, das estrelas e fenómenos semelhantes, e fique-se a saber que usamos a terminologia habitual, a todos acessível, não esquecendo nunca que

Para nós, que somos levados pela Terra, o Sol e a Lua
[passam,
E as estrelas, alternadamente, aparecem e desaparecem.

OS CÍRCULOS E OS SEUS NOMES

Dissemos [I, 11] que o equador era o maior dos paralelos de latitude descritos em redor dos pólos da rotação diária do globo terrestre. Por outro lado, a eclíptica é um círculo que passa pela linha média dos signos do zodíaco, sob o qual o centro da Terra gira na sua revolução anual. Mas a eclíptica encontra-se com o equador obliquamente, de acordo com a inclinação do eixo da Terra sobre a eclíptica. Em cada lado do equador, como resultado da rotação diária da Terra, é descrito um círculo tangente à eclíptica, funcionando como limite extremo da sua obliquidade. Estes dois círculos chamam-se trópicos. Neles, com efeito, o Sol parece fazer «tropos», isto é, mudanças de direcção, a saber, os «tropos» do Inverno e do Verão. Por isso ao «tropo» do Norte se chama normalmente o solstício do Verão e ao do Sul o solstício do Inverno, como se explicou atrás na descrição sumária das revoluções da Terra [I, 11]. Aparece depois o chamado horizonte ao qual os Latinos davam o nome de «círculo limite», pois marca para nós a fronteira entre a parte visível do Universo e aquela que está oculta. [Todos os corpos que nascem] parecem nascer no horizonte [e todos os que desaparecem] parecem desaparecer no horizonte. Ele tem o centro na superfície da Terra e o pólo no nosso zénite. Mas visto que a Terra é insignificante comparada com a grandeza do céu; e além disso como todo o espaço entre o Sol e a Lua, segundo a nossa hipótese, se não pode comparar com a vastidão do céu; assim o círculo do horizonte parece dividir o céu em dois como se passasse pelo centro do Universo, de harmonia com o que demonstrámos anteriormente [I, 6]. Ora, sendo o horizonte oblíquo ao equador, também é tangente, portanto, aos dois círculos paralelos: o círculo boreal que limita os astros sempre visíveis e o austral, os que estão sempre invisíveis. Estes dois círculos são chamados Ártico e Antártico por Proclus e pela maior parte dos Gregos. São paralelos maiores ou menores consoante a obliquidade do horizonte ou a altura do pólo acima do horizonte. Resta o círculo meridiano que passa pelos pólos do horizonte e também pelos pólos do equador e por isso perpendicular a ambos estes círculos. Quando o Sol o atinge é meio-dia ou meia-noite. Estes dois círculos, tendo os seus centros na superfície da Terra, isto é, o horizonte e o meridiano, dependem inteiramente do movimento da Terra e também do nosso ponto de visão, seja ele qual for. Na verdade, o observador comporta-se em toda a parte como se fosse o centro da esfera de tudo o que é visível à sua volta. Além disso, todos os círculos que supomos existirem na Terra são a base da sua reprodução no céu e de círculos semelhantes, como se demonstra claramente na Cosmografia, ao tratar-se das dimensões da Terra. Estes são, pois, os círculos que têm nomes próprios, embora se possam mencionar outros com uma variedade infinita de formas e nomes.

A OBLIQUIDADE DA ECLÍPTICA, A DISTÂNCIA ENTRE OS TRÓPICOS, E COMO PODEMOS DETERMINÁ-LAS

Ora se a eclíptica se orienta obliquamente entre o trópico e o equador, penso que é necessário encontrar a distância entre os trópicos assim como o valor do ângulo de intersecção do equador com a eclíptica. Pois que isto apenas pode ser observado pelos sentidos e como auxílio de instrumentos necessários, deve construir-se um quadrado de madeira, ou melhor, de um material mais sólido, [como] pedra ou metal, por exemplo, visto que sendo a madeira sujeita a mudanças pela instabilidade das condições atmosféricas, poderia enganar o observador. Seja, portanto, uma superfície deste quadrado perfeitamente plana e tenha uma extensão suficiente para marcar as divisões, isto é, três ou quatro côvados (1). Então, tomando um dos cantos como centro, tracemos um quadrante de círculo, tão grande quanto o tamanho o permitir. Dividamo-lo em 90 graus iguais que, por sua vez, são divididos em sessenta minutos ou quaisquer outras subdivisões possíveis. Em seguida, fixemos no centro um ponteiro cilíndrico, muito bem torneado, perpendicular àquela superfície e sobressaindo um pouco, talvez com o comprimento de um dedo ou menos. Depois de construído assim este instrumento, convém traçar o meridiano sobre um pavimento no plano horizontal, num nivelamento tão rigoroso quanto possível, servindo-nos para isso de um hidroscópio ou nível de água, de modo que não haja inclinação para qualquer lado.

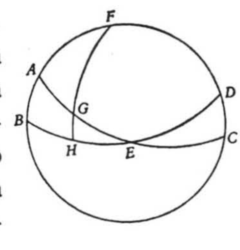
---

(1) O côvaddo é em geral avaliado em 66 cm. Se Copérnico se refere a esta unidade, o «quadrado» teria entre 1,98 m e 2,64 m.

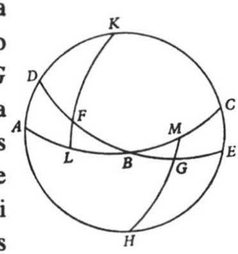
Então, no círculo descrito, ponha-se-lhe no centro um ponteiro. Observemos e marquemos onde a extremidade da sua sombra toca a circunferência do círculo, em qualquer altura, antes do meio-dia. Faremos o mesmo depois do meio-dia, e dividiremos em dois o arco do círculo que fica entre as duas marcas que fizemos. Por este processo, a linha recta traçada a partir do centro através do referido ponto de divisão do arco, indicar-nos-á infalivelmente, o Norte e o Sul. Tomando esta linha como base, monta-se nela a parte plana do instrumento, fixa-se perpendicularmente, com o centro voltado para o Sul; um fio-de-prumo que desça deste centro encontrará a linha meridiana em ângulos rectos. Disto resulta que a superfície do instrumento contém o meridiano. Assim, nos dias do solstício do Verão e do Inverno, devemos observar a sombra do Sol projectada no centro pelo ponteiro, colocar alguma objecto no arco do quadrante considerado, para marcar com mais rigor a posição da sombra. Registamos o ponto médio da sombra tão rigorosamente quanto possível, em graus e minutos. Ora, se fizermos isto, o arco marcado entre as duas sombras, Verão e Inverno, ficará determinado e mostrar-nos-á a distância entre os trópicos e a obliquidade total da eclíptica. Se tomarmos metade dela, teremos a distância a que os trópicos ficam do equador, e a grandeza do ângulo de inclinação do equador para a eclíptica será evidente. Ptolomeu determinou este intervalo entre os limites Norte e Sul, em graus do sistema em que o círculo tem 360°, como sendo de 47° 42′ 40″. Isto está de acordo com a observação anterior feita por Hiparco e Eratóstenes e equivale a 11 unidades, no sistema em que o círculo tem 83 unidades. Portanto, metade do intervalo é 23° 51′ 20″ que indica a distância do equador aos trópicos, em unidades correspondentes à divisão do círculo em 360°, assim como o ângulo de intersecção do equador com a eclíptica. Ora Ptolomeu considerava que isto seria invariavelmente assim, sem mudança, mas verificou-se que estes números decresceram continuamente desde essa época até a nossa. Como foi por nós verificado e por alguns contemporâneos que a distância entre os trópicos já não é mais do que cerca de 46° 58′ e o ângulo de intersecção 23° 29′, é bem claro que a obliquidade da eclíptica é também variável. Acerca disto, mais diremos a seguir [III, 10]. Aí demonstraremos, partindo duma conjectura muito provável, que ela nunca terá mais de 23° 52′, nem menos de 23° 28′.

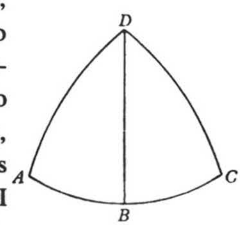
OS ARCOS E OS ÂNGULOS DAS INTERSECÇÕES DO EQUADOR, DA ECLÍPTICA E DO MERIDIANO; A DECLINAÇÃO E ASCENSÃO RECTA RESULTANTES; O SEU CÁLCULO.

Afirmámos [II, 1] que do horizonte nascem as partes do Universo e nele se põem, e dizemos agora que o céu é dividido ao meio pelo meridiano. Este também percorre a eclíptica e o equador no período de 24 horas. Divide-os, definindo arcos que partem da sua intersecção vernal ou outonal. Por sua vez é por eles dividido, pela sua intersecção com um arco [de meridiano]. Ora, uma vez que todos eles são círculos máximos, formam um triângulo esférico. Este é um triângulo rectângulo porque há um ângulo recto onde o meridiano intersecta o equador, através de cujos pólos [o meridiano] passa, por definição. O arco do meridiano ou de qualquer outro círculo que passa pelos pólos do equador chama-se a «declinação» do segmento da eclíptica. Mas o arco correspondente do equador, que nasce juntamente com o arco a ele associado na eclíptica, chama-se «ascensão recta».



Tudo isto se mostra claramente num triângulo convexo. Seja *ABCD* o círculo que passa pelos pólos do equador e da eclíptica, geralmente chamado o coluro dos solstícios. Seja *AEC* metade da eclíptica e *BED* metade do equador. Suponha-se o equinócio da Primavera no ponto *E*, o solstício do Verão em *A* e o solstício do Inverno em *C*. Tomemos agora *F* como um pólo de rotação diária e *EG* um arco de eclíptica, por exemplo, de 30°. Pela sua extremidade descrevamos um quadrante, *FGH*. Assim é evidente que no triângulo *GEH*, é dado o lado *EG* de 30°. O ângulo *GEH* também é dado. Terá, no seu mínimo, 23° 28′, no sistema em que 360° são iguais a quatro ângulos rectos, de acordo com o mínimo de declinação, *AB*. O ângulo *GHE* é um ângulo recto. Daqui resulta que, segundo o teorema IV sobre os triângulos esféricos, o triângulo *EHG* é um triângulo cujos ângulos e lados são dados. Ora demonstrou-se [teorema III, Triângulos esféricos] que a corda correspondente ao dobro de *EG* está para a corda correspondente ao dobro de *GH* assim como a corda correspondente ao dobro de *AGE*, ou o diâmetro da esfera, está para a corda correspondente ao dobro de *AB* e, de modo semelhante, as suas metades. Ora, a metade da corda correspondente ao dobro de *AGE* tem 100 000 unidades, por ser um raio, e nas mesmas unidades, as metades das cordas correspondentes ao dobro de *AB* e *EG* têm 39 822 e 50 000. No entanto, dado que sendo quatro números proporcionais, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, verificamos que metade da corda correspondente ao dobro de *GH* tem 19 911 unidades e, a partir disto, *GH* tem pela tabela 11° 29′ que é a declinação correspondente ao segmento *EG*. Daqui resulta que no triângulo *AFG*, o lado *FG* mede 78° 31′, o lado *AG*, 60°, porque são partes restantes de quadrantes. O ângulo *FAG* é um ângulo recto. Pelo mesmo princípio, as cordas correspondentes ao dobro de *FG*, *AG*, *FGH* e *BH*, ou as suas metades, serão proporcionais. Mas visto que três deles já são dados, também é dado o quarto, *BH*, com 6248 32′ que é a ascensão recta tomada a partir do solstício de Verão. Se [a ascensão recta] for tomada a partir do equinócio da Primavera será *HE* de 27° 54′. Do mesmo modo, a partir dos lados dados, *FG* com 78° 31′, *AF* com 66° 32′, e um quadrante, verificamos que o ângulo *AGF* mede aproximadamente 69° 23 $^1/_2$′, e o ângulo verticalmente oposto, *HGE*, é igual a ele. Vamos usar também este método nos outros casos. Não se deve, contudo, ignorar que o meridiano intersecta a eclíptica em ângulos rectos, nos pontos em que é tangente aos trópicos. Realmente como afirmámos, intersecta-a então ao passar pelos pólos da eclíptica . Mas nos pontos equinociais, define um ângulo menor do que um recto na proporção em que a eclíptica se desvia de um ângulo recto [ao intersectar o equador], de modo que o ângulo entre o meridiano e a eclíptica é de 66º 32′. Também se deve notar que, se tomarmos arcos iguais da eclíptica a partir dos pontos equinociais ou solsticiais, resulta que os ângulos e os lados são iguais. Assim, se descrevermos um arco do equador, *ABC*, e [um arco] da eclíptica, *DBE*, que se intersectem no ponto *B*, que é o ponto equinocial, e tomarmos os arcos iguais *FB* e *BG* assim como os quadrantes *KFL* e *HGM* a partir dos pólos da rotação diária, *FLB* e *BMG* serão dois triângulos em que os lados *BF* e BG são iguais, os ângulos em *B* verticalmente opostos e os ângulos em *L* e *M* ângulos rectos. Daqui resulta pelo teorema VI sobre os triângulos esféricos que os seus lados e ângulos destes triângulos serão iguais. Assim serão iguais as declinações *FL* e *MG* e as ascenções rectas *LB* e *BM*. O ângulo restante *F* será igual ao ângulo restante *G*. Será evidente que o mesmo se aplica se arcos iguais forem tomados a partir do solstício. Sejam, por exemplo, *AB* e *BC* arcos iguais, um de cada lado de *B*, onde o trópico é tangente à eclíptica. Assim, se construirmos os quadrantes *DA* e *DC* a partir de *D*, o pólo do equador, haverá, do mesmo modo, dois triângulos *ABD* e *DBC* em que as bases, *AB* e *BC* e o lado *BD*, comum a ambos, são iguais. Os ângulos em *B* são ângulos rectos. Segundo o teorema VIII sobre os triângulos esféricos, demonstrar-se-á que os triângulos têm lados e ângulos iguais. Assim é evidente que os ângulos de um só quadrante da eclíptica e os arcos definidos por eles se ajustam aos quadrantes restantes de todo o círculo.





Vamos agora acrescentar um exemplo destas relações na descrição seguinte das Tabelas.

Na primeira coluna ficarão os graus da eclíptica, na segunda as declinações correspondentes a esses graus e na terceira o número de minutos em que as declinações, que ocorrem na obliquidade máxima da eclíptica, diferem ou excedem estas declinações parciais, sendo a maior destas diferenças 24'.

Procederemos do mesmo modo na Tabela das ascensões rectas e na dos ângulos meridianos. Efectivamente, visto que a obliquidade da eclíptica muda, tudo o que depende dela tem necessariamente de mudar também.

No entanto, verifica-se que a diferença na ascensão recta é extremamente diminuta, não mais que $^1/_{10}$ de um «tempo» e no decurso de uma hora atinge somente $^1/_{50}$ de um «tempo». Como se sabe, os antigos chamam «tempos» aos graus do equador que nascem juntamente com os graus da eclíptica. Ambos estes círculos têm 360 unidades, como temos dito muitas vezes. Para os distinguir, muitos chamam graus às partes da eclíptica e «tempos» às do equador. Seguiremos também esta nomenclatura no que vamos expor. Embora a diferença seja, pois, tão pequena que possa com razão ser desprezada, não hesitámos contudo em mencioná-la. Daqui resulta que serão evidentes os valores para qualquer outro ângulo de obliquidade da eclíptica se se aplicarem em cada entrada correcções semelhantes em proporção à diferença entre o valor da obliquidade mínima da eclíptica e o da máxima. Por exemplo, suponhamos que a obliquidade é 23° 34' e desejamos encontrar a declinação para 30° na eclíptica, a partir do equinócio. Encontramos na Tabela 11° 29' e na coluna da diferença 11', cuja soma deverá ser acrescentada ao máximo da obliquidade da eclíptica, que era, como dissemos, 23° 52'. Mas neste caso a obliquidade é avaliada em 23° 34', seis minutos mais do que o mínimo que são $^1/_4$ dos 24' que constituem a diferença, para mais, entre a obliquidade máxima e a obliquidade mínima. Se dividirmos $11'$ na mesma proporção dará aproximadamente $3'$. Juntando-os a $11° 29'$, perfazemos $11° 32'$ que é a declinação no «tempo» de 30^{o} de eclíptica medido desde o ponto equinocial. O mesmo método poderá usar-se para os ângulos [meridianos] e para as ascensões rectas, tendo apenas presente que as diferenças devem adicionar-se sempre ao segundo caso, mas subtrair-se no primeiro para que todos os resultados sejam mais rigorosos, em relação ao tempo.

TABELA DAS DECLINAÇÕES [DOS GRAUS DA ELÍPTICA]

Elíptica	Declinação		Diferença	Elíptica	Declinação		Diferença	Elíptica	Declinação		Diferença
Gr.	Gr.	Min.	Min.	Gr.	Gr.	Min.	Min.	Gr.	Gr.	Min.	Min.
1	0	24	0	31	11	50	11	61	20	23	20
2	0	48	1	32	12	11	12	62	20	35	21
3	1	12	1	33	12	32	12	63	20	47	21
4	1	36	2	34	12	52	13	64	20	58	21
5	2	0	2	35	13	12	13	65	21	9	21
6	2	23	2	36	13	32	14	66	21	20	22
7	2	47	3	37	13	52	14	67	21	30	22
8	3	11	3	38	14	12	14	68	21	40	22
9	3	35	4	39	14	31	14	69	21	49	22
10	3	58	4	40	14	50	14	70	21	58	22
11	4	22	4	41	15	9	15	71	22	7	22
12	4	45	4	42	15	27	15	72	22	15	23
13	5	9	5	43	15	46	16	73	22	23	23
14	5	32	5	44	16	4	16	74	22	30	23
15	5	55	5	45	16	22	16	75	22	37	23
16	6	19	6	46	16	39	17	76	22	44	23
17	6	41	6	47	16	56	17	77	22	50	23
18	7	4	7	48	17	13	17	78	22	55	23
19	7	27	7	49	17	30	18	79	23	1	24
20	7	49	8	50	17	46	18	80	23	5	24
21	8	12	8	51	18	1	18	81	23	10	24
22	8	34	8	52	18	17	18	82	23	13	24
23	8	57	9	53	18	32	19	83	23	17	24
24	9	19	9	54	18	47	19	84	23	20	24
25	9	41	9	55	19	2	19	85	23	22	24
26	10	3	10	56	19	16	19	86	23	24	24
27	10	25	10	57	19	30	20	87	23	26	24
28	10	46	10	58	19	44	20	88	23	27	24
29	11	8	10	59	19	57	20	89	23	28	24
30	11	29	11	60	20	10	20	90	23	28	24

TABELA DAS DECLINAÇÕES [DOS GRAUS DA ELÍPTICA]

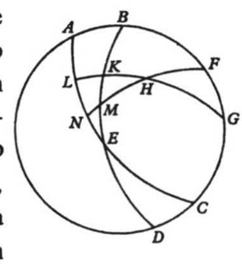
Elíptica	Declinação		Diferença	Elíptica	Declinação		Diferença	Elíptica	Declinação		Declinação
Gr.	Gr.	Min.	Min.	Gr.	Gr.	Min.	Min.	Gr.	Gr.	Min.	Min.
1	0	55	0	31	28	54	4	61	58	51	4
2	1	50	0	32	29	51	4	62	59	54	4
3	2	45	0	33	30	50	4	63	60	57	4
4	3	40	0	34	31	46	4	64	62	0	4
5	4	35	0	35	32	45	4	65	63	3	4
6	5	30	0	36	33	43	5	66	64	6	3
7	6	25	1	37	34	41	5	67	65	9	3
8	7	20	1	38	35	40	5	68	66	13	3
9	8	15	1	39	36	38	5	69	67	17	3
10	9	11	1	40	37	37	5	70	68	21	3
11	10	6	1	41	38	36	5	71	69	25	3
12	11	0	2	42	39	35	5	72	70	29	3
13	11	57	2	43	40	34	5	73	71	33	3
14	12	52	2	44	41	33	6	74	72	38	2
15	13	48	2	45	42	32	6	75	73	43	2
16	14	43	2	46	43	31	6	76	74	47	2
17	15	39	2	47	44	32	5	77	75	52	2
18	16	34	3	48	45	32	5	78	76	57	2
19	17	31	3	49	46	32	5	79	78	2	2
20	18	27	3	50	47	33	5	80	79	7	2
21	19	23	3	51	48	34	5	81	80	12	1
22	20	19	3	52	49	35	5	82	81	17	1
23	21	15	3	53	50	36	5	83	82	22	1
24	22	10	4	54	51	37	5	84	83	27	1
25	23	9	4	55	52	38	4	85	84	33	1
26	24	6	4	56	53	41	4	86	85	38	0
27	25	3	4	57	54	43	4	87	86	43	0
28	26	0	4	58	55	45	4	88	87	48	0
29	26	57	4	59	56	46	4	89	88	54	0
30	27	54	4	60	57	48	4	90	90	0	0

TABELA DAS DECLINAÇÕES [DOS GRAUS DA ELÍPTICA]

Elíptica	Declinação		Diferença	Elíptica	Declinação		Diferença	Elíptica	Declinação		Diferença
Gr.	Gr.	Min.	Min.	Gr.	Gr.	Min.	Min.	Gr.	Gr.	Min.	Min.
1	66	32	24	31	69	35	21	61	78	7	12
2	66	33	24	32	69	48	21	62	78	29	12
3	66	34	24	33	70	0	20	63	78	51	11
4	66	35	24	34	70	13	20	64	79	14	11
5	66	37	24	35	70	26	20	65	79	36	11
6	66	39	24	36	70	39	20	66	79	59	10
7	66	42	24	37	70	53	20	67	80	22	10
8	66	44	24	38	71	7	19	68	80	45	10
9	66	47	24	39	71	22	19	69	81	9	9
10	66	51	24	40	71	36	19	70	81	33	9
11	66	55	24	41	71	52	19	71	81	58	8
12	66	59	24	42	72	8	18	72	82	22	8
13	67	4	23	43	72	24	18	73	82	46	7
14	67	10	23	44	72	39	18	74	83	11	7
15	67	15	23	45	72	55	17	75	83	35	6
16	67	21	23	46	73	11	17	76	84	0	6
17	67	27	23	47	73	28	17	77	84	25	6
18	67	34	23	48	73	47	17	78	84	50	5
19	67	41	23	49	74	6	16	79	85	15	5
20	67	49	23	50	74	24	16	80	85	40	4
21	67	56	23	51	74	42	16	81	86	5	4
22	68	4	22	52	75	1	15	82	86	30	3
23	68	13	22	53	75	21	15	83	86	55	3
24	68	22	22	54	75	40	15	84	87	19	3
25	68	32	22	55	76	1	14	85	87	53	2
26	68	41	22	56	76	21	14	86	88	17	2
27	68	51	22	57	76	42	14	87	88	41	1
28	69	2	21	58	77	3	13	88	89	6	1
29	69	13	21	59	77	24	13	89	89	33	0
30	69	24	21	60	77	45	13	90	90	0	0

PARA CADA CORPO CELESTE SITUADO FORA DA ECLÍPTICA, SENDO CONHECIDAS AS SUAS LATITUDE E LONGITUDE, DETERMINAR A SUA DECLINAÇÃO, A SUA ASCENSÃO RECTA E O GRAU DA ECLÍPTICA EM QUE ELE ATINGE O MEIO DO CÉU

Já falámos da eclíptica, do equador, do meridiano e das suas intersecções. Mas, no que diz respeito à rotação diária, interessa não só conhecer os fenómenos da eclíptica que apenas revelam as causas dos fenómenos do Sol, mas também saber que o mesmo processo mostrará a declinação em relação ao equador e a ascensão recta das estrelas fixas e planetas que estão fora da eclíptica, uma vez que sejam dados as suas longitude e latitude.



Descrevamos o círculo *ABCD* pelos pólos do equador e da eclíptica. Seja *AEC* um semicírculo do equador com o pólo, *F;* e *BED* um semicírculo da eclíptica com o pólo em *G*, intersectando o equador no ponto *E*. Do seu pólo tracemos agora o arco *GHKL*, passando por uma estrela no ponto *H*. Por este ponto, a partir do pólo da rotação diária, tracemos o quadrante *FHMN*. Assim é claro que a estrela que está em *H* passa pelo meridiano simultaneamente com os dois pontos *M* e *N*. O arco *HMN* é a declinação da estrela em relação ao equador e *EN* a sua ascensão recta na esfera. Estas são as coordenadas que procuramos.

Ora, uma vez que no triângulo *KEL,* o lado *KE* e o ângulo *KEL* são dados e *EKL* é um ângulo recto, de acordo com o teorema IV sobre os triângulos esféricos, são também dados os lados *KL* e *EL* juntamente com o ângulo restante *KLE*. Daqui resulta que todo o arco *HKL* é dado. Consequentemente, no triângulo *HLN*, são dados o ângulo *HLN* e o lado *HL*. *LNH* é um ângulo recto. Assim, ainda segundo o teorema IV sobre os triângulos esféricos, são dados os lados restantes, *HN*, que é a declinação da estrela, e *LN*. O resto da subtracção de *LN* de *EL*, isto é, *NE*, será a ascensão recta, o arco através do qual a esfera gira do equinócio para a estrela. Seguindo outro método, e de acordo com o que foi dito atrás, tomemos o arco *KE* da eclíptica, como ascensão recta de *LE*. Então, por sua vez *LE* será dado pela Tabela das ascensões rectas. *LK* será dado como a declinação correspondente a *LE*. O ângulo *KLE* será dado pela Tabela dos ângulos meridianos. A partir daqui, poder-se-á calcular o resto de acordo com o que já foi demonstrado. Finalmente, como *EN* é a ascensão recta, obtemos *EM* como o grau da eclíptica em que a estrela atinge o meio do céu juntamente com o ponto *M*.

AS INTERSECÇÕES DO HORIZONTE

Na esfera recta o horizonte é um círculo diferente do horizonte na esfera oblíqua. Com efeito, chama-se horizonte na esfera recta aquele com o qual o equador está em ângulos rectos ou passa pelos pólos do equador. Horizonte na esfera oblíqua é um círculo em relação ao qual o equador está inclinado. Portanto no horizonte, em esfera recta todos os astros nascem e se põem e os dias são sempre iguais às noites. Com efeito, o horizonte bissecta todos os paralelos de latitude descritos pela rotação diária. Ele passa, evidentemente, pelos seus pólos; nestas circunstâncias, acontecem os fenómenos que nós expusemos ao discutir o meridiano [II, 1, 3]. Aqui, porém, consideramos como dia o período que vai do nascer ao pôr do Sol, e não do romper do dia ao escurecer, como geralmente se admite, isto é, desde que se começa a ver até que se acendem as luzes.

Diremos mais sobre este assunto quando discutirmos o nascimento e o ocaso dos signos do Zodíaco [II, 13]. Por outro lado, onde o eixo da Terra forma ângulos rectos com o horizonte, nada nasce ou se põe. Pelo contrário, tudo descreve um círculo, perpetuamente visível ou oculto, a menos que seja produzido por qualquer outro movimento, por exemplo, a revolução anual à volta do Sol. Daqui resulta que o dia, nestas condições, dura sem intermitência seis meses e a noite o resto do tempo, e não há qualquer diferença entre eles senão a que há entre o Inverno e o Verão, visto que neste caso o equador coincide com o horizonte.

Quando se trata de uma esfera oblíqua certos astros, contudo, nascem e põem-se enquanto alguns outros são sempre visíveis ou sempre invisíveis. Os dias e as noites são desiguais. Assim, o horizonte, sendo oblíquo, é tangente a dois paralelos de latitude de acordo com a sua inclinação. Destes dois paralelos, o que fica na direcção do pólo visível é o limite dos corpos que são perpetuamente visíveis, e o paralelo oposto, o que fica para o lado do pólo oculto, é a fronteira dos corpos que estão sempre invisíveis. Estendendo-se por toda a latitude entre estes limites, o horizonte, por conseguinte, divide todos os paralelos de latitude intermédia em arcos desiguais. Exceptua-se o equador, pois ele é o maior dos paralelos de latitude, e os círculos máximos intersectam-se um ao outro. No hemisfério superior, portanto, o horizonte define obliquamente nos paralelos de latitude arcos maiores na direcção do pólo visível do que no sentido do pólo sul, o pólo invisível. O inverso é verdadeiro no hemisfério oculto. O movimento diário aparente do Sol nestes arcos produz a desigualdade dos dias e das noites.

AS DIFERENÇAS DAS SOMBRAS DO MEIO-DIA

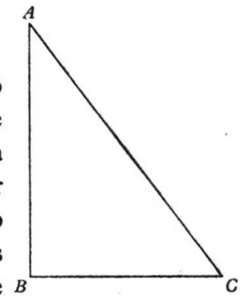
Há também diferenças nas sombras do meio-dia. De acordo com isto, alguns povos chamam-se Periscios, outros Anfíscios e outros Heteróscios. Os Perísciosão aqueles a quem podemos apelidar de «circumbráteis», com sombra em círculo, pois recebem a sombra do Sol em todas as direcções. São povos cujo zénite ou pólo do horizonte, está a uma distância do pólo da Terra que é menor ou não maior do que a de um trópico ao equador. Com efeito, neste caso, os paralelos de latitude aos quais o horizonte é tangente são os limites das estrelas perpetuamente visíveis ou invisíveis, e são maiores do que os trópicos ou então iguais. E por conseguinte, no Verão, o Sol elevando-se entre as estrelas perpetuamente visíveis, projecta as sombras dos ponteiros dos relógios solares, em todas as direcções. Mas onde o horizonte é tangente dos trópicos, elas próprias tornam-se as fronteiras das estrelas perpetuamente visíveis ou perpetuamente ocultas. Portanto, na altura do solstício vê-se o Sol a rasar a Terra à meia-noite, no momento em que toda a eclíptica coincide com o horizonte e os seus signos do zodíaco nascem rapidamente e também simultaneamente, enquanto no lado oposto o mesmo número de signos se põem também ao mesmo tempo, e o pólo da eclíptica coincide com o pólo do horizonte.

Os Anfíscios, cujas sombras do meio-dia caem para ambos os lados, são aqueles que habitam entre os dois trópicos, na região que os antigos chamavam a zona média. Em toda essa área a eclíptica passa directamente por cima da cabeça duas vezes por dia, como foi demonstrado no Teorema II dos *Phenomena* de Euclides. Por isso, na mesma área, os ponteiros dos relógios de sol projectam as suas sombras, umas vezes para o sul e outras para o norte. Nós outros que entre estes e aqueles vivemos, somos os Heteróscios porque só uma parte, isto é, para o norte, se projectam as sombras do meio-dia. Com efeito, os matemáticos antigos costumavam dividir a esfera da Terra em sete «climas» por meio de alguns paralelos de latitude passando, por exemplo, por Méroe, Siena, Alexandria, Rodes, Helesponto, o meio do Mar Negro, Dniepre, Constantinopla, etc. Estes paralelos foram escolhidos com o tríplice fundamento seguinte: a diferença e crescimento em duração do dia mais longo; a extensão das sombras observada nos relógios de sol, ao meio dia, nos dias equinociais, e os dois solstícios do Sol; e a altitude do pólo ou a largura de cada «clima».

Tendo estas quantidades variado, em parte, com o tempo, não são exactamente os mesmos que eram, pois, como dissemos, a obliquidade da eclíptica muda, facto que era desconhecido no passado. Para falar mais correctamente, isto aconteceu devido à variação da inclinação do equador em relação ao plano da eclíptica. Mas as alturas do pólo ou as latitudes dos lugares e as sombras nos dias equinociais concordam com aquelas que são referidas na Antiguidade. Isto tinha de ser assim porque o equador segue o pólo do globo terrestre. Por conseguinte estes «climas» também não são traçados e delimitados com precisão suficiente por meio de quaisquer propriedades acidentais da sombra e dos dias mas, mais correctamente, pelas suas distâncias ao equador, que são perpetuamente as mesmas. Contudo, esta variação nos trópicos, embora seja muito pequena, apresenta nas localidades do Sul, uma ligeira diferença dos dias e das sombras que se torna mais perceptível à medida que se caminha para o Norte.

Disto resulta que, em relação às sombras dos ponteiros dos relógios do sol, é evidente que, para qualquer altura do Sol, se pode determinar a extensão da sombra e vice-versa.

Assim, se *AB* é um ponteiro que projecta uma sombra *BC*, uma vez que este ponteiro forma ângulos rectos com o plano do horizonte, tem de formar sempre o ângulo recto *ABC*, segundo a definição linha perpendicular a um plano. Portanto, juntando *AC*, temos o triângulo rectângulo *ABC*. Para uma determinada altura do Sol, teremos também o ângulo *ACB*, como dado. E, pelo primeiro teorema sobre os triângulos, a razão entre o ponteiro *AB* e a sua sombra será também dada, assim como o comprimento de *BC*. Por outro lado, se *AB* e *BC* são dados, também o ângulo *ACB* o será, de acordo com o Teorema III, sobre os triângulos planos. O mesmo acontecerá com a altura do Sol que produz essa sombra, nesse momento. Assim, os antigos ao descreverem estes «climas» da Terra, atribuíram a cada um deles, tanto nos equinócios como nos solstícios, os comprimentos próprios das sombras do meio-dia.

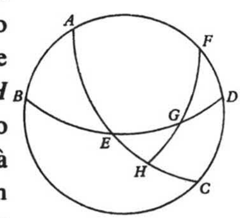


COMO PODEMOS CALCULAR, RESPECTIVAMENTE, O DIA MAIS LONGO, A DISTÂNCIA ENTRE OS NASCIMENTOS DO SOL, E A INCLINAÇÃO DA ESFERA, E AINDA AS DIFERENÇAS ENTRE OS DIAS

Assim também, para qualquer obliquidade da esfera ou inclinação do horizonte, determinaremos o dia mais longo e o mais breve, juntamente com a distância entre os nascimentos do Sol e a diferença entre os dias. Ora, a distância entre os nascimentos do Sol é o arco do horizonte definido entre os nascimentos do Sol nos solstícios do Verão e do Inverno, ou a distância de cada deles ao nascimento do Sol no equinócio.

Seja então *ABCD* o meridiano e no hemisfério oriental seja *BED* o semicírculo do horizonte e *AEC* do equador, cujo pólo Norte é *F*.

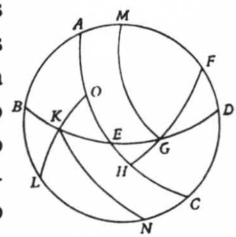
Tomando o nascimento do Sol, no seu solstício de Verão, no ponto *G*, descrevamos um arco de círculo máximo, *FGH*. Ora, dado que a rotação do globo terrestre se efectua à volta de *F*, o pólo do equador, os pontos *G* e *H* têm necessariamente de atingir o meridiano *ABCD* ao mesmo tempo, uma vez que os paralelos são descritos à volta dos mesmos pólos. Os círculos máximos que passam por estes pólos dão origem a arcos iguais. Portanto, o mesmo tempo que medeia entre o nascimento do Sol em *G* e o meio-dia, é igualmente a medida do arco *AEH*, e de *CH*, o arco do semicírculo abaixo do horizonte, o tempo que vai da meia-noite até o nascimento do Sol. Ora *AEC* é um semicírculo. *AE* e *EC* são quadrantes, dado que foram traçados do pólo de *ABCD*. Assim *EH* será metade da dife-



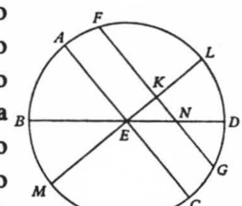
rença entre o dia mais longo e o dia equinocial. *EG* é a diferença entre os nascimentos equinociais e solsticiais do Sol. Assim, no triângulo *EHG*, o ângulo da obliquidade da esfera é conhecido através do arco *AB*. *GHE* é um ângulo recto. O lado *GH* também é conhecido, como distância angular entre o solstício do Verão e o equador. Por conseguinte, de acordo com o teorema IV sobre os triângulos esféricos, os lados restantes são também dados: *EH*, metade da diferença entre o dia equinocial e o dia mais longo e do mesmo modo *GE*, a distância entre os nascimentos do Sol. Além disto, se, juntamente com o lado *GH*, o lado *EH*, a diferença entre o dia mais longo e o dia equinocial ou *EG* é dado, *E*, o ângulo da inclinação da esfera é também dado e portanto *FD*, altura do polo acima do horizonte.

Se não for dado o solstício mas outro ponto, *G*, na eclíptica, os arcos *EG* e *EH* serão conhecidos. Dado que *GH*, como arco que é da declinação correspondente àquele grau da eclíptica, se encontra servindo-nos da Tabela das declinações atrás apresentada, o mesmo acontecendo com todas as outras quantidades, os graus da eclíptica que são equidistantes do solstício definem os mesmos arcos do horizonte em relação ao nascimento do Sol equinocial, e na mesma direcção. Eles fazem também com que os dias e as noites tenham a mesma duração. Isto é assim porque os mesmos paralelos de latitude contêm ambos os graus da eclíptica, uma vez que a sua declinação é igual e na mesma direcção. Mas se arcos iguais forem tomados em ambas as direcções a partir da intersecção com o equador, novamente as distâncias entre os nascimentos do Sol resultam iguais. No entanto em direcções opostas e em ordem inversa, a duração dos dias e das noites também resulta igual, porque nos dois lados descrevem arcos iguais dos paralelos de latitude, precisamente como os pontos [da eclíptica] equidistantes do equinócio têm iguais declinações em relação ao equador.

Assim, na mesma figura, descrevamos arcos de paralelos de latitude. Sejam eles *GM* e *KN*, que intersectem o horizonte *BED* nos pontos *G* e *K*. A partir de *L*, pólo Sul, descrevamos também *LKO* como quadrante de um círculo máximo. Como a declinação *HG* é igual a *KO*, haverá dois triângulos *DFG* e *BLK* em que dois lados são iguais aos dois lados correspondentes: *FG* a *LK* e *FD*, a altura dos pólos, a *LB*. *B* e *D* são ângulos rectos. Por conseguinte, o terceiro lado do primeiro triângulo. *DG* é igual ao terceiro lado *BK*. Os restantes, *GE* e *EK*, distâncias entre os nascimentos, são iguais também. Logo dois lados, *EG* e *GH*, são iguais a dois lados, *EK* e *KO*. Pela adição das partes segue-se que todo o arco *OEC* é igual a todo o arco *AEH*. Mas os círculos máximos que passam pelos pólos definem arcos semelhantes de círculos paralelos, na esfera, *GM* e *KN* também serão semelhantes e iguais. Q.E.D.



Mas tudo isto se pode também demonstrar por outro método. Tracemos o meridiano da mesma forma. Seja *E* o seu centro, *AEC* o diâmetro do equador e a sua intersecção com o meridiano, *BED* o diâmetro do horizonte e a linha meridiana *LEM* o eixo da esfera, *L* o pólo visível e *M* o pólo invisível. Tomemos *AF* como a distância entre o solstício do Verão ou qualquer outra declinação. Nesta declinação tracemos *FG* como o diâmetro de um paralelo de latitude e também como a intersecção do paralelo com o meridiano *FG* intersecte o eixo em *K* e a linha meridiana em *N*. Ora, dado que as paralelas, segundo a definição de Possidónio, são linhas que se não aproximam nem se afastam nunca uma da outra, e as linhas perpendiculares a uma e outra são iguais em toda a parte, segue-se que a linha perpendicular *KE* será igual a metade da corda subentendida pelo arco duplo de *AF*. De modo semelhante, em reação ao paralelo de latitude cujo raio é *FK*, *KN* será metade da corda correspondente ao arco duplo de *AF*. De modo semelhante, em relação ao paralelo de latitude cujo raio é *FK*, *KN* será



metade da corda correspondente ao arco equivalente à diferença entre o dia equinocial e o dia desigual. Isto é assim porque todos os semicírculos, de que são estas as linhas de intersecção, isto é, cujos diâmetros são estas linhas, designadamente *BED* do horizonte oblíquo, *LEM* do horizonte recto, *AEC* do equador e *FKG* do paralelo de latitude, são perpendiculares ao plano do círculo *ABCD*. E, segundo o teorema XI do livro 19.º dos *Elementos* de Euclides, as linhas em que estes semicírculos se intersectam umas às outras são perpendiculares ao mesmo plano nos pontos *E, K* e *N*. De acordo como o 6.º teorema do mesmo livro, estas perpendiculares são paralelas umas às outras. *K* é o centro do paralelo de latitude e *E* o centro da esfera. Portanto *EN* é a metade da corda correspondente ao duplo do arco do horizonte, que é a diferença entre o nascimento do Sol no paralelo e o nascimento do Sol equinocial. Assim, uma vez que a declinação *AF* é dada, conjuntamente com o resto do quadrante *FL, KE* é dado como metade da corda correspondente ao dobro do arco *AF*, e *FK* como metade da corda correspondente a metade do arco *FL*, no sistema de unidades em que *AE* tem 100 000 unidades. Mas no triângulo rectângulo *EKN*, o ângulo *KEN* é dado a altura do pólo. O ângulo complementar *KNE* é igual a *AEB*, porque numa esfera oblíqua os paralelos [de latitude] estão igualmente inclinados para o horizonte e por isso os lados são dados no sistema de unidades em que o raio tem 100 000 unidades. Assim, se o raio do paralelo *FK* tem 100 000 unidades, *KN* também será dado. E, como metade da corda correspondente à diferença inteira entre o dia equinocial e o do paralelo de latitude, KN será dado naquelas unidades do sistema em que o paralelo, como círculo que é, mede 360º. Assim a razão entre *FK* e *KN* compõe-se claramente de duas razões, designadamente a razão entre a corda correspondente ao dobro de *FL* e a corda correspondente ao dobro de *AF*, isto é, *FK* está para KE, e a razão entre a corda correspondente ao dobro de *AB* e a corda correspondente ao dobro de *DL*. A última razão é, *EK* para *KN*, sendo naturalmente *EK* tomado como o meio proporcional entre *FK* e *KN*. De modo semelhante a razão entre *BE* e *EM* é igualmente formada pelas razões entre *BE* e *EK* e entre *KE* e *EN*, como Ptolomeu mostra com mais pormenor por meio dos segmentos esféricos [*Almagesto*, I, 13]. Deste modo, julgo eu, encontra-se a desigualdade dos dias e das noites. Mas também no caso da Lua e de quaisquer estrelas em que é dada a declinação, os segmentos dos paralelos de latitude descritos por elas na rotação diária acima do horizonte, distinguem-se destes segmentos facilmente podemos compreender os seus nascimentos e ocasos.

TABELA DAS ASCENSÕES EM ESFERA OBLÍQUA

Eclíptica	Altura do Pólo											
	31		32		33		34		35		36	
Grau	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto
1	0	36	0	37	0	39	0	40	0	42	0	44
2	1	12	1	15	1	18	1	21	1	24	1	27
3	1	48	1	53	1	57	2	2	2	6	2	11
4	2	24	2	30	2	36	2	42	2	48	2	55
5	3	1	3	8	3	15	3	23	3	31	3	39
6	3	37	3	46	3	55	4	4	4	13	4	23
7	4	14	4	24	4	34	4	45	4	56	5	7
8	4	51	5	2	5	14	5	26	5	39	5	52
9	5	28	5	41	5	54	6	8	6	22	6	36
10	6	5	6	20	6	35	6	50	7	6	7	22
11	6	42	6	59	7	15	7	32	7	49	8	7
12	7	20	7	38	7	56	8	15	8	34	8	53
13	7	58	8	18	8	37	8	58	9	18	9	39
14	8	37	8	58	9	19	9	41	10	3	10	26
15	9	16	9	38	10	1	10	25	10	49	11	14
16	9	55	10	19	10	44	11	9	11	35	12	2
17	10	35	11	1	11	27	11	54	12	22	12	50
18	11	16	11	43	12	11	12	40	13	9	13	39
19	11	56	12	25	12	55	13	26	13	57	14	29
20	12	38	13	9	13	40	14	13	14	46	15	20
21	13	20	13	53	14	26	15	0	15	36	16	12
22	14	3	14	37	15	13	15	49	16	27	17	5
23	14	47	15	23	16	0	16	38	17	17	17	58
24	15	31	16	9	16	48	17	29	18	10	18	52
25	16	16	16	56	17	38	18	20	19	3	19	48
26	17	2	17	45	18	28	19	12	19	58	20	45
27	17	50	18	34	19	19	20	6	20	54	21	44
28	18	38	19	24	20	12	21	1	21	51	22	43
29	19	27	20	16	21	6	21	57	22	50	23	45
30	20	18	21	9	22	1	22	55	23	51	24	48
31	21	10	22	3	22	58	23	55	24	53	25	53
32	22	3	22	59	23	56	24	56	25	57	27	0
33	22	57	23	54	24	19	25	59	27	3	28	9
34	23	55	24	56	25	59	27	4	28	10	29	21
35	24	53	25	57	27	3	28	10	29	21	30	35
36	25	53	27	0	28	9	29	21	30	35	31	52

TABELA DAS ASCENSÕES EM ESFERA OBLÍQUA

Eclíptica	Altura do Pólo											
	37		38		39		40		41		42	
Grau	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto
1	0	45	0	47	0	49	0	50	0	52	0	54
2	1	31	1	34	1	37	1	41	1	44	1	48
3	2	16	2	21	2	26	2	31	2	37	2	42
4	3	1	3	8	3	15	3	22	3	29	3	37
5	3	47	3	55	4	4	4	13	4	22	4	31
6	4	33	4	43	4	53	5	4	5	15	5	26
7	5	19	5	30	5	42	5	55	6	8	6	21
8	6	5	6	18	6	32	6	46	7	1	7	16
9	6	51	7	6	7	22	7	38	7	55	8	12
10	7	38	7	55	8	13	8	30	8	49	9	8
11	8	25	8	44	9	3	9	23	9	44	10	5
12	9	13	9	34	9	55	10	16	10	39	11	2
13	10	1	10	24	10	46	11	10	11	35	12	0
14	10	50	11	14	11	39	12	5	12	31	12	58
15	11	39	12	5	12	32	13	0	13	28	13	58
16	12	29	12	57	13	26	13	55	14	26	14	58
17	13	19	13	49	14	20	14	52	15	25	15	59
18	14	10	14	42	15	15	15	49	16	24	17	1
19	15	2	15	36	16	11	16	48	17	25	18	4
20	15	55	16	31	17	8	17	47	18	27	19	8
21	16	49	17	27	18	7	18	47	19	30	20	13
22	17	44	18	24	19	6	19	49	20	34	21	20
23	18	39	19	22	20	6	20	52	21	39	22	28
24	19	36	20	21	21	8	21	56	22	46	23	38
25	20	34	21	21	22	11	23	2	23	55	24	50
26	21	34	22	24	23	16	24	10	25	5	26	3
27	22	35	23	28	24	22	25	19	26	17	27	18
28	23	37	24	33	25	30	26	30	27	31	28	36
29	24	41	25	40	26	40	27	43	28	48	29	57
30	25	47	26	49	27	52	28	59	30	7	31	19
31	26	55	28	0	29	7	30	17	31	29	32	45
32	28	5	29	13	30	54	31	31	32	54	34	14
33	29	18	30	29	31	44	33	1	34	22	35	47
34	30	32	31	48	33	6	34	27	35	54	37	24
35	31	51	33	10	34	33	35	59	37	30	39	5
36	33	12	34	35	36	2	37	34	39	10	40	51

TABELA DAS ASCENSÕES EM ESFERA OBLÍQUA

Eclíptica	Altura do Pólo											
	43		44		45		46		47		48	
Grau	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto
1	0	56	0	58	1	0	1	2	1	4	1	7
2	1	52	1	56	2	0	2	4	2	9	2	13
3	2	48	2	54	3	0	3	7	3	13	3	20
4	3	44	3	52	4	1	4	9	4	18	4	27
5	4	41	4	51	5	1	5	12	5	23	5	35
6	5	37	5	50	6	2	6	15	6	28	6	42
7	6	34	6	49	7	3	7	18	7	34	7	50
8	7	32	7	48	8	5	8	22	8	40	8	59
9	8	30	8	48	9	7	9	26	9	47	10	8
10	9	28	9	48	10	9	10	31	10	54	11	18
11	10	27	10	49	11	13	11	37	12	2	12	28
12	11	26	11	51	12	16	12	43	13	11	13	39
13	12	26	12	53	13	21	13	50	14	20	14	51
14	13	27	13	56	14	26	14	58	15	30	16	5
15	14	28	15	0	15	32	16	7	16	42	17	19
16	15	31	16	5	16	40	17	16	17	54	18	34
17	16	34	17	10	17	48	18	27	19	8	19	51
18	17	38	18	17	18	58	19	40	20	23	21	9
19	18	44	19	25	20	9	20	53	21	40	22	29
20	19	50	20	35	21	21	22	8	22	58	23	51
21	20	59	21	46	22	34	23	25	24	18	25	14
22	22	8	22	58	23	50	24	44	25	40	26	40
23	23	19	24	12	25	7	26	5	27	5	28	8
24	24	32	25	28	26	26	27	27	28	31	29	38
25	25	47	26	46	27	48	28	52	30	0	31	12
26	27	3	28	6	29	11	30	20	31	32	32	48
27	28	22	29	29	30	38	31	51	33	7	34	28
28	29	44	30	54	32	7	33	25	34	46	36	12
29	31	8	32	22	33	40	35	2	36	28	38	0
30	32	35	33	53	35	16	36	43	38	15	39	53
31	34	5	35	28	36	56	38	29	40	7	41	52
32	35	38	37	7	38	40	40	19	42	4	43	57
33	37	16	38	50	40	30	42	15	44	8	46	9
34	38	58	40	39	42	25	44	18	46	20	48	31
35	40	46	42	33	44	27	46	23	48	36	51	3
36	42	39	44	33	46	36	48	47	51	11	53	47

TABELA DAS ASCENSÕES EM ESFERA OBLÍQUA

Eclíp-tica-	Altura do Pólo											
	49		50		51		52		53		54	
Grau	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto
1	1	9	1	12	1	14	1	17	1	20	1	23
2	2	18	2	23	2	28	2	34	2	39	2	45
3	3	27	3	35	3	43	3	51	3	59	4	8
4	4	37	4	47	4	57	5	8	5	19	5	31
5	5	47	5	50	6	12	6	26	6	40	6	55
6	6	57	7	12	7	27	7	44	8	1	8	19
7	8	7	8	25	8	43	9	2	9	23	9	44
8	9	18	9	38	10	0	10	22	10	45	11	9
9	10	30	10	53	11	17	11	42	12	8	12	35
10	11	42	12	8	12	35	13	3	13	32	14	3
11	12	55	13	24	13	53	14	24	14	57	15	31
12	14	9	14	40	15	13	15	47	16	23	17	0
13	15	24	15	58	16	34	17	11	17	50	18	32
14	16	40	17	17	17	56	18	37	19	19	20	4
15	17	57	18	39	19	19	20	4	20	50	21	38
16	19	16	19	59	20	44	21	32	22	22	23	15
17	20	36	21	22	22	11	23	2	23	56	24	53
18	21	57	22	47	23	39	24	34	25	33	26	34
19	23	20	24	14	25	10	26	9	27	11	28	17
20	24	45	25	42	26	43	27	46	28	53	30	4
21	26	12	27	14	28	18	29	26	30	37	31	54
22	27	42	28	47	29	56	31	8	32	25	33	47
23	29	14	30	23	31	37	32	54	34	17	35	45
24	31	4	32	3	33	21	34	44	36	13	37	48
25	32	26	33	46	35	10	36	39	38	14	39	59
26	34	8	35	32	37	2	38	38	40	20	42	10
27	35	53	37	23	39	0	40	42	42	33	44	32
28	37	43	39	19	41	2	42	53	44	53	47	2
29	39	37	41	21	43	12	45	12	47	21	49	44
30	41	37	43	29	45	29	47	39	50	1	52	37
31	43	44	45	44	47	54	50	16	52	53	55	48
32	45	57	48	8	50	30	53	7	56	1	59	19
33	48	19	50	44	53	20	56	13	59	28	63	21
34	50	54	53	30	56	20	59	42	63	31	68	11
35	53	40	56	34	59	58	63	40	68	18	74	32
36	56	42	59	59	63	47	68	26	74	36	90	0

TABELA DAS ASCENSÕES EM ESFERA OBLÍQUA

Eclíptica	Altura do Pólo											
	55		56		57		58		59		60	
Grau	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto	Grau	Minuto
1	1	26	1	29	1	32	1	36	1	40	1	44
2	2	52	2	58	3	5	3	12	3	20	3	28
3	4	17	4	27	4	38	4	49	5	0	5	12
4	5	44	5	57	6	11	6	25	6	41	6	57
5	7	11	7	27	7	44	8	3	8	22	8	43
6	8	38	8	58	9	19	9	41	10	4	10	29
7	10	6	10	29	10	54	11	20	11	47	12	17
8	11	35	12	1	12	30	13	0	13	32	14	5
9	13	4	13	35	14	7	14	41	15	17	15	55
10	14	35	15	9	15	45	16	23	17	4	17	47
11	16	7	16	45	17	25	18	8	18	53	19	41
12	17	40	18	22	19	6	19	53	20	43	21	36
13	19	15	20	1	20	50	21	41	22	36	23	34
14	20	52	21	42	22	35	23	31	24	31	25	35
15	22	30	23	24	24	22	25	23	26	29	27	39
16	24	10	25	9	26	12	27	19	28	30	29	47
17	25	53	26	57	28	5	29	18	30	35	31	59
18	27	39	28	48	30	1	31	20	32	44	34	19
19	29	27	30	41	32	1	33	26	34	58	36	37
20	31	19	32	39	34	5	35	37	37	17	39	5
21	33	15	34	41	36	14	37	54	39	42	41	40
22	35	14	36	48	38	28	40	17	42	15	44	25
23	37	19	39	0	40	49	42	47	44	57	47	20
24	39	29	41	18	43	17	45	26	47	49	50	27
25	41	45	43	44	45	54	48	16	50	54	53	52
26	44	9	46	18	48	41	51	19	54	16	57	39
27	46	41	49	4	51	41	54	38	58	0	61	57
28	49	24	52	1	54	58	58	19	62	14	67	4
29	52	20	55	16	58	36	62	31	67	18	73	46
30	55	32	58	52	62	45	67	31	73	55	90	0
31	59	6	62	58	67	42	74	4	90	0		
32	63	10	67	53	74	12	90	0				
33	68	1	74	19	90	0						
34	74	33	90	0								
35	90	0										
36												

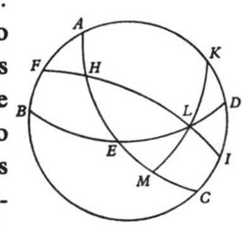
Os espaços em branco correspondem a estrelas que não são visíveis.

AS HORAS E PARTES DO DIA E DA NOITE

Destes dados resulta claramente que, se em relação a uma determinada altura do pólo tomarmos a diferença em dias, como está indicada na Tabela para uma declinação do Sol, e a juntarmos a um quadrante, tratando-se de uma declinação Norte, ou a subtrairmos, tratando-se de uma declinação Sul, multiplicando o resultado por dois, teremos a duração daquele dia e a duração da noite, sendo esta o que falta para um círculo. Se dividirmos qualquer dos dois por quinze graus do equador, obteremos o resultado em horas iguais. Por outro lado, tomando um duodécimo da duração do dia, encontraremos a duração de uma hora sasonal. Estas têm o nome de acordo com o dia do ano, sendo sempre uma duodécima parte dele. Assim, verificamos que os antigos falavam de horas do solstício de Verão, horas dos equinócios e horas do solstício de Inverno. A noite, dividiam-na em quatro vigílias ou guardas. Este sistema de horas prolongou-se durante muito tempo por consenso comum dos povos. Por causa disso se inventaram as clepsidras. Acrescentando ou diminuindo a quantidade de água que devia cair, variava a duração das horas para se adaptarem à variação da duração dos dias. Mas depois que foram geralmente aceites as horas iguais, usadas para o dia e para a noite, por serem mais fáceis de observar, foram postas de parte as horas sasonais. Assim, se perguntassem ao homem comum o que era a primeira, terceira, sexta, nona ou undécima hora do dia, não daria qualquer resposta ou, se a desse, ela nada tinha a ver com o caso. Assim mesmo as horas iguais são contadas por uns a partir do meio-dia, por outros a partir do pôr do Sol ou da meia--noite, segundo o sistema adoptado por cada nação.

A ASCENSÃO OBLÍQUA DOS GRAUS DA ECLÍPTICA. COMO DETERMINAR QUE GRAU ESTÁ NO PONTO MÉDIO DO CÉU QUANDO ALGUM OUTRO GRAU ESTÁ A NASCER

Tendo exposto a duração e as diferenças dos dias e das noites, seguem-se, dentro da ordem adoptada, as ascensões oblíquas, isto é, os «tempos» durante os quais as dodecatemórias, isto é, os doze signos do Zodíaco, ou quaisquer outros arcos do zodíaco nascem, uma vez que não há outras diferenças entre as ascensões rectas e oblíquas senão as que existem entre os dias equinociais e os dias desiguais, tal como dissemos. Nos tempos antigos deram-se nomes de seres vivos aos doze signos do Zodíaco, que se compõem de estrelas fixas. Começando pelo equinócio da Primavera, deram-se aos signos os nomes seguintes: Áries, Touro, Gémeos, Câncer, etc., pela ordem em que se seguem.



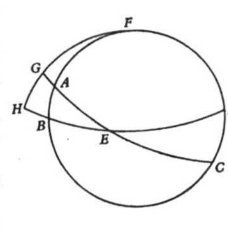
Para maior clareza, voltaremos pois ao círculo *ABCD*. Seja *AEC* o semicírculo do equador e *BED* o semicírculo do horizonte, que intersecta aquele no ponto *E*. Tomemos agora *H* como equinócio de modo que a eclíptica, *FHI*, que passa por ele, intersecta o horizonte em *L*. Por este ponto de intersecção, a partir do pólo *K* do equador, construamos o quadrante do círculo máximo *KLM*. Assim, vê-se facilmente que ao mesmo tempo que o arco da eclíptica, *HL*, nasce o arco *HE* do equador, enquanto na esfera recta nasceu *HL* ao mesmo tempo que *HEM*. A diferença entre estes dois é *EM* que, como mostrámos atrás[II, 7] é metade da diferença entre o dia equinocial e o dia desigual. Mas o que se juntou, nesse caso, em relação a uma declinação Norte é aqui subtraído. Por outro lado, numa declinação Sul junta-se esse valor à ascensão recta para obter a ascensão oblíqua. De acordo com isto, as ascensões calculadas a partir do começo do signo ou de outro arco da eclíptica mostrarão quanto tempo levarão a nascer um signo ou esse arco do início ao final do signo ou do arco. Daqui resulta que quando qualquer grau da eclíptica, medido a partir do equinócio, é dado quando nasce, o grau que está no meio do céu também é dado.

Com efeito, sendo *L* o ponto que está a nascer na eclíptica, dada a sua declinação através de *HL*, a sua distância ao equinócio, a sua ascensão recta *HEM* e todo o *AHEM* como o arco do meio-dia, então *AH*, a diferença *AHEM* e *HEM*, também é dado. Esta é a ascensão recta de *FH* que é dada pela Tabela ou também porque *AHF*, o ângulo da obliquidade, é dado, juntamente com o lado *AH*, enquanto *FAH* é um ângulo recto. Por conseguinte todo o arco *FHL* da eclíptica é dado entre o grau do nascimento e o grau no meio do céu. Inversamente, se é dado o grau no meio do céu, por exemplo, o arco *FH*, também conhecemos o grau que está a nascer. Com efeito, a declinação *AF* será obtida assim como *AFB*, através do ângulo de obliquidade da esfera e igualmente *FB*, a diferença entre *AFB* e *AF*. Assim no triângulo *BFL*, o ângulo *BFL* é dado de acordo com o que se acaba de dizer e *FB*, o lado, também. *FBL* é um ângulo recto. Por conseguinte o lado procurado, *FHL*, é dado. Vem a seguir outro método de o conseguir.

O ÂNGULO SEGUNDO O QUAL A ECLÍPTICA INTERSECTA O HORIZONTE

Além disto, sendo a eclíptica um círculo oblíquo ao eixo da esfera, faz vários ângulos com o horizonte. Efectivamente é perpendicular ao horizonte duas vezes para aqueles que vivem entre os trópicos, como já dissemos ao tratarmos das diferenças das sombras [II, 6]. Entretanto, eu penso que para nós basta falar apenas daqueles ângulos que se referem aos Heteróscios, isto é, a nós próprios, a partir do que será fácil de compreender a relação geral entre eles. Penso que é claramente evidente que, numa esfera oblíqua, quando o equinócio ou a primeira estrela de Áries estão a nascer, a eclíptica está tanto mais inclinada e desviada para o horizonte quanto a sua inclinação máxima para o Sul aumenta. Esta inclinação é medida quando a primeira estrela do Capricórnio ocupa o meio do céu. Por outro lado, quando a eclíptica está a maior altura faz um ângulo de nascimento maior na altura em que o primeiro ponto da Balança nasce, e o primeiro ponto do Câncer está no meio do céu. Julgo estas afirmações suficientemente evidentes. Com efeito, estes três círculos, o equador, a eclíptica e o horizonte, passando pela mesma intersecção, encontram-se nos pólos do meridiano. Os arcos daquele círculo que eles definem mostram claramente quão grande terá de ser o ângulo do nascimento.

Para que se torne claramente compreensível o processo de medir os outros graus da eclíptica, seja *ABCD* novamente o meridiano, *BED* um semicírculo do horizonte, *AEC* um semicírculo da eclíptica, e um qualquer grau da eclíptica que nasça em *E*. É necessário que encontremos que a medida do ângulo *AEB* no sistema de medidas em que 360° valem quatro ângulos rectos. Visto que *E* é dado como o grau em que nasce, o grau no meio do céu é também dado,



de acordo com a demonstração anterior, e também o arco *AE* juntamente com a altura meridiano *AB*. Ora, como o ângulo *ABE* é um ângulo recto, a razão entre a corda correspondente ao dobro de *AE* e a corda correspondente ao dobro do arco *AB* é dada como igual à razão entre o diâmetro da esfera e a corda correspondente ao dobro do arco definido pelo ângulo *AEB*. Disto resulta que também é dado o ângulo *AEB*. Mas se não for o grau que nasce a ser dado e se for o que está no meio do céu, isto é, *A*, mesmo então o ângulo do nascimento será medido. Com efeito, tomando como pólo o ponto *E*, descrevamos o quadrante de um círculo máximo, *FGH*, e completemos os quadrantes *EAG* e *EBH*.

Assim dados *AB*, a altura do meridiano, *AF*, a diferença entre *FAB* e *AF*, *FAG* também é dado, segundo o que se disse atrás, e *FAG* é um ângulo recto. Por conseguinte o arco *FG* é dado bem como *GH*, a diferença entre *FGH* e *FG*, que mede o ângulo do nascimento procurado. Também neste caso é bem claro como, dado o grau no meio do céu, é dado igualmente o grau no nascimento. Com efeito, a razão entre a corda correspondente ao dobro de *GH* e a corda correspondente ao dobro de *AB* é igual à razão entre o diâmetro e a corda correspondente ao dobro de *AE*, como se diz nos triângulos esféricos [I, 14, Teorema III].

Para estas relações juntámos também três espécies de Tabelas. A primeira será das ascensões na esfera recta, começando em Áries, com intervalos de 6.º da eclíptica. A segunda será das ascensões na esfera oblíqua, igualmente com intervalos de 6°, a partir do paralelo de latitude cuja altura do pólo é 39°, em semi-intervalos de 3°, até ao paralelo cujo pólo tem 57° de altura. A terceira Tabela é a dos ângulos formados com o horizonte, também em intervalos de 6º, com as mesmas sete colunas. Tudo isto se baseia na obliquidade mínima da eclíptica, calculada em 23° 28′ que é quase exacta para a nossa época.

TABELA DAS ASCENSÕES DOS SIGNOS ZODIACAIS NA REVOLUÇÃO DA ESFERA RECTA

Eclíptica		Ascensão		Por Grau		Eclíptica		Ascensão		Por Grau	
Signo	Gr.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Signo	Gr.	Gr.	Min.	Gr.	Min.
♈	6	5	30	0	55	♎	6	185	30	0	55
	12	11	0	0	55		12	191	0	0	55
	18	16	34	0	56		18	196	34	0	56
	24	22	10	0	56		24	202	10	0	56
	30	27	54	0	57		30	207	54	0	57
♉	6	33	43	0	58	♏	6	213	43	0	58
	12	39	35	0	59		12	219	35	0	59
	18	45	32	1	0		18	225	32	1	0
	24	51	37	1	1		24	231	37	1	1
	30	57	48	1	2		30	237	48	1	2
♊	6	64	6	1	3	♐	6	244	6	1	3
	12	70	29	1	4		12	250	29	1	4
	18	76	57	1	5		18	256	57	1	5
	24	83	27	1	5		24	263	27	1	5
	30	90	0	1	5		30	270	0	1	5
♋	6	96	33	1	5	♑	6	276	33	1	5
	12	103	3	1	5		12	283	3	1	5
	18	109	31	1	5		18	289	31	1	5
	24	115	54	1	4		24	295	54	1	4
	30	122	12	1	3		30	302	12	1	3
♌	6	128	23	1	2	♒	6	308	23	1	2
	12	134	28	1	1		12	314	28	1	1
	18	140	25	1	0		18	320	25	1	0
	24	146	17	0	59		24	326	17	0	59
	30	152	6	0	58		30	332	6	0	58
♍	6	157	50	0	57	♓	6	337	50	0	57
	12	163	26	0	56		12	343	26	0	56
	18	169	0	0	56		18	349	0	0	56
	24	174	30	0	55		24	354	30	0	55
	30	180	0	0	55		30	360	0	0	55

TABELA DAS ASCENSÕES DA ESFERA OBLÍQUA

Eclíptica		Elevação do Pólo													
		39		42		45		48		51		54		57	
		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão	
Signo	Gr.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.
♈	6	3	34	3	20	3	6	2	50	2	32	2	12	1	49
	12	7	10	6	44	6	15	5	44	5	8	4	27	3	40
	18	10	50	10	10	9	27	8	39	7	47	6	44	5	34
	24	14	32	13	39	12	43	11	40	10	28	9	7	7	32
	30	18	26	17	21	16	11	14	51	13	26	11	40	9	40
♉	6	22	30	21	12	19	46	18	14	16	25	14	22	11	57
	12	26	39	25	10	23	32	21	42	19	38	17	13	14	23
	18	31	0	29	20	27	29	25	24	23	2	20	17	17	2
	24	35	38	33	47	31	43	29	25	26	47	23	42	20	2
	30	40	30	38	30	36	15	33	41	30	49	27	26	23	22
♊	6	45	39	43	31	41	7	38	23	35	15	31	34	27	7
	12	51	8	48	52	46	20	43	27	40	8	36	13	31	26
	18	56	56	54	35	51	56	48	56	45	28	41	22	36	20
	24	63	0	60	36	57	54	54	49	51	15	47	1	41	49
	30	69	25	66	59	64	16	61	10	57	34	53	28	48	2
♋	6	76	6	73	42	71	0	67	55	64	21	60	7	54	55
	12	83	2	80	41	78	2	75	2	71	34	67	28	62	26
	18	90	10	87	54	85	22	82	29	79	10	75	15	70	28
	24	97	27	95	19	92	55	90	11	87	3	83	22	78	55
	30	104	54	102	54	100	39	98	5	95	13	91	50	87	46
♌	6	112	24	110	33	108	30	106	11	103	33	100	28	96	48
	12	119	56	118	16	116	25	114	20	111	58	109	13	105	58
	18	127	29	126	0	124	23	122	32	120	28	118	3	115	13
	24	135	4	133	46	132	21	130	48	128	59	126	56	124	31
	30	142	38	141	33	140	23	139	3	137	38	135	52	133	52
♍	6	150	11	149	19	148	23	147	20	146	8	144	47	143	12
	12	157	41	157	1	156	19	155	29	154	38	153	36	153	24
	18	165	7	164	40	164	12	163	41	163	5	162	24	162	47
	24	172	34	172	21	172	6	171	51	171	33	171	12	170	49
	30	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0

TABELA DAS ASCENSÕES DA ESFERA OBLÍQUA

Eclíptica		Elevação do Pólo													
		39		42		45		48		51		54		57	
		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão	
Signo	Gr.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.
♎	6	187	26	187	39	187	54	188	9	188	27	188	48	189	11
	12	194	53	195	19	195	48	196	19	196	55	197	36	198	23
	18	202	21	203	0	203	41	204	30	205	24	206	25	207	36
	24	209	49	210	41	211	37	212	40	213	52	215	13	216	48
	30	217	22	218	27	219	37	220	57	222	22	224	8	226	8
♏	6	224	56	226	14	227	38	229	12	231	1	233	4	235	29
	12	232	31	234	0	235	37	237	28	239	32	241	57	244	47
	18	240	4	241	44	243	35	245	40	248	2	250	47	254	2
	24	247	36	249	27	251	30	253	49	256	27	259	32	263	12
	30	255	6	257	6	259	21	261	52	264	47	268	10	272	14
♐	6	262	33	264	41	267	5	269	49	272	57	276	38	281	5
	12	269	50	272	6	274	38	277	31	280	50	284	45	289	32
	18	276	58	279	19	281	58	284	58	288	26	292	32	297	34
	24	283	54	286	18	289	0	292	5	295	39	299	53	305	5
	30	290	35	293	1	295	45	298	50	302	26	306	42	311	58
♑	6	297	0	299	24	302	6	305	11	308	45	312	59	318	11
	12	303	4	305	25	308	4	311	4	314	32	318	38	323	40
	18	308	52	311	8	313	40	316	33	319	52	323	47	328	34
	24	314	21	316	29	318	53	321	37	324	45	328	26	332	53
	30	319	30	321	30	323	45	326	19	329	11	332	34	336	38
♒	6	324	21	326	13	328	16	330	35	333	13	336	18	339	58
	12	329	0	330	40	332	31	334	36	336	58	339	43	342	58
	18	333	21	334	50	336	27	338	18	340	22	342	47	345	37
	24	337	30	338	48	340	3	341	46	343	35	345	38	348	3
	30	341	34	342	39	343	49	345	9	346	34	348	20	350	20
♓	6	345	29	346	21	347	17	348	20	349	32	350	53	352	28
	12	349	11	349	51	350	33	351	21	352	14	353	16	354	26
	18	352	50	353	16	353	45	354	16	354	52	355	33	356	20
	24	356	26	356	40	356	23	357	10	357	53	357	48	358	11
	30	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0

TABELA DOS ÂNGULOS ENTRE A ECLÍPTICA E O HORIZONTE

Eclíptica		39		42		45		48		51		54		57		Eclíptica	
		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão		Ascensão			
Signo	Gr.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Min.	Gr.	Signo
♈	0	27	32	24	32	21	32	18	32	15	32	12	32	9	32	30	
	6	27	37	24	36	21	36	18	36	15	35	12	35	9	35	24	
	12	27	49	24	49	21	48	18	47	15	45	12	43	9	41	18	
	18	28	13	25	9	22	6	19	3	15	59	12	56	9	53	12	
	24	28	45	25	40	22	34	19	29	16	23	13	18	10	13	6	♓
	30	29	27	26	15	23	11	20	5	16	56	13	45	10	31	30	
♉	6	30	19	27	9	23	59	20	48	17	35	14	20	11	2	24	
	12	31	21	28	9	24	56	21	41	18	23	15	3	11	40	18	
	18	32	35	29	20	26	3	22	43	19	21	15	56	12	26	12	
	24	34	5	30	43	27	23	24	2	20	41	16	59	13	20	6	♒
	30	35	40	32	17	28	52	25	26	21	52	18	14	14	26	30	
♊	6	37	29	34	1	30	37	27	5	23	11	19	42	15	48	24	
	12	39	32	36	4	32	32	28	56	25	15	21	25	17	23	18	
	18	41	44	38	14	34	41	31	3	27	18	23	25	19	16	12	
	24	44	8	40	32	37	2	33	22	29	35	25	37	21	26	6	♑
	30	46	41	43	11	39	33	35	53	32	5	28	6	23	52	30	
♋	6	49	18	45	51	42	15	38	35	34	44	30	50	26	36	24	
	12	52	3	48	34	45	0	41	8	37	55	33	43	29	34	18	
	18	54	44	51	20	47	48	44	13	40	31	36	40	32	39	12	
	24	57	30	54	5	50	38	47	6	43	33	39	43	35	50	6	♐
	30	60	4	56	42	53	22	49	54	46	21	42	43	38	56	30	
♌	6	62	40	59	27	56	0	52	34	49	9	45	37	41	57	24	
	12	64	59	61	44	58	26	55	7	51	46	48	19	44	48	18	
	18	67	7	63	56	60	20	57	26	54	6	50	47	47	24	12	
	24	68	59	65	52	62	42	59	30	56	17	53	7	49	47	6	♏
	30	70	38	67	27	64	18	61	17	58	9	54	58	52	38	30	
♍	6	72	0	68	53	65	51	62	46	59	37	56	27	53	16	24	
	12	73	4	70	2	66	59	63	56	60	53	57	50	54	46	18	
	18	73	51	70	50	67	49	64	48	61	46	58	45	55	44	12	
	24	74	19	71	20	68	20	65	19	62	18	59	17	56	16	6	
	30	74	28	71	28	68	28	65	28	62	28	59	28	56	28	0	♎

O USO DESTAS TABELAS

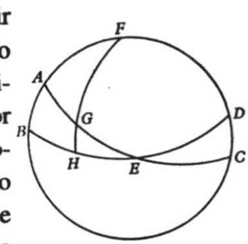
O uso destas Tabelas é, pois, perfeitamente claro tendo em conta o que se demonstrou. Com efeito se, conhecido o grau do Sol, tomarmos a ascensão recta e lhe juntarmos, em relação a qualquer hora igual, 15° graus do equador, pondo no total de lado os graus que excederem 360° de um círculo inteiro, o resto da ascensão recta mostrará o grau correspondente da eclíptica no meio do céu, na hora referida, a partir do meio-dia. Se fizermos o mesmo com a ascensão oblíqua para a nossa região, obteremos do mesmo modo o grau da eclíptica que nasce, numa hora contada a partir do nascer do Sol. Além disso, no caso das estrelas situadas fora do zodíaco, sendo a ascensão recta delas conhecida, como demonstrámos atrás [II, 9], podemos encontrar nestas Tabelas os graus da eclíptica que estão no meio do céu com estas estrelas, por meio da mesma ascensão recta, partindo do primeiro ponto de Áries. A ascensão oblíqua dessas estrelas dá o grau da eclíptica que nasce com elas, pois as Tabelas mostram-nos imediatamente as ascensões e os graus da eclíptica. Empregamos o mesmo método para o seu ocaso, mas sempre no lado oposto. Por outro lado, se acrescentarmos um quadrante de um círculo à ascensão recta no meio do céu, o resultado é a ascençāo oblíqua do grau que está a nascer, e inversamente.

Segue-se uma Tabela de ângulos definidos pela eclíptica com o horizonte, que são determinados pelo grau da eclíptica no seu nascimento. Deles se pode deduzir também qual a altura do nonagésimo grau da eclíptica a partir do horizonte. É indispensável conhecer esta altura quando se trata dos eclipses do Sol.

OS ÂNGULOS E OS ARCOS DOS CÍRCULOS QUE PASSAM PELOS PÓLOS DO HORIZONTE PARA A ECLÍPTICA

Vamos expor a seguir a teoria dos ângulos e dos arcos formados na intersecção da eclíptica com os círculos que passam pelo zénite do horizonte e nos quais se toma a altura acima do horizonte. Ora, a altura do Sol ao meio-dia, ou de qualquer grau da eclíptica no meio do céu, e o ângulo da intersecção da eclíptica com o meridiano, foram tratados atrás [II, 10]. Com efeito, o meridiano é também um dos círculos que passam pelo zénite do horizonte. Já falámos também do ângulo do nascimento. Quando este ângulo é subtraído de um ângulo recto, o resto é o ângulo definido pela eclíptica quando nasce e um quadrante que passa pelo zénite do horizonte. Resta, pois, examinar as intersecções médias, voltando à figura anterior [II, 10], isto é, as intersecções do meridiano com os semicírculos da eclíptica e do horizonte.

Tomemos qualquer ponto da eclíptica entre o meio-dia e o nascer ou pôr do Sol, por exemplo, *G*. Por ele, a partir do pólo *F* do horizonte, tracemos o quadrante *FGH*. Devido à hora indicada todo o arco *AGE* da eclíptica, entre o meridiano e o horizonte, é dado, juntamente com *AG*, por hipótese. Igualmente é dado *AF*, porque a altura ao meio-dia também é dada, juntamente com o ângulo meridiano *FAG*. Assim, também é dado *FG*, segundo o que se demonstrou a respeito dos triângulos esféricos. A mesma coisa acontece com *GH*, diferença entre *FGH* e *FG*, que é a altura de *G*, juntamente com o ângulo *FGA*. Estes eram os



valores que procurávamos. Estes dados sobre os ângulos e intersecções da eclíptica, colhemo-los sumariamente em Ptolomeu, reproduzindo o que se tem ensinado em geral sobre triângulos esféricos. Quem desejar trabalhar sobre este assunto poderá por si mesmo encontrar mais aplicações do que aquelas que apresentámos apenas como exemplos.

[Uma versão anterior da parte final de II, 12 aparece no autógrafo no fólio 46, sem qualquer indicação de que tinha sido substituída. Começa no meio da segunda frase, do segundo parágrafo abaixo, com a escolha de qualquer ponto na elíptica] entre o nascer e o acaso do Sol. Seja η, com o seu quadrante $\zeta\eta\vartheta$. Através da hora designada, o arco $\alpha\eta\varepsilon$ é-nos dado do mesmo modo que $\alpha\eta$ e asim como com o ângulo meridiano $\alpha\zeta$. Deste modo, em concordância com o Teorema XI sobre *Triângulos Esféricos*, o arco $\zeta\eta$ é dado assim como o ângulo $\zeta\eta\alpha$. Este era o que nós procurávamos. Agora as proporções das cordas subentendem duas vezes os arcos $\eta\vartheta$ e $\varepsilon\eta$ e as cordas subentendendo duas vezes os arcos $\varepsilon\alpha$ e $\alpha\beta$, são iguais à proporção do raio para a corda do ângulo $\eta\varepsilon\vartheta$. Por isso a altura no ponto $\eta\vartheta$ é dada. Mas no triângulo $\eta\vartheta\varepsilon$, são dados os lados $\eta\varepsilon$ e $\eta\vartheta$, assim como o ângulo ε, enquanto ϑ é um ângulo recto. A partir destas quantidades nós iremos igualmente obter a medida do restante ângulo $\varepsilon\eta\vartheta$. Este tratamento e segmentos de círculos, extraí-o eu compactamente de Ptolomeu e outros, enquanto estava a rever a discussão dos triângulos em geral. Se alguém desejar trabalhar neste tema, estará por si próprio habituado a descobir muito mais aplicações do que estas, que eu apenas apresento como exemplos.

O NASCIMENTO E O OCASO DOS ASTROS

O nascimento e o ocaso dos astros relacionam-se também com a rotação diária, como é evidente. Isto aplica-se não só àqueles nascimentos e ocasos simples, que acabamos de tratar, mas também aos casos em que os astros são estrelas da manhã e da tarde. Embora estes fenómenos ocorram em conjunção com a revolução anual, será contudo mais apropriado falar deles aqui. Os matemáticos antigos distinguiam os nascimentos e ocasos verdadeiros dos aparentes. Os verdadeiros são os seguintes. O nascimento matutino de um astro ocorre quando ele aparece ao mesmo tempo que o Sol e o ocaso matutino quando o astro se põe ao nascer do Sol, pois era considerado «matutino» o intervalo de tempo entre a noite e o dia pleno. Considera-se que um nascimento é vespertino quando o astro aparece ao pôr do Sol. O ocaso vespertino dá-se quando o astro se põe ao mesmo tempo que o Sol, pois ao intervalo entre o fim do dia e o anoitecer total chama-se também «vespertino». Pelo contrário, os nascimentos e ocasos aparentes são assim. O nascimento matutino do astro dá-se quando ele desponta e começa a aparecer ao romper do dia e antes do nascer do Sol. O ocaso matutino dá-se quando vemos o astro acabar de se pôr na altura em que o Sol vai nascer. O nascimento vespertino de um astro tem lugar quando ele se apresenta a nascer durante o crepúsculo, e o ocaso vespertino quando ele deixa de se ver depois do pôr do Sol que, pela sua posição oculta o corpo celeste, até que no seu nascimento matutino os astros emergem pela ordem atrás mencionada.

Do mesmo modo que isto acontece às estrelas fixas, acontece também aos planetas Saturno, Júpiter e Marte, Vénus e Mercúrio, contudo, têm os seus nascimentos e os ocasos de modo diferente, pois não são apagados pelo Sol quando este se aproxima, como acontece com outros planetas, nem como aqueles ficam visíveis quando ele se afasta. Pelo contrário, quando precedem o Sol, imergem no seu brilho e mostram-se luminosos. Os outros quando fazem a sua aparição vespertina e o seu ocaso matutino nunca desaparecem e brilham quase toda a noite. Mas Vénus e Mercúrio desaparecem completamente desde o pôr ao nascer do Sol e não são visíveis em mais nenhuma parte. Há também uma outra diferença. É que em Saturno, Júpiter e Marte os nascimentos e ocasos verdadeiros ocorrem mais cedo do que os visíveis matutinos, e mais tarde do que os vespertinos, pois que de manhã eles precedem o nascer do Sol, e à tarde seguem o seu ocaso. Todavia, no que se refere aos planetas inferiores, os nascimentos visíveis matutinos e vespertinos são mais tarde do que os verdadeiros, mas os ocasos são antes. O processo para determinar estes nascimentos e ocasos compreende-se pelo que se disse atrás quando explicámos a ascensão oblíqua de qualquer astro com uma posição conhecida e sabendo-se em que grau da eclíptica nasce ou se põe [II, 9]. Se o Sol é visível nesse grau ou no oposto, nesse instante, o astro terá o seu nascimento ou ocaso verdadeiros, matutinos ou vespertinos. Os nascimentos e ocasos visíveis diferem destes de acordo com o brilho e dimensão de cada astro. Assim, os que brilham mais intensamente têm períodos mais curtos, durante os quais ficam ocultos devido aos raios do Sol, do que os menos brilhantes. Aliás, os limites entre a visibilidade e a invisibilidade estão marcados por arcos sub-horizontais, entre o horizonte e o Sol, nos círculos que passam pelos pólos do horizonte. Para as estrelas fixas de primeira grandeza esses limites são quase 12°, para Saturno 11°, para Júpiter 10°, para Marte $11^1/_2$°, para Vénus 5° e para Mercúrio 10°. Mas em toda a zona em que o resto da luz do dia dá lugar à noite que inclui o crepúsculo ou o amanhecer, há os 18º do círculo já mencionado. Depois de o Sol percorrer estes 18°, as estrelas mais pequenas começam também a aparecer. Alguns marcam nesta distância um plano paralelo ao horizonte e abaixo dele, dizendo que quando o Sol lá chega, o dia começa e a noite está no seu termo.

Portanto, quando soubermos em que grau da eclíptica um astro nasce ou se põe e encontrarmos o ângulo de intersecção da eclíptica com o horizonte nesse grau, se conseguirmos saber quantos graus da eclíptica, nesse momento, entre o grau do nascimento e o Sol são suficientes e estão associados com a posição do Sol abaixo do horizonte, de acordo com os limites do astro referido, atrás mencionados, então afirmaremos que o seu primeiro aparecimento ou desaparecimento vai ocorrer. O que explicámos na discussão anterior acerca da altura do Sol acima da Terra, aplica-se também em todos os aspectos à sua posição abaixo da Terra, pois a diferença é apenas de lugar. Assim, os astros que se põem no hemisfério visível nascem no invisível e tudo ocorre inversamente e é fácil de compreender. Consideremos pois suficiente esta exposição sobre o nascimento e ocaso dos astros, bem como sobre a rotação diária do globo terrestre.

CÁLCULO DA POSIÇÃO DAS ESTRELAS. DESCRIÇÃO CATALOGRÁFICA DAS ESTRELAS FIXAS

[O começo de um novo livro, de acordo com o plano original de Copérnico; um anterior apontamento das duas primeiras terças partes deste capítulo subsiste no seu autógrafo, folhas 46^v-47^v, sem qualquer indicação de que fora substituído; porque algumas partes deste anterior apontamento são um tanto mais explícitas que as do texto impresso, elas são também aqui traduzidas].

Após a nossa exposição sobre a rotação diária do globo terrestre e as suas consequências, segue-se agora uma outra exposição sobre a revolução anual. Alguns astrónomos antigos pensavam que os fenómenos das estrelas fixas deviam ser considerados antes, pois são os fundamentos desta ciência. Decidimos, contudo, seguir o nosso método, pois partimos do princípio de que a esfera das estrelas fixas é completamente imóvel. Mas ninguém devia surpreender-se de termos adoptado esta ordem embora Ptolomeu no seu *Almagesto* [III, 1] considerasse que não podia ser dada uma exposição sobre as estrelas fixas, a menos que a determinação da posição do Sol e da Lua a precedesse, pensando por isso que a matéria acerca das estrelas fixas devia vir depois. Se pensais que isto se refere aos cálculos para determinar o movimento aparente do Sol e da Lua, talvez o argumento colha. Com efeito, o geómetra Menelau observou igualmente o curso da maior parte das estrelas e as suas posições, por meio de cálculos fundamentados nas suas conjunções com a Lua.

[Apontamento anterior:

Claro, apreendi que os lugares das estrelas não podem ser determinados, à parte do da Lua, nem tão-pouco em volta do Sol. Mas estes problemas requerem a ajuda de instrumentos, e acredito que este tópico não deve ser investigado por qualquer outro caminho. Por outro lado, alguém que queira a Teoria solar e lunar dos movimentos e revoluções em Tabelas precisas, mantenho que não poderá realizar nada se menosprezar as estrelas fixas. Assim, Ptolomeu e outros anteriores a ele e depois dele, que derivaram a duração do ano solar apenas dos equinócios ou solstícios, e esforçaram-se por estabelecer proposições fundamentais, para nós nunca poderão concordar com essa duração. Em nenhum outro tópico, consequentemente, houve tão grande discórdia. Isto perturbou muitos [especialistas] que quase abandonaram a esperança de poderem dominar a astronomia e declararam os movimentos no céu de que estavam para além da compreensão da mente humana.

Ciente desta atitude, Ptolomeu [*Almagesto*, III, 1] calculou o ano solar, dentro da sua própria época não sem suspeitar que um erro pode dar-se no decurso do tempo, e avisou a posteridade de que devia esforçar-se por encontrar uma maior precisão subsequente nesta matéria. A partir desta altura parece-me que vale a pena neste livro, primeiro, mostrar como os instrumentos ajudam a determinar os lugares do Sol, Lua e estrelas, ou seja, as suas distâncias entre o ponto equinocial e um solsticial, e em seguida explicar a esfera das estrelas fixas, reunidas em constelações].

Mas muito melhor faremos se, com o auxílio de instrumentos, examinando cuidadosamente as posições do Sol e da Lua, localizarmos algum astro, como vamos mostrar a seguir. Também nos serviram de aviso as tentativas frustradas dos que pensam que a duração do ano solar deveria ser determinada apenas pelos equinócios e solstícios e nunca pelas estrelas fixas. Nisto não conseguiram eles estar de acordo até agora e nunca se observou maior discrepância a respeito de qualquer outra particularidade [astronómica].

Ptolomeu fizera esta verificação, pois, tendo calculado o ano solar em relação ao seu tempo, desconfiando embora do erro que poderia surgir com o decorrer dos anos, preveniu a posteridade de que devia considerar daí em diante este assunto com a maior precisão; assim pareceu-nos importante mostrar como pelo emprego inteligente de instrumentos podemos determinar as posições do Sol e da Lua e qual a distância a que se encontram dos equinócios e dos solstícios. Estas posições fornecer-nos-ão, depois, meios de examinar os outros astros que nos permitirão pôr diante dos nossos olhos a esfera das estrelas fixas, salpicada de constelações, bem como a sua configuração. Os instrumentos para calcular a distância dos trópicos, a obliquidade da eclíptica e a inclinação da esfera ou a altura do pólo do equador foram descritos anteriormente [II, 2]. Pelo mesmo método podemos obter qualquer outra altura do Sol ao meio-dia. Esta altura mostrar-nos-á, por comparação com a inclinação da esfera, qual é a declinação do Sol em relação ao equador, e, através desta declinação, a sua posição ao meio-dia, medida a partir de um solstício ou de um equinócio, será ainda mais claramente determinada. Ora o Sol parece percorrer cerca de 1° em 24 horas e, assim, a fracção correspondente ao que percorre durante uma hora será $2^{1}/_{2}'$. Daqui resulta que para qualquer hora dada, será facilmente determinada a sua posição. Para observar a posição da Lua e das estrelas, construiu-se outro instrumento a que Ptolomeu dá o nome de Astrolábio [*Almagesto*, V, I].

Fazem-se dois anéis ou molduras rectangulares de anéis, de modo que os seus lados planos ou maxilas sejam perpendiculares às suas superfícies côncava e convexa.

Estes anéis são iguais e semelhantes em todos os aspectos e de tamanho próprio para se manejarem facilmente, por não terem uma grandeza excessiva, embora sejam preferíveis as grandes dimensões às exíguas, quando se trata de os dividir em partes. A sua largura e espessura devem ser pelo menos de um terço do diâmetro. Serão ajustados e unidos em ângulos rectos um ao outro com as superfícies, côncava e convexa, adaptadas respectivamente, semelhando a redondeza de uma esfera única. De facto, uma delas deve tomar o lugar da eclíptica e a outra o do círculo que passa pelos pólos do equador e da eclíptica. Os lados do anel que representa a eclíptica devem ser divididos em partes iguais, usualmente 360, que se subdividem tanto quanto o instrumento o permitir. A seguir, no outro anel, medindo os quadrantes a partir da eclíptica, marquemos os pólos desta.

Tomemos uma distância a partir destes pólos em proporção ao total da obliquidade da eclíptica, marcando também os pólos do equador. Feito isto, preparam-se outros dois círculos ligados pelos mesmos pólos da eclíptica que se moverão à volta destes, um por fora, outro por dentro. A sua espessura entre as superfícies planas deve ser a mesma e a largura das suas maxilas semelhante. Estes ajustar-se-ão de modo que haja contacto em toda a parte entre a superfície côncava do anel maior e a superfície convexa da eclíptica, assim como entre a superfície convexa do mais pequeno e a superfície côncava da eclíptica. Isto não há-de impedir que os façamos girar, mas deve tornar possível que a eclíptica com o seu meridiano deslizem por sua vez, livremente e com facilidade, sobre eles. A seguir, e com toda a precisão, abrimos orifícios nestes anéis, nos pólos da eclíptica diametralmente opostos e introduzimos neles umas cavilhas para os unir e segurar. Dividir-se-á também o anel interior em 360 partes iguais, de forma que em cada quadrante haja noventa partes, até os pólos. Além disto, na superfície côncava deste anel colocar--se-á outro anel, perfazendo o número de cinco, que possa rodar no mesmo plano.

Nas maxilas deste anel fixam-se pontaletes diametralmente opostos com aberturas e visores ou oculares, por onde a luz do astro possa entrar e sair ao longo do diâmetro do anel, como se faz na dioptra. Aplicam-se-lhe depois nos dois lados do anel uns blocos indicadores dos números do anel exterior para observar as latitudes. Por fim acrescenta-se um sexto anel para receber e servir de suporte a todo o astrolábio, visto que ele está suspenso por pregadeiros nos pólos do equador. Coloca-se este anel numa espécie de plinto de modo que, tendo-o como suporte, fica perpendicular ao plano do horizonte. Então, com os pólos ajustados à inclinação da esfera, o astrolábio deve manter a posição do seu meridiano semelhante à do meridiano natural, e pouco se afastar dela. Depois de assim preparar este instrumento, quando desejamos encontrar a posição de algum astro, ao cair do dia ou quando o Sol se vai pôr, e temos também a Lua ao alcance da vista, fazemos girar o anel exterior para o grau da eclíptica onde, seguindo o método anterior, sabemos que o Sol se encontra nesse momento. Então fazemos rodar em direcção ao Sol a intersecção dos anéis até que ambos, isto é, a eclíptica e o anel exterior, que passa pelos pólos da eclíptica, projectem sombras iguais um sobre o outro. A seguir fazemos girar o anel interior na direcção da Lua, e pondo um olho no plano deste anel onde veremos a Lua na direcção oposta, como se fosse bissectada pelo mesmo plano, marcaremos o local na eclíptica do instrumento. Assim se poderá observar então a posição da Lua em longitude. Sem esta não haverá processo de fixar a posição dos astros pois ela é o único corpo que aparece tanto no dia como na noite. Deste modo, quando chega a noite e o astro cuja posição procuramos já se pode ver, adaptamos o anel exterior à posição da Lua, e assim vamos pôr o astrolábio em linha com a Lua como fazemos no caso do Sol. Rodamos depois o círculo interior para o astro, até que pareça tocar o plano do anel e observamo-lo então através dos oculares que se situam no anel mais pequeno interior.

Assim teremos encontrado a longitude e latitude do astro. Enquanto se faz isto, o grau da eclíptica, que está no meio do céu, ficará ao alcance da nossa vista. Por isso saber-se-á claramente a hora em que se fez a observação.

[Apontamento anterior:

Depois destes anéis terem sido arranjados do modo indicado foram feitos mais dois outros anéis. Estes não são iguais em diâmetro [aos dois primeiros anéis], mas assemelham-se na espessura e na largura. Ligado o último par aos pólos da eclíptica, convenientemente [um na] parte externa e [o outro na parte] interior. Perfuram-se habilidosamente e com cuidado, e procede-se à montagem dos eixos em torno dos quais eles giram. Mas eles são colocados juntos para que [a superfície] convexa do anel exterior e a [superfície] côncava do anel interior toquem [a eclíptica], mas sem qualquer atrito que possa interferir com o seu giro à volta dos eixos. Por outro lado no anel interno, dividem-se os quadrantes em graus tal como a eclíptica está dividida. Além disso, na parte interior da superfície do anel côncavo devia colocar-se outro anel no mesmo plano, de tal modo que possa girar sem interferir com o anel interior. A este [quinto anel] prendem-se diametralmente suportes opostos com fendas, como é usual na dioptra, com o objectivo de observar as latitudes. Finalmente, um sexto anel deve ser preso, capaz de suportar todo o astrolábio, fixando-o e girando à volta dos [pólos] do equador, como disse. Coloca-se [este sexto anel] numa posição vertical ou outra qualquer localização elevada, onde ele é sustentado perpendicular ao plano do horizonte. Além disso, quando os seus pólos estejam ajustados à inclinação da esfera, deixa-se o anel manter o meridiano alinhado com ele como na natureza, e não se deixa o anel desviar-se do meridiano.

Com o instrumento construído deste modo, podemos desejar obter a localização de uma estrela.

À noite, ou quando o Sol está quase no ocaso, num momento em que a Lua começa a ser visível, alinhamos o anel exterior com os graus da ecliptíca do instrumento, no qual o Sol pode ser marcado. Podemos também intersectar os anéis próximo do Sol até que os dois, a eclíptica e o anel exterior, passem através dos pólos [da eclíptica] lançando sombras num e outro que são iguais e se bissectam. Então fazemos girar o anel interior no sentido da Lua. Colocando a nossa vista num local onde possamos ver a Lua no lado oposto como se fosse bissectada pelo mesmo plano, marcamos o lugar da eclíptica do instrumento, desde que a localização da Lua em longitude seja conhecida naquele tempo, visto que sem o conhecimento da Lua, não haveria maneira de se chegar às posições das estrelas, porque ela por si só é a intermediária entre a claridade e a escuridão. Então, enquanto a noite chega, a estrela cuja localização nós pretendemos conhecer começa a ser vísivel. Colocamos o anel exterior na posição da Lua. Evidentemente em relação à Lua, como fizemos no caso do Sol. Então, fazemos girar novamente o anel interior na direcção da estrela, até...] [O apontamento inicial acaba aqui abruptamente].

Por exemplo, no segundo ano do reinado do imperador Antonino Pio, no dia 9 do mês de Farmi, o oitavo do calendário egípcio, em Alexandria e ao pôr do Sol, Ptolomeu quis observar a posição da estrela situada no coração de Leão, que tem o nome de Basilisco ou Regulus [*Almagesto*, VII, 2]. Tendo alinhado o seu astrolábio com o Sol, precisamente a pôr-se nesse momento, às cinco horas e meia equinociais depois do meio-dia, localizou o Sol a 3 $^1/_{24}$°, em Peixes; e, fazendo girar o anel interior, observou a Lua a 92 $^1/_8$° depois do Sol. A partir disto viu que a posição da Lua, neste momento, era a 5 $^1/_6$°, nos Gémeos. E meia hora mais tarde, às seis horas depois do meio-dia, quando a estrela começara a ser visível e o quarto grau dos Gémeos estava no meio do céu, Ptolomeu fez girar o anel exterior do instrumento para a posição da Lua já determinada. Fazendo avançar o anel interior, verificou que a distância da estrela à Lua, na sucessão dos signos do zodíaco, era de 57 $^1/_{10}$°. Ora viu-se que a Lua estava a 92 $^1/_2$° do pôr do Sol, como se disse, o que a situava a 5 $^1/_6$° de Gémeos. Mas sabia-se que no intervalo de meia hora, a Lua se tinha movido $^1/_4$° pois que a fracção por hora do movimento lunar atinge $^1/_2$°, mais ou menos. Contudo, por causa da paralaxe da Lua, que tinha de ser subtraída, a Lua devia-se ter movido um pouco menos de $^1/_4$°, e ele determinou a diferença em cerca de $^1/_{12}$°. De acordo com isto a Lua devia estar a 5 $^1/_3$°, de Gémeos. Mas quando tratarmos das paralaxes da Lua, será evidente que a diferença não era tão grande. Assim pode ver-se claramente que a posição da Lua observada excedia no máximo $^1/_3$° e no mínimo dificilmente $^2/_5$°, os 5° de Gémeos. Com a adição dos 57 $^1/_{10}$°, verifica-se que a posição da estrela é a 2 $^1/_2$°, de Leão, a uma distância do solstício do Verão, cerca de 32 $^1/_2$°, com a latitude norte de $^1/_6$°. Esta era a posição do Basilisco pela qual foram facilmente determinadas as das outras estrelas fixas. Ora esta observação de Ptolomeu foi feita no ano 139 da era cristã, segundo o cômputo romano, no dia 24 de Fevereiro, no 1.° ano de 229.ª Olimpíada. Assim, o mais notável dos astrónomos registou a distância de cada uma das estrelas em relação ao equinócio da Primavera, e deu a conhecer as constelações celestes. Com isto auxiliou não pouco o meu projecto e libertou-me de um trabalho bem duro.

Eu penso que as posições das estrelas não devem ser localizadas com referência aos equinócios, pois estes mudam com o tempo, devendo porém os equinócios ser localizados em referência à esfera das estrelas fixas, podemos facilmente basear o mapa das estrelas em outro ponto de partida fixo.

Decidi por isso tomar Áries como primeira constelação do zodíaco e a sua primeira estrela que está na cabeça, para que assim aquelas estrelas que brilham como se fizessem parte de um conjunto e estivessem fixas e ligadas umas às outras, desde que ocuparam a sua posição imutável, mantivessem sempre a sua mesma configuração definitiva. Elas estão agrupadas em 48 constelações devido ao espírito engenhoso e à diligência dos antigos. Só não estão incluídas nestas constelações as estrelas cujos círculos estão perpetuamente ocultos, para além do quarto «clima», o qual passa próximo de Rodes, de modo que estas estrelas, desconhecidas dos antigos, não foram consideradas em qualquer constelação.

Segundo a opinião de Téon Júnior nos seus *Comentários* sobre Arato, a única razão para agrupar as estrelas em constelações, foi dividir uma tão grande multidão em grupos de modo que pudéssemos conhecê-las uma por uma, e cada uma pelo seu nome.

Este uso é já muito antigo pois sabemos que algumas já foram mencionadas em Job e lemos mesmo os nomes das Plêiades, Híadas, Arturo e Oríon em Hesíodo e Homero.

Por conseguinte, ao catalogar as estrelas segundo a sua longitude, não usarei os doze signos do zodíaco, que derivam dos equinócios e solstícios, mas o número simples e vulgar de graus. Em todos os outros aspectos seguiremos Ptolomeu, excepto em alguns poucos passos em que verificámos que o texto está viciado ou algo alterado.

Vamos expor no livro seguinte a distância das estrelas àqueles pontos [onde as indicações de «Maior» e «Obscura» ou «Menor» se devem entender no sentido de «Mais brilhante» e «Menos brilhante», respectivamente].

DESCRIÇÃO DOS SIGNOS E DAS ESTRELAS, EM PRIMEIRO LUGAR, AS QUE PERTENCEM À ZONA SETENTRIONAL

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
URSA MENOR OU CINOSURA						
A da extremidade da cauda	53	30	N.	66	0	3
A que fica a Este, na cauda	55	50	N.	70	0	4
A que fica no começo da cauda	69	20	N.	74	0	4
A que fica mais a Sul, no lado Oeste do quadrilátero	83	0	N.	75	20	4
A que fica a Norte, no mesmo lado	87	0	N.	77	40	4
A que fica mais a Sul no lado Este do quadrilátero	100	30	N.	72	40	2
A que fica a Norte, no mesmo lado	109	30	N.	74	50	2
7 estrelas das quais 2 são de 2.ª grandeza, 1 de 3.ª e 4 de 4.ª						
1 estrela próxima da Cinosura, mas localizada fora da Constelação, em linha recta com o lado Este do quadrilátero, muito ao Sul	103	20	N.	71	10	4
URSA MAIOR, TAMBÉM CHAMADA HÉLICE						
A do rosto	78	40	N.	39	50	4
Das estrelas que estão nos olhos, a que fica a Oeste	79	10	N.	43	0	5
A que fica a Este desta	79	40	N.	43	0	5
Das duas situadas na fronte, a que fica a Oeste	79	30	N.	47	10	5
A que fica a Este na fronte	81	0	N.	47	0	5
A que fica na orelha direita que está ao Sul	81	30	N.	50	30	5
Das duas situadas no pescoço, a que fica a Oeste	85	50	N.	43	50	4
A que fica a Este	92	50	N.	44	20	4
Das duas situadas no peito, a que fica a Norte	94	20	N.	44	0	4
A que fica mais ao Sul	93	20	N.	42	0	4
A do joelho anterior esquerdo	89	0	N.	35	0	3
Das duas situadas na pata esquerda anterior, a que fica a Norte	89	50	N.	29	0	3
A que fica mais ao Sul	88	40	N.	28	30	3
A do joelho anterior direito	89	0	N.	36	0	4
A que está abaixo deste joelho	101	10	N.	33	30	4
A que está na espádua	104	0	N.	49	0	2
A que está nos flancos	105	30	N.	44	30	2
A que está no começo da cauda	116	30	N.	51	0	3
A que está na perna esquerda posterior	117	20	N.	46	30	2
Das duas situadas na pata posterior esquerda, a que fica a Oeste	106	0	N.	29	38	3
A que fica a Este desta	107	30	N.	28	15	3
A que fica na cavidade da perna esquerda posterior	115	0	N.	35	15	4
Das duas situadas na pata direita posterior, a que fica a Norte	123	10	N.	25	50	3

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.		Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza	
A que fica mais a Sul	123	40	N.	25	0	3	
Das três situadas na cauda, a primeira a Este do começo da cauda	125	30	N.	53	30	2	
A que fica no meio	131	20	N.	55	40	2	
A última na extremidade da cauda	143	10	N.	54	0	2	
27 estrelas, das quais 6 são de 2.ª grandeza, 8 de 3.ª, 8 de 4.ª, 5 de 5.ª							
FORA DA HÉLICE MAS PRÓXIMAS DELA ESTÃO:							
A que fica ao Sul da cauda	141	10	N.	39	45	3	
A mais baça, a Oeste da anterior	133	30	N.	41	20	5	
A que fica entre as patas anteriores da Ursa e a cabeça do Leão	98	20	N.	17	15	4	
A que fica mais a Norte da anterior	96	40	N.	19	10	4	
A última das três estrelas baças	99	30	N.	20	0		
A que fica a Oeste da anterior	95	30	N.	22	45		
A que fica mais a Oeste	94	30	N.	23	15		
A que fica entre as patas anteriores e os Gémeos	100	20	N.	22	15		
São 8 estrelas, das quais 1 é de 3.ª grandeza, 2 de 4.ª, 1 de 5.ª e 4 baças							
O DRAGÃO							
A que fica na língua	200	0	N.	76	30	4	
A que fica na boca	215	10	N.	78	30	4	Maior
A que fica por cima do olho	216	30	N.	75	40	3	
A que fica na face	229	40	N.	75	20	4	
A que fica por cima da cabeça	223	30	N.	75	30	3	
Das que estão na primeira inflexão do pescoço, a que fica a Norte	258	40	N.	82	20	4	
A que fica ao Sul delas	295	50	N.	78	15	4	
A que fica no meio	262	10	N.	80	20	4	
A que fica a Este das anteriores, na segunda inflexão [do pescoço]	282	50	N.	81	10	4	
A que fica a Sul, no lado Oeste do quadrilátero	331	20	N.	81	40	4	
A que fica ao Norte, do mesmo lado	343	50	N.	83	0	4	
A que fica a Norte, do lado Este	1	0	N.	78	50	4	
A que fica ao Sul, do mesmo lado	346	10	N.	77	50	4	
A que fica ao Sul do triângulo, na terceira inflexão [do pescoço]	4	0	N.	80	30	4	
Das restantes do triângulo, a que fica a Oeste	15	0	N.	81	40	5	
A que fica a Este	19	30	N.	80	15	5	
Das três situadas no triângulo a Ontes, a que fica a Este	66	20	N.	83	30	4	
Das restantes do mesmo triângulo, a que fica ao Sul	43	40	N.	83	30	4	
A que fica ao Norte, das duas anteriores	35	10	N.	84	50	4	
Das duas estrelas pequenas do triângulo, a que fica a Este	110	0	N.	87	30	6	

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
Destas [duas estrelas] a que fica mais a Oeste	105	0	N.	86	50	6
Das três que seguem em linha recta, a que fica a Sul	152	30	N.	81	15	5
Destas três, a que fica ao meio	152	50	N.	83	0	5
A que fica mais ao Norte	151	0	N.	84	50	3
Das duas a Oeste das anteriores, a que fica mais ao Norte	153	20	N.	78	0	3
A que fica mais ao Sul	156	30	N.	74	40	4 Maior
A que fica a Oeste das anteriores, na inflexão da cauda	156	0	N.	70	0	3
Das duas situadas a grande distância, a que fica a Oeste	120	40	N.	64	40	4
A que fica a Este desta	124	30	N.	65	30	3
A que fica a Este, na cauda	102	30	N.	61	15	3
A que fica na extremidade da cauda	96	30	N.	56	15	3
São, portanto, 31 estrelas, da quais 8 são de 3.ª grandeza, 17 de 4.ª, 4 de 5.ª e 2 de 6.ª						
CEFEU						
A que fica no pé direito	28	40	N.	75	40	4
A que fica no pé esquerdo	26	20	N.	64	15	4
A que fica no lado direito, abaixo do cinto	0	40	N.	71	10	4
A que toca a parte superior do ombro direito	340	0	N.	69	0	3
A que toca o quadril direito	332	40	N.	72	0	4
A que toca no quadril do mesmo lado	333	20	N.	74	0	4
A que fica no peito	352	0	N.	65	30	5
A que fica no braço esquerdo	1	0	N.	62	30	4 Maior
Das três situadas na tiara, a que fica a Sul	339	40	N.	60	15	5
A que fica no meio	340	40	N.	61	15	4
Das três a que fica mais ao Norte	342	20	N.	61	30	5
São, portanto, 11 estrelas, das quais 1 de 3.ª grandeza, 7 de 4.ª e 3 de 5.ª						
Há duas estrelas fora desta constelação, uma das quais fica a Oeste da Tiara	337	0	N.	64	0	5
A que fica a Este desta	344	40	N.	59	30	4
O BOEIRO OU ARCTÓFILAX						
Das três da mão, aquela que fica a Oeste	145	40	N.	58	40	5
Das três, a que fica ao meio, mais ao Sul	147	30	N.	58	20	5
Das três, a que fica a Este	149	0	N.	60	10	5
A que fica na articulação da coxa esquerda	143	0	N.	54	40	5
A que fica na ombro esquerdo	163	0	N.	49	0	3
A que fica na cabeça	170	0	N.	53	50	4 Maior
A que fica no ombro direito	179	0	N.	48	40	4
Das duas situadas no bordão, a que fica mais ao Sul	179	0	N.	53	15	4

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
A que fica mais para o Norte, no topo do bordão	178	20	N.	57	30	4
Das duas que estão abaixo do ombro, a que fica a Norte	181	0	N.	46	10	4 Maior
Destas a que fica mais a Sul	181	50	N.	45	30	5
A que fica na extremidade da mão direita	181	35	N.	41	20	5
Das duas que estão na palma da mão, a que fica mais a Oeste	180	0	N.	41	40	5
A que fica a Este destas	180	20	N.	42	30	5
A que está na pega do bordão	181	0	N.	40	20	5
A que está na perna direita	173	20	N.	40	15	3
Das duas estrelas do cinto, a que está a Este	169	0	N.	41	40	4
A que fica a Oeste	168	20	N.	42	10	4 Maior
A que fica no calcanhar direito	178	40	N.	28	0	3
Das três situadas na perna esquerda a que fica a Norte	164	40	N.	28	0	3
Das três a que fica ao meio	163	50	N.	26	30	4
A que fica mais ao Sul	164	50	N.	25	0	4
São, portanto, 22 estrelas, da quais 4 são de 3.ª grandeza, 9 de 4.ª e 9 de 5.ª						
Há uma estrela fora da constelação, no meio das pernas, chamada Arcturo	170	20	N.	31	30	1
A COROA BOREAL						
A que brilha na Coroa	188	0	N.	44	30	2 Maior
A que fica mais a Oeste de todas	185	0	N.	46	10	4 Maior
A que fica a Este desta, do lado do Norte	185	10	N.	48	0	5
A que fica a Este desta, mais para o Norte	193	0	N.	50	30	6
A que fica a Este da estrela brilhante, do lado Sul	191	30	N.	44	45	4
A que fica imediatamente a seguir, para Este	190	30	N.	44	50	4
A que fica ainda mais afastada, para Este daquelas	194	40	N.	46	10	4
A que fica mais a Este de todas as da Coroa	195	0	N.	49	20	4
São, portanto, 8 estrelas, das quais 1 de 2.ª grandeza, 5 de 4.ª e 1 de 6.ª						
HÉRCULES OU ENGONASI						
A que fica na cabeça	221	0	N.	37	30	3
A que fica na axila direita	207	0	N.	43	0	3
A que fica no braço direito	205	0	N.	40	10	3
A que fica à direita do abdómen	201	20	N.	37	10	4
A do braço esquerdo	220	0	N.	48	0	3
A que fica no ombro esquerdo	225	20	N.	49	30	4 Maior
A que fica à esquerda do abdómen	231	0	N.	42	0	4
Das três situadas na palma da mão esquerda, a que fica mais a Este	238	50	N.	52	50	4 Maior
Das outras duas, a que fica a Norte	235	0	N.	54	0	4 Maior
A que fica mais ao Sul	234	50	N.	53	0	4
A que fica no lado direito	207	10	N.	56	10	3
A que fica no lado esquerdo	213	30	N.	53	30	4

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza	
	Gr.	Min.		Gr.	Min.		
A que fica na anca esquerda	213	20	N.	56	10	5	
A que fica no começo da mesma perna	214	30	N.	58	30	5	
Das três situadas na perna esquerda, a que fica a Oeste	217	20	N.	59	50	3	
A que fica a Este dessa	218	40	N.	60	20	4	
A terceira a Este	219	40	N.	61	15	4	
A que fica no joelho esquerdo	237	10	N.	61	0	4	
A que fica na coxa esquerda	225	30	N.	69	20	4	Maior
Das três que ficam no pé esquerdo, a que fica a Oeste	188	40	N.	70	15	6	
A que fica ao meio	220	10	N.	71	15	6	
Das três a que fica mais a Este	223	0	N.	72	0	6	
A que fica no começo da perna direita	207	0	N.	60	15	4	Maior
Das que da mesma perna, a mais ao Norte	198	50	N.	63	0	4	
A que fica no joelho direito	189	0	N.	65	30	4	Maior
Das duas situadas abaixo do mesmo joelho, a que fica mais a Sul	186	40	N.	63	40	4	
A que fica mais a Norte	183	30	N.	64	15	4	
A que fica na canela direita	184	30	N.	60	0	4	
A que fica na ponta do pé direito, idêntica à que fica na extremidade do bordão do Boieiro	178	20	N.	57	30	4	
São, portanto, 28 estrelas, das quais 6 de 3.ª grandeza, 17 de 4.ª, 2 de 5.ª, e 3 de 6.ª							
Há uma estrela fora desta constelação, que fica mais a Sul do braço direito	206	0	N.	38	10	5	
LIRA							
A estrela luminosa chamada Lira ou Harpa	250	40	N.	62	0	1	
Das duas a seguir a esta, a que fica mais a Norte	253	40	N.	62	40	4	Maior
A que fica mais a Sul	253	40	N.	61	0	4	Maior
A que fica na curvatura dos braços da Lira	262	0	N.	60	0	4	
Das duas juntas situadas a Este, a que fica a Norte	265	20	N.	61	20	4	
Destas, a que fica mais ao Sul	265	0	N.	60	20	4	
Das duas situadas no travessão, a Oeste, a que fica a Norte	254	20	N.	56	10	3	
A que fica mais a Sul	254	10	N.	55	0	4	Menor
Das duas situadas a Este, no mesmo travessão, a que fica a Norte	257	30	N.	55	20	3	
A que fica mais ao Sul	258	20	N.	54	45	4	Menor
São 10 estrelas portanto, das quais 1 é de 1.ª grandeza, 2 de 3.ª e 7 de 4.ª							
O CISNE OU PÁSSARO							
A que fica no bico	267	50	N.	49	20	3	
A que fica na cabeça	272	20	N.	50	30	5	
A que fica no meio do pescoço	279	20	N.	54	30	4	Maior

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
A que fica no peito	291	50	N.	56	20	3
A estrela brilhante que fica na cauda	302	30	N.	60	0	2
A que fica na curva da asa direita	282	40	N.	64	40	3
Das três situadas no prolongamento da asa direita, a que fica mais a Sul	285	50	N.	69	40	4
A que fica ao meio	284	30	N.	71	30	4 Maior
A última das três situada na extremidade da asa	280	0	N.	74	0	4 Maior
A que fica na curva da asa esquerda	294	10	N.	49	30	3
A que fica no meio da mesma asa	298	10	N.	52	10	4 Maior
A que fica na sua extremidade	300	0	N.	74	0	3
A que fica na pata esquerda	303	20	N.	55	10	4 Maior
A que fica no joelho esquerdo	307	50	N.	57	0	4
Das duas situadas na pata direita, a que fica a Oeste	294	30	N.	64	0	4
A que fica a Este	296	0	N.	64	30	4
A estrela nebulosa que fica no joelho direito	305	30	N.	63	45	5
São, portanto, 17 estrelas, das quais 1 de 2.ª grandeza, 5 de 3.ª, 9 de 4.ª e 2 de 5.ª						
HÁ DUAS ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO, MAS PRÓXIMAS DELA:						
Das duas situadas abaixo da asa esquerda, a que fica mais a Sul	306	0	N.	49	40	4
A que fica mais a Norte	307	10	N.	51	40	4
CASSIOPEIA						
A que fica na cabeça	1	10	N.	45	20	4
A que fica no peito	4	10	N.	46	45	3 Maior
A que fica no cinto	6	20	N.	47	50	4
A que fica acima do assento da cadeira, nas coxas	10	0	N.	49	0	3 Maior
A que fica nos joelhos	13	40	N.	45	30	3
A que fica na perna	20	20	N.	47	45	4
A que fica na extremidade do pé	355	0	N.	48	20	4
A que fica no braço esquerdo	8	0	N.	44	20	4
A que fica no cotovelo esquerdo	7	40	N.	45	0	5
A que fica no cotovelo direito	357	40	N.	50	0	6
A que fica no pé da cadeira	8	20	N.	52	40	4
A que fica na parte superior das costas da cadeira	1	10	N.	51	40	3 Menor
A que fica no canto [das costas da cadeira]	357	10	N.	51	40	6
São, portanto, 13 estrelas, das quais 4 são de 3.ª grandeza, 6 de 5.ª e 2 de 6.ª						
PERSEU						
A estrela envolvida em névoa, que fica na extremidade da mão direita	21	0	N.	40	30	Nebulosa
A que fica no cotovelo direito	24	30	N.	37	30	4
A que fica no ombro direito	26	0	N.	34	30	4 Menor
A que fica no ombro esquerdo	20	50	N.	32	20	4
A que fica na cabeça ou na núvem	24	0	N.	34	30	4
A que fica nas espáduas	24	50	N.	31	10	4
A estrela brilhante que fica no lado direito	28	10	N.	30	0	2

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.		Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
Das três situadas no mesmo lado, a que fica a Oeste	28	40	N.	27	30	4
A que fica ao meio	30	20	N.	27	40	4
A restante das três	31	0	N.	27	30	3
A que fica no cotovelo esquerdo	24	0	N.	27	0	4
A estrela brilhante que fica na mão esquerda e na cabeça da Medusa	23	0	N.	23	0	2
Na cabeça, a situada a Este	22	30	N.	21	0	4
Na mesma cabeça, a que fica a Oeste	21	0	N.	21	0	4
A que fica ainda mais a Oeste da anterior	20	10	N.	22	15	4
A que fica no joelho direito	38	10	N.	28	15	4
No joelho a Oeste da anterior	37	10	N.	28	10	4
Das duas situadas no abdómen, a que fica mais a Oeste	35	40	N.	25	10	4
A que fica mais a Este	37	20	N.	26	15	4
A que fica na anca direita	37	30	N.	24	30	5
A que fica na barriga da perna direita	39	40	N.	28	45	5
A que fica na anca esquerda	30	10	N.	21	40	4 Maior
A que fica no joelho esquerdo	32	0	N.	19	50	3
A que fica na perna esquerda	31	40	N.	14	45	3 Maior
A que fica no calcanhar esquerdo	24	30	N.	12	0	3 Menor
A que fica no lado esquerdo do peito do pé	29	40	N.	11	0	3 Maior
São, portanto, 26 estrelas, das quais 2 de 2.ª grandeza, 5 de 3.ª, 16 de 4.ª, 2 de 5.ª e 1 nebulosa						
HÁ TRÊS ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS						
A que fica a Este do joelho esquerdo	34	10	N.	31	0	5
A que fica a Norte do joelho direito	38	20	N.	31	0	5
A que fica a Oeste da cabeça da Medusa	18	0	N.	20	40	Obscura
3 estrelas: 2 de 5.ª grandeza, 1 obscura						
HENÍOCO OU COCHEIRO						
Das duas estrelas situadas na cabeça, a que fica mais a Sul	55	50	N.	30	0	4
A que fica mais distante, a Norte	55	40	N.	30	50	4
A estrela brilhante a que chamam Capella», no ombro esquerdo	78	20	N.	22	30	1
A que fica no ombro direito	56	10	N.	20	0	2
A que fica no cotovelo direito	54	30	N.	15	15	4
A que fica na palma da mão direita	56	10	N.	13	30	4 Maior
A que fica no cotovelo esquerdo	45	20	N.	20	40	4 Maior
Das «cabras», a que fica a Oeste	45	30	N.	18	0	4 Menor
Das «cabras» na palma da mão esquerda, a que fica a Este	46	0	N.	18	0	4 Maior
A que fica na barriga da perna esquerda	53	10	N.	10	10	3 Maior
A que fica na barriga da perna direita, na extremidade do corno do Touro, mais a Norte	49	0	N.	5	0	3 Maior
A que fica no calcanhar	49	20	N.	8	30	5
A que fica na anca	49	40	N.	12	20	5

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza	
A estrela pequena no pe esquerdo	24	0	N.	10	20	6	
São, portanto, 14 estrelas, das quais 1 de 1.ª grandeza, 1 de 2.ª, 2 de 3.ª, 7 de 4.ª, 2 de 5.ª e 1 de 6.ª							
O SERPENTÁRIO OU SERPENTE							
A que fica na cabeça	228	10	N.	36	0	3	
Das duas situadas no ombro direito a que fica a Oeste	231	20	N.	27	15	4	Maior
A que fica a Este	232	20	N.	26	45	4	
Das duas situadas no ombro esquerdo, a que fica a Oeste	216	40	N.	33	0	4	
A que fica a Este	218	0	N.	31	50	4	
A que fica no cotovelo esquerdo	211	40	N.	34	30	4	
Das duas situadas na mão esquerda, a que fica a Oeste	208	20	N.	17	0	4	
A que fica a Este	209	20	N.	12	30	3	
A que fica no cotovelo direito	220	0	N.	15	0	4	
Na mão direita, a que fica a Oeste	205	40	N.	18	40	4	Menor
A que fica a Este	207	40	N.	14	20	4	
A que fica no joelho direito	224	30	N.	4	30	3	
A que fica na canela da perna direita	227	0	N.	2	15	3	Maior
Das quatro situadas no pé direito, a que fica a Oeste	226	20	S.	2	15	4	Maior
A que fica a Este	227	40	S.	1	30	4	Maior
A terceira, a Este	228	20	S.	0	20	4	Maior
A última a Este	229	10	S.	0	45	5	Maior
A que toca o calcanhar	229	30	S.	1	0	5	
A que fica no joelho esquerdo	215	30	N.	11	50	3	
Das três situadas na perna esquerda, em linha recta, a que fica a Norte	215	0	N.	5	20	5	Maior
A que fica ao meio	214	0	N.	3	10	5	
Das três, a que fica mais a Sul	213	10	N.	1	40	5	Maior
A que fica no calcanhar esquerdo	215	40	N.	0	40	5	
A que toca a cavidade do pé esquerdo	214	0	S.	0	45	4	
São, portanto, 24 estrelas, das quais 5 de 3.ª grandeza, 13 de 4.ª e 6 de 5.ª							
HÁ 5 ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO, MAS PRÓXIMAS:							
Das três a Este do ombro direito, a que fica mais a Norte	235	20	N.	28	10	4	
A que fica no meio das três	236	0	N.	26	20	4	
A que fica ao Sul das três	233	40	N.	25	0	4	
A que fica mais a Este das três	237	0	N.	27	0	4	
A que fica separada destas quatro, a Norte	238	0	N.	33	0	4	
São, portanto, 5 estrelas de 4.ª grandeza							
O SUSTENTADOR SERPENTÁRIO							
A que fica na face, no quadrilátero	192	10	N.	38	0	4	
A que toca as narinas	201	0	N.	40	0	4	

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza	
A que fica na têmpora	197	40	N.	35	0	3	
A que fica no começo do pescoço	195	20	N.	34	15	3	
A que fica no meio do quadrilátero e na boca	194	40	N.	37	15	4	
A que fica a Norte da cabeça	201	30	N.	42	30	4	
A que fica na primeira curva do pescoço	195	0	N.	29	15	3	
Das três situadas a Este, a que fica ao Norte	198	10	N.	26	30	4	
A que está no meio delas	197	40	N.	25	20	3	
Das três a que fica mais ao Sul	199	40	N.	24	0	3	
Das duas situadas à esquerda do Serpentuário a que fica a Oeste	202	0	N.	16	30	4	
A que fica mais a Este do mesmo lado	211	30	N.	16	15	5	
A que fica a Este da anca direita	227	0	N.	10	30	4	
Das duas a Este da anterior, a que fica a Sul	230	20	N.	8	30	4	Maior
A que fica mais a Norte	231	10	N.	10	30	4	
A que fica a Este da mão direita, na rosca da cauda	237	0	N.	20	0	4	
A que fica a Este dela, na cauda	242	0	N.	21	10	4	Maior
A que fica na extremidade da cauda	251	40	N.	27	0	4	
São, portanto, 18 estrelas, das quais 5 de 3.ª grandeza, 12 de 4.ª e 1 de 5.ª							
SAGITÁRIO							
A que fica na ponta da seta	273	30	N.	39	20	4	
Das três que ficam no cabo da seta, a que está a Este	270	0	N.	39	10	6	
A que fica no meio delas	269	10	N.	39	50	5	
A que fica a Oeste das três	268	0	N.	39	0	5	
A que fica no gume	266	40	N.	38	45	5	
São, portanto, 5 estrelas, das quais 1 de 4.ª grandeza, 3 de 5.ª e 1 de 6.ª							
A ÁGUIA							
A que fica no meio da cabeça	270	30	N.	26	50	4	
A que fica no pescoço	268	10	N.	27	10	3	
A estrela brilhante a que chamam Águia	267	10	N.	29	10	2	Maior
A que fica próxima desta, ao Norte	268	0	N.	30	0	3	Menor
A que fica a Oeste, situada no ombro esquerdo	266	30	N.	31	30	3	
A que fica a Este no mesmo ombro	269	20	N.	31	30	5	
A que fica a Oeste, situada no ombro direito	263	0	N.	28	40	5	
A que fica a Este, no mesmo ombro	264	30	N.	26	40	5	Maior
A que fica na cauda chegada à Via Láctea	255	30	N.	26	30	3	
São, portanto, 9 estrelas das quais 1 é de 2.ª grandeza, 4 de 3.ª, 1 de 4.ª e 3 de 5.ª							
HÁ 6 ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:							
Das situadas ao Sul da cabeça, a que fica a Oeste	272	0	N.	21	40	3	
A que fica a Este	272	10	N.	29	10	3	

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
A que fica a sudoeste do ombro direito	259	20	N.	25	0	4 Maior
A que fica a Sul desta	261	30	N.	20	0	3
A que fica mais ao Sul	263	0	N.	15	30	5
A que fica a Oeste de todas	254	30	N.	18	10	3
São, portanto, 6 estrelas das quais 4 são de 3.ª grandeza, 1 de 4.ª e 1 de 5.ª						
O DELFIM						
Das três situadas na cauda, a que fica mais a Oeste	281	0	N.	29	10	3 Menor
Das outras duas a que fica mais ao Norte	282	0	N.	29	0	4 Menor
A que fica mais ao Sul	282	0	N.	26	40	4
Das situadas no lado Oeste do rombóide, a que fica mais ao Sul	281	50	N.	32	0	3 Menor
No mesmo lado, a que fica ao Norte	283	30	N.	33	50	3 Menor
Das situadas no lado Este, a que fica mais ao Sul	284	40	N.	32	0	3 Menor
No mesmo lado, a que fica ao Norte	286	50	N.	33	10	3 Menor
Das três situadas entre a cauda e o rombóide, a que fica ao Sul	280	50	N.	34	15	6
Das outras duas que estão a Norte, a que fica a Oeste	280	50	N.	31	50	6
A que fica a Este	282	20	N.	31	30	6
São, portanto, 10 estrelas das quais 5 são de 3.ª grandeza, 2 de 4.4 e 3 de 6.ª						
SECÇÃO DO CAVÁLO						
Das duas situadas na cabeça, a que fica a Oeste	289	40	N.	20	30	Obscura
A que fica a Este	292	20	N.	20	40	Obscura
Das duas situadas na boca, a que fica a Oeste	289	40	N.	25	30	Obscura
A que fica mais a Este	291	0	N.	25	0	Obscura
São, portanto, 4 estrelas todas menos brilhantes						
CAVALO ALADO OU PEGASO						
A que fica na boca aberta	298	40	N.	21	30	3 Maior
Das duas que estão juntas na cabeça, a que fica ao Norte	302	40	N.	16	50	3
A que fica ao Sul	301	20	N.	16	0	4
Das duas situadas na crina, a que fica ao Sul	314	40	N.	15	0	5
A que fica ao Norte	313	50	N.	16	0	5
Das duas situadas no pescoço, a que fica a Oeste	312	10	N.	18	0	3
A que fica a Este	313	50	N.	19	0	4
A que fica no jarrete esquerdo	305	40	N.	36	30	4 Maior
A que fica no joelho esquerdo	311	0	N.	34	15	4 Maior

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
A que fica no jarrete direito	317	0	N.	41	10	4 Maior
Das duas que estão juntas no peito, a que fica a Oeste	319	30	N.	29	0	4
A que fica a Este	320	20	N.	29	30	4
Das duas situadas no joelho direito, a que fica ao Norte	322	20	N.	35	0	3
A que fica ao Sul	321	50	N.	24	30	5
Das duas no corpo abaixo da asa, a que está ao Norte	327	50	N.	25	40	4
A outra, que fica ao Sul	328	20	N.	25	0	4
A que fica nas espáduas, no começo da asa	350	0	N.	19	40	2 Menor
A que fica na espádua superior direita, na parte superior da perna	325	30	N.	31	0	2 Menor
A que fica na extremidade da asa	335	30	N.	12	30	2 Menor
A que fica no umbigo, também sobre a cabeça de Andrómeda	341	10	N.	26	0	2 Menor
São, portanto, 20 estrelas das quais 4 são de 2.ª grandeza, 4 de 3.ª, 9 de 4.ª e 3 de 5.ª						
ANDRÓMEDA						
A que fica nas espáduas	348	40	N.	24	30	3
A que fica no ombro direito	349	40	N.	27	0	4
A que fica no ombro esquerdo	347	40	N.	23	0	4
Das três situadas no braço direito, a que fica ao Sul	347	0	N.	32	0	4
A que fica mais ao Norte	348	0	N.	33	30	4
A que fica ao meio das três	348	20	N.	32	20	5
Das três situadas na parte superior da mão direita, a que fica mais ao Sul	343	0	N.	41	0	4
A que fica no meio delas	344	0	N.	42	0	4
Das três, a que fica mais a Norte	345	30	N.	44	0	4
A que fica no braço esquerdo	347	30	N.	17	30	4
A que fica no cotovelo esquerdo	349	0	N.	15	50	3
Das três situadas no cinturão, a que fica mais a Sul	357	10	N.	25	20	3
A que fica ao meio	355	10	N.	30	0	3
Das três a que fica mais a Norte	355	20	N.	32	30	3
A que fica no pé esquerdo	10	10	N.	23	0	3
A que fica no pé direito	10	30	N.	37	20	4 Maior
A que fica mais a Sul destas	8	30	N.	35	20	4 Maior
Das duas situadas abaixo da curva da perna, a que fica a Norte	5	40	N.	29	0	4
A que fica a Sul	5	20	N.	28	0	4
A que fica no joelho direito	5	30	N.	35	30	5
Das duas situadas no manto e sua cauda, a que fica ao Norte	6	0	N.	34	30	5
A que fica ao Sul	7	30	N.	32	30	5
A que fica para além da mão direita e fora da constelação	5	0	N.	44	0	3
São, portanto, 23 estrelas, das quais 7 de 3.ª grandeza, 12 de 4.ª, e 4 de 5.ª						

Constelações das estrelas	Longitude. Gr.	Longitude. Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
O TRIÂNGULO						
A que fica no vértice do triângulo	4	20	N.	16	30	3
Das três situadas na base, a que fica mais a Oeste	9	20	N.	20	40	3
A que fica ao meio	9	30	N.	20	20	4
Das três, a que fica mais a Este	10	10	N.	19	0	3
São, portanto, 4 estrelas, das quais 3 são de 3.ª grandeza e 1 de 4.ª						
Resumindo, há na Zona Norte 360 estrelas, 3 de 1.ª grandeza, 18 de 2.ª, 81 de 3.ª, 177 de 4.ª, 58 de 5.ª, 13 de 6.ª, uma nebulosa e 9 menos claras.						

AS QUE FICAM AO MEIO E JUNTO AO ZODÍACO

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
O CARNEIRO						
Das duas situadas no corno, a que fica a Oeste e a primeira de todas.	0	0	N.	7	20	3 Menor
A que fica a Este nos cornos.	1	0	N.	8	20	3
Das duas situadas na boca aberta, a que fica a Norte	4	20	N.	7	40	5
A que fica mais a Sul	4	50	N.	6	0	5
A que fica no pescoço	9	50	N.	5	30	5
A que fica nos rins	10	50	N.	6	0	6
A que fica no começo da cauda	14	40	N.	4	50	5
Das três situadas na cauda, a que fica mais a Oeste	17	10	N.	1	40	4
A que fica ao meio	18	40	N.	2	30	4
Das três a que fica mais a Este	20	20	N.	1	50	4
A que fica na anca	13	0	N.	1	10	5
A que fica na curva da perna	11	20	S.	1	30	5
A que fica na extremidade da pata posterior	8	10	S.	5	15	4 Maior
São, portanto, 13 estrelas, das quais 2 são de 3.ª grandeza, 4 de 4.ª, 6 de 5.ª e 1 de 6.ª						
HÁ 5 ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA						
A estrela brilhante que fica acima da cabeça	3	50	N.	10	0	3 Maior
Por cima do dorso, a que fica mais a Norte	15	0	N.	10	10	4
Das outras três estrelas baças a que fica a Norte	14	40	N.	12	40	5
A que fica ao meio	13	0	N.	10	40	5
Das três, a que fica mais a Sul	12	30	N.	10	40	5
São, portanto, 5 estrelas, da quais 1 é de 3.ª grandeza, 1 de 4.ª e 3 de 5.ª						
O TOURO						
Das quatro situadas no corte, a que fica mais ao Norte	19	40	S.	6	0	4
A segunda a seguir a esta	19	20	S.	7	15	4
A terceira	18	0	S.	8	30	4
A quarta que fica mais a Sul	17	50	S.	9	15	4
A que fica na espádua direita	23	0	S.	9	30	5
A que fica no peito	27	0	S.	8	0	3
A que fica no joelho direito	30	0	S.	12	40	4
A que fica no jarrete direito	26	20	S.	14	50	4
A que fica no joelho esquerdo	35	30	S.	10	0	4
A que fica no jarrete esquerdo	36	20	S.	13	30	4
Das 5 chamadas Híadas, situadas no focinho, a que fica nas narinas	32	0	S.	5	45	3 Menor
A que fica entre esta e o olho situado a Norte	33	40	S.	4	15	3 Menor
A que fica entre a mesma e o olho situado a Sul	34	10	S.	0	50	3 Menor
Nesse olho, a estrela brilhante chamada Palilício pelos Romanos	36	0	S.	5	10	1

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
A que fica no olho situado a Norte	35	10	S.	3	0	3 Menor
A que fica entre o começo do corno situado a Sul e a orelha	40	30	S.	4	0	4
Das duas estrelas que estão no mesmo corno, a que fica mais a Sul	43	40	S.	5	0	4
A que fica mais a Norte	43	20	S.	3	30	5
A que fica na extremidade do mesmo corno	50	30	S.	2	30	3
A que fica no começo do corno situado a Norte	49	0	S.	4	0	4
A que fica na extremidade do mesmo corno também no pé direito do Heníoco	49	0	N.	5	0	3
Das duas situadas na orelha a Norte, a que fica mais ao Norte	35	20	N.	4	30	5
Destas duas, a que fica mais a Sul	35	0	N.	4	0	5
Das duas estrelas pequenas situadas no pescoço, a que fica mais a Oeste	30	20	N.	0	40	5
A que fica a Este	32	20	N.	1	0	6
Das estrelas a Oeste do quadrilátero, no pescoço, a que fica a Sul	31	20	N.	5	0	5
A que fica a Norte, do mesmo lado	32	10	N.	7	10	5
A que fica a Sul, do lado Este	35	20	N.	3	0	5
A que fica a Norte desse lado	35	0	N.	5	0	5
Do lado Oeste das Pléiades, mais a Norte	25	30	N.	4	30	5
A que fica na extremidade Sul, do mesmo lado	25	50	N.	4	40	5
A que fica na extremidade Este e mais próxima das Plêiades	27	0	N.	5	20	5
A mais pequena das Plêiades, e separada das últimas	26	0	N.	3	0	5

São, portanto, 33 estrelas, da quais 1 de 1.ª grandeza, 7 de 3.ª, 11 de 4.ª, 13 de 5.ª e 1 de 6.ª
Não está incluída a que fica na extremidade do corno situado a Norte.

ESTRELAS SITUADAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:

A que fica, em baixo, entre o pé e a espádua	18	20	S.	17	30	4
Das três próximas do corno do Sul, a que fica a Oeste	43	20	S.	2	0	5
A que fica ao meio das três	47	20	S.	1	45	5
A que fica a Este das três	49	20	S.	2	0	5
Das duas situadas abaixo da ponta do mesmo corno, a que fica mais a Norte	52	20	S.	6	20	5
A que fica mais a Sul	52	20	S.	7	40	5
Das cinco situadas abaixo do corno ao Norte, a que fica a Oeste	50	20	N.	2	40	5
A segunda a Este	52	20	N.	1	0	5
A terceira a Este	54	20	N.	1	20	5
Das outras duas, a que fica mais a Norte	55	40	N.	3	20	5
A que fica mais a Sul	56	40	N.	1	15	5

São, portanto, 11 estrelas, das quais 1 é de 4.ª grandeza e 10 de 5.ª grandeza

OS GÉMEOS

A que fica na cabeça de Gémeos que está a Oeste Castor	76	40	N.	9	30	2

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
A estrela alourada que fica na cabeça do género que está a Este, Polux	79	50	N.	6	15	2
A que fica no cotovelo esquerdo de Gémeos que está a Oeste	70	0	N.	10	0	4
A que fica no braço esquerdo	72	0	N.	7	20	4
A que fica nas espáduas dos mesmos Gémeos	75	20	N.	5	30	4
A que fica no seu ombro direito	77	20	N.	4	50	4
A do ombro esquerdo de Gémeos, a Este	80	0	N.	2	40	4
A do lado direito de Gémeos, a Oeste	75	0	N.	2	40	5
A do lado esquerdo de Gémeos, a Este	76	30	N.	3	0	5
A do joelho esquerdo de Gémeos, a Oeste	66	30	N.	1	30	3
A do joelho esquerdo de Gémeos, a Este	71	35	S.	2	30	3
A da virilha esquerda de Gémeos	75	0	S.	0	30	3
A da curva da perna direita de Gémeos	74	40	S.	0	40	3
A de Oeste, no pé de Gémeo de Este	60	0	S.	1	30	4 Maior
A de Este, no mesmo pé	61	30	S.	1	15	4
A da ponta do pé do Gémeo de Oeste	63	30	S.	3	30	4
A da parte superior do pé de Gémeo de Este	65	20	S.	7	30	3
A da parte inferior do mesmo pé	68	0	S.	10	30	4
São, portanto, 18 estrelas, das quais 2 são de 2.ª grandeza, 5 de 3.ª, 9 de 4.ª, 2 de 5.ª						
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
A que fica a Oeste da parte superior do pé do Gémeo que está a Oeste	57	30	S.	0	40	4
A estrela brilhante a Oeste do joelho do mesmo	59	50	N.	5	50	4 Maior
A que fica a Oeste do joelho esquerdo do Gémeo que está a Este	68	30	S.	2	15	5
Das três a Este da mão direita do Gémeo que está a Este, a que fica mais a Norte	81	40	S.	1	20	5
A que fica ao meio	79	40	S.	3	20	5
Das três próximas do braço direito, a que fica mais a Sul	79	20	S.	4	30	5
A estrela brilhante a Este das três	84	0	S.	2	40	4
São, portanto, 7 estrelas, das quais 3 são de 4.ª grandeza e 4 de 5.ª						
CARANGUEJO OU CÂNCER						
Estrela nebulosa, que fica ao meio, no peito, chamada Presépio	93	40	N.	0	40	Nebulosa
Das duas a Ocidente, no quadrilátero, a que fica mais a Norte	91	0	N.	1	15	4 Menor
A que fica mais a Sul	91	20	S.	1	10	4 Menor
Das duas a Este chamadas Burros, a que fica mais a Norte	93	40	N.	2	40	4 Maior
O «Burro» que fica a Sul	94	40	S.	0	10	4 Maior
A que fica no braço ou pinça, ao Sul	99	50	S.	5	30	4
A que fica na pinça, ao Norte	91	40	N.	11	50	4
A que fica na extremidade do pé, ao Norte	86	0	N.	1	0	5
A que fica na extremidade do pé, ao Sul	90	30	S.	7	30	4 Maior
São, portanto, 9 estrelas, das quais 7 são de 4.ª grandeza, 1 de 5.ª e 1 nebulosa						

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Min.		Latitude Gr.	Min.	Grandeza
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
A que fica acima da articulação da pinça, ao Sul	103	0	S.	2	40	4 Menor
A que fica a Este da extremidade da mesma pinça	105	0	S.	5	40	4 Menor
Das duas que estão por cima da núvem pequena, a que fica a Oeste	97	20	N.	4	50	5
A que fica a Oeste dela	100	20	N.	7	15	5
São, portanto, 4 estrelas, das quais 2 são de 4.ª grandeza e 2 de 5.ª						
LEÃO						
A que fica na narinas	101	40	N.	10	0	4
A que fica na boca aberta	104	30	N.	7	30	4
Das duas situadas na cabeça, a que fica a Norte	107	40	N.	12	0	3
A que fica a Sul	107	30	N.	9	30	3 Maior
Das três situadas no pescoço, a que fica mais a Norte	113	30	N.	11	0	3
A que fica no meio	115	30	N.	8	30	2
Das três, a que fica a Sul	114	0	N.	4	30	3
A que fica sobre o coração, chamada Basilisco ou Régulo	115	50	N.	0	10	1
Das duas situadas no peito, a que fica mais a Sul	116	50	S.	1	50	4
A que fica ligeiramente a Oeste da estrela que está no coração	113	20	S.	0	15	5
A que fica no joelho direito anterior	110	40		0	0	5
A que fica na pata direita	117	30	S.	3	40	6
A que fica no joelho anterior esquerdo	122	30	S.	4	10	4
A que fica na pata esquerda	115	50	S.	4	15	4
A que fica na axila esquerda	122	30	S.	0	10	4
Das três situadas no abdómen, a que está a Oeste	120	20	N.	4	0	6
Das duas situadas a Este, a que fica a Norte	126	20	N.	5	20	6
A que fica a Sul	125	40	N.	2	20	6
Das duas situadas no espinhaço, a que fica a Oeste	124	40	N.	12	15	5
A que fica a Este	127	30	N.	13	40	2
Das duas situadas na anca, a que fica ao Norte	127	40	N.	11	30	5
A que fica a Sul	129	40	N.	9	40	3
A que fica na coxa posterior	133	40	N.	5	50	3
A que fica na curva da perna	135	0	N.	1	15	4
A que fica no joelho posterior	135	0	S.	0	50	4
A que fica na pata posterior	134	0	S.	3	0	5
A que fica na extremidade da cauda	137	50	N.	11	50	1 Menor
São, portanto, 27 estrelas, das quais 2 são de 1.ª grandeza, 2 de 2.ª, 6 de 3.ª, 8 de 4.ª, 5 de 5.ª, 4 de 6.ª						
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO, MAS PRÓXIMAS DELA:						
Das duas situadas por cima do dorso, a que fica a Oeste	119	20	N.	13	20	5

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
A que fica a Este	121	30	N.	15	30	5
Das três situadas por baixo do abdómen, a que fica ao Norte	129	50	N.	1	10	4 Menor
A que fica ao meio	130	30	S.	0	30	5
Das três referidas, a que fica ao Sul	132	20	S.	2	40	5
A estrela que fica mais distante a Norte, na nebulosa entre o Leão e a Ursa, a que chamam cabeleira de Berenice	138	10	N.	30	0	
Das duas situadas a Sul, a que fica a Oeste	133	50	N.	25	0	Obscura
A que fica a Este, em forma duma folha de hera	141	50	N.	25	30	Obscura
São, portanto, 8 estrelas, das quais 1 de 4.ª grandeza, 4 de 5.ª, 1 brilhante e 2 baças						
A VIRGEM						
Das duas situadas no alto da cabeça, a que está a Oeste e Sul	139	40	N.	4	15	5
A que está a nordeste	140	20	N.	5	40	5
Das duas situadas no rosto, a que está ao Norte	144	0	N.	8	0	5
A que fica a Sul	143	30	N.	5	30	5
A que fica na extremidade da asa esquerda, a Sul	142	20	N.	6	0	3
Da quatro situadas na asa esquerda, a que fica a Oeste	151	35	N.	1	10	3
A segunda, a Este	156	30	N.	2	50	3
A terceira	160	30	N.	2	50	5
A última das quatro	164	20	N.	1	40	4
A que fica no lado direito, abaixo do cinto	157	40	N.	8	30	3
Das três situadas na asa direita ao Norte, a que fica a Oeste	151	30	N.	13	50	5
Das duas restantes, a que fica a Sul	153	30	N.	11	40	6
Destas, a chamada Vindimadeira, que fica ao Norte	155	30	N.	15	10	3 Maior
A que fica na mão esquerda, chamada Espiga	170	0	S.	2	0	1
A que fica abaixo do cinto, na anca direita	168	10	N.	8	40	3
Das que estão a Oeste do quadrilátero na anca esquerda, a que fica a Norte	169	40	N.	2	20	5
A que fica a Sul	170	20	N.	0	10	6
Das duas situadas a Este, a que fica a Norte	173	20	N.	1	30	4
A que fica ao Sul	171	20	N.	0	20	5
A que fica no joelho esquerdo	175	0	N.	1	30	5
A que fica na parte de trás da anca direita	171	20	N.	8	30	5
Das que ficam na túnica, a que está no meio	180	0	N.	7	30	4
A que está a Sul	180	40	N.	2	40	4
A que está a Norte	181	40	N.	11	40	4
A que fica no pé esquerdo a Sul	183	20	N.	0	30	4
A que fica no pé direito a Norte	186	0	N.	9	50	3
São 26 estrelas, portanto, das quais 1 é de 1.ª grandeza, 7 de 3.ª, 6 de 4.ª, 11 de 5.ª e 2 de 6.ª						

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.		Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
Das três, numa linha recta abaixo da asa esquerda, a que fica a Oeste	158	0	S.	3	30	5
A que fica no meio	162	20	S.	3	30	5
A que fica a Este	165	35	S.	3	20	5
Das três que estão numa linha recta abaixo da esfinge, a que fica a Oeste	170	30	S.	7	20	6
A que fica ao meio, numa estrela dupla	171	30	S.	8	20	5
Das três, a que fica a Este	173	20	S.	7	50	6
São, portanto, seis estrelas, das quais 4 são de 5.ª grandeza, e 2 de 6.ª						
A BALANÇA						
Das duas situadas na extremidade do braço Sul da Balança, a brilhante	191	20	N.	0	40	2 Maior
A mais baça a Norte	190	20	N.	2	30	5
Das duas situadas na extremidade do braço da balança ao Norte, a que é brilhante	195	30	N.	8	30	2
A mais baça, a Oeste daquela	191	0	N.	8	30	5
A que fica no meio do braço da Balança, ao Sul	197	20	N.	1	40	4
No mesmo braço da Balança, a que fica a Oeste	194	40	N.	1	15	4
A do braço da Balança, ao Norte	200	50	N.	3	45	4
No mesmo braço da Balança, a de Este	206	20	N.	4	30	4
São, portanto, 8 estrelas, das quais 2 de 2.ª grandeza, 4 de 4.ª e 2 de 5.ª						
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
Das três situadas ao Norte do braço Norte da Balança, a que está a Oeste	199	30	N.	9	0	5
Das duas a Este, a que fica a Sul	207	0	N.	6	40	4
Destas, a que fica a Norte	207	40	N.	9	15	4
Das três situadas entre os braços da Balança, a que fica a Este	205	50	N.	5	30	6
Das duas restantes, a Oeste, a que fica ao Norte	203	40	N.	2	0	4
A que fica ao Sul	204	30	N.	1	30	5
Das três situadas abaixo do braço Sul da Balança, a que fica ao Oeste	196	20	S.	7	30	3
Das restantes a Este, a que fica ao Norte	204	30	S.	8	10	4
A que fica ao Sul	205	20	S.	9	40	4
São, portanto, 9 estrelas, das quais 1 é de 3.ª grandeza, 5 de 4.ª, e 1 de 6.ª						
O ESCORPIÃO						
Das três brilhantes da testa, a que fica ao Norte	209	40	N.	1	20	3 Maior
A que fica no meio	209	0	S.	1	40	3
Das três, a que fica ao Sul	209	0	S.	5	0	3

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
A que fica mais ao Sul, na pata	209	20	S.	7	50	3
Das duas que estão juntas, a estrela brilhante que fica a Norte	210	20	N.	1	40	4
A que fica a Sul	210	40	N.	0	30	4
Das três estrelas brilhantes situadas no corpo, a que fica a Oeste	214	0	S.	3	45	3
A estrela avermelhada que fica ao meio, chamada Autares	216	0	S.	4	0	2 Maior
Das três, a que fica a Este	217	50	S.	5	30	3
Das duas situadas na última pinça, a que fica a Oeste	212	40	S.	6	10	5
A que fica a Este	213	50	S.	6	40	5
A que fica no primeiro segmento do corpo	221	50	S.	11	0	3
A que fica no segundo segmento	222	10	S.	15	0	4
Da estrela dupla situada no terceiro segmento, a que fica a Norte	223	20	S.	18	40	4
Da estrela dupla, a que fica a Sul	223	30	S.	18	0	3
A que fica no quarto segmento	226	30	S.	19	30	3
A que fica no quinto segmento	231	30	S.	18	50	3
A que fica no sexto segmento	233	50	S.	16	40	3
A que fica no sétimo segmento, a mais próxima do aguilhão	232	20	S.	15	10	3
Das duas situadas no aguilhão, a que fica a Este	230	50	S.	13	20	3
A que fica a Oeste	230	20	S.	13	30	4
São, portanto, 21 estrelas, das quais 1 é de 2.ª grandeza, 13 de 3.ª, 5 de 4.ª e 2 de 5.ª						
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
A estrela nebulosa a Este do aguilhão	234	30	S.	13	15	Nebulosa
Das duas situadas ao Norte do aguilhão, a que fica a Oeste	228	50	S.	6	10	5
A que fica a Este	232	50	S.	4	10	5
Destas 3 estrelas, 2 são de 5.ª grandeza e 1 nebulosa						
O SAGITÁRIO						
A que fica na ponta da seta	237	50	S.	6	30	3
A que fica na palma da mão esquerda	241	0	S.	6	30	3
A que fica na parte Sul do arco	241	20	S.	10	50	3
Das duas na parte Norte do arco a que fica a Sul	242	20	S.	1	30	3
A que fica mais ao Norte, na ponta do arco	240	0	N.	2	50	4
A que fica no ombro esquerdo	248	40	S.	3	10	3
A que fica a Oeste da que está no dardo	246	20	S.	3	50	4
A estrela dupla e nebulosa, situada no olho	248	30	N.	0	45	Nebulosa
Das três situadas na cabeça, a que fica a Oeste	249	0	N.	2	10	4
A que fica no meio	251	0	N.	1	30	4 Maior
A que fica a Este	252	30	N.	2	0	4

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
Das três situadas na parte Norte do manto, a que fica a Sul	254	40	N.	2	50	4
A que fica no meio	255	40	N.	4	30	4
Das três, a que fica a Norte	256	10	N.	6	30	4
A estrela baça, a Este das três	259	0	N.	5	30	6
Das duas situadas na parte Sul do manto, a que fica a Norte	262	50	N.	5	50	5
A que fica a Sul	261	0	N.	2	0	6
A que fica no ombro direito	255	40	S.	1	50	5
A que fica no cotovelo direito	258	10	S.	2	50	5
A que fica nas espáduas	253	20	S.	2	30	5
A que fica no antebraço	251	0	S.	4	30	4 Maior
A que fica na axila	249	40	S.	6	45	3
A que fica no jarrete [da perna] esquerda da	251	0	S.	23	0	2
A do joelho da mesma perna	250	20	S.	18	0	2
A do jarrete [da perna] direita da frente	240	0	S.	13	0	3
A que fica na espádua esquerda	260	40	S.	13	30	3
A do joelho [da perna] direita da frente	260	0	S.	20	10	3
Das quatro situadas no lado Norte do começo da cauda, a que fica a Ocidente	261	0	S.	4	50	5
A que fica do mesmo lado e a Este	261	10	S.	4	50	5
A que fica a Oeste, no lado Sul	261	50	S.	5	50	5
A que fica a Este deste mesmo lado	263	0	S.	6	30	5

São, portanto, 32 estrelas, das quais 2 são de 2.ª grandeza, 9 de 3.ª, 9 de 4.ª, 8 de 5.ª e 1 nebulosa

O CAPRICÓRNIO

Das três do corno a Oeste, a que fica ao Norte	270	40	N.	7	30	3
A que fica no meio	271	0	N.	6	40	6
A que fica ao Sul	270	40	N.	5	0	3
A que fica na extremidade do corno a Este	272	20	N.	8	0	6
Das três situadas na boca aberta, a que fica ao Sul	272	20	N.	0	45	6
Das outras duas, a que fica a Oeste	272	0	N.	1	45	6
A que fica a Este	272	10	N.	1	30	6
A que fica abaixo do olho direito	270	30	N.	0	40	5
Das duas situadas no pescoço, a que fica ao Norte	275	0	N.	4	50	6
A que fica ao Sul	275	10	S.	0	50	5
A que fica no joelho direito	274	10	S.	6	30	
A que fica no joelho esquerdo levemente inclinado	275	0	S.	8	40	
A que fica na espádua esquerda	280	0	S.	7	40	
Das duas juntas, abaixo do abdómen, a que fica a Oeste	283	30	S.	6	50	
A que fica a Este	283	40	S.	6	0	
Das três situadas no meio do corpo, a que fica a Este	282	0	S.	4	15	
Das duas a Oeste, a mais a Sul	280	0	S.	4	0	5

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
Das duas, a que fica ao Norte	280	0	S.	2	50	5
Das duas situadas no dorso, a que fica a Oeste	280	0	S.	0	0	4
A que fica a Este	284	20	S.	0	50	4
Das duas situadas na parte sul da espinha dorsal, a que fica a Oeste	286	40	S.	4	45	4
A que fica a Este	288	20	S.	4	30	4
Das duas situadas na parte Sul da espinha dorsal, a que fica a Oeste	288	10	S.	2	10	3
A que fica a Este	289	40	S.	2	0	3
Das quatro situadas na parte Norte da cauda, a que fica a Oeste	290	10	S.	2	20	4
Das três restantes, a que fica a Sul	292	0	S.	5	0	5
A que fica no meio	291	0	S.	2	50	5
A que fica a Norte, na extremidade da cauda	292	0	N.	4	[illegible]0	5
São, portanto, 28 estrelas, das quais 4 são de 3.ª grandeza, 9 de 4.ª, 6 de 5.ª e 6 e 6.ª						
O AQUÁRIO						
A que fica na cabeça	293	40	N.	15	45	5
A estrela mais brilhante que fica no ombro direito	299	44	N.	11	0	3
A menos brilhante	298	30	N.	9	40	5
A que fica no ombro esquerdo	290	0	N.	8	50	3
A que fica por baixo da axila	290	40	N.	6	15	5
Das três situadas na túnica, abaixo da mão esquerda, a que fica a Este	280	0	N.	5	30	3
A que fica no meio	279	30	N.	8	0	4
Das três a que fica a Oeste	278	0	N.	8	30	3
A que fica no cotovelo direito	302	50	N.	8	45	3
Na mão direita, a estrela que fica ao Norte	303	0	N.	10	45	3
Ds duas restantes que ficam a Sul, a que está a Oeste	305	20	N.	9	0	3
A que fica a Este	306	40	N.	8	30	3
Das duas juntas na anca direita, a que fica a Oeste	299	30	N.	3	0	4
A que fica a Este	300	20	N.	2	10	5
A que fica no quadril direito	302	0	S.	0	50	4
Das duas situadas na anca esquerda, a que fica a Sul	295	0	S.	1	40	4
A que fica a Norte	295	30	N.	4	0	6
Das situadas na canela da perna direita, a que fica a Sul	305	0	S.	7	30	3
A que fica a Norte	304	40	S.	5	0	4
A que fica no quadril esquerdo	301	0	S.	5	40	5
Das duas situadas na canela da perna esquerda, a que fica a Sul	300	40	S.	10	0	5
A que fica a Norte, abaixo do joelho	302	10	S.	9	0	5
A primeira estrela situada na água derramada com a mão	303	20	N.	2	0	4
A que fica a Este, mais para o Sul	308	10	N.	0	10	4
A que fica a Este desta, na primeira curva da água	311	0	S.	1	10	4
A que fica a Este dela	313	20	S.	0	30	4
A que fica a Sul na segunda curva da água	313	50	S.	1	40	4

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.		Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
Das duas a Este, a que fica a Norte	312	30	S.	3	30	4
A que fica a Sul	312	50	S.	4	10	4
A que está isolada no Sul	314	10	S.	8	15	5
Das duas estrelas juntas, a Este desta, a que fica a Oeste	316	0	S.	11	0	5
A que fica a Este	316	30	S.	10	50	5
Das três situadas na terceira curva da água, a que fica a Norte	315	0	S.	14	0	5
A que fica no meio	316	0	S.	14	45	5
Das três, a que fica a Este	316	30	S.	15	40	5
Das três situadas a Este, numa formação semelhante, a que fica a Norte	310	20	S.	14	10	4
A que fica no meio	310	50	S.	15	0	4
Das três, a que fica a Sul	311	40	S.	15	45	4
Das três da última curva, a de Oeste	305	10	S.	14	50	4
Das três situadas a Este, a que fica a Sul	306	0	S.	15	20	4
A que fica a Norte	306	30	S.	14	0	4
A última estrela, aquela que fica na água e na boca do peixe, a Sul	300	20	S.	23	0	1
São, portanto, 42 estrelas, das quais 1 é de 1.ª grandeza, 9 de 3.ª, 18 de 4.ª, 13 de 5.ª e 1 de 6.						
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
Das três a Este da curva da água, a que fica a Oeste	320	0	S.	15	30	4
Das duas restantes, a que fica a Norte	323	0	S.	14	20	4
Destas, a que fica a Sul	322	20	S.	18	15	4
São 3 estrelas mais brilhantes do que as da 4.ª grandeza						
OS PEIXES						
No peixe de Oeste:						
A que fica na boca do peixe de Oeste	315	0	N.	9	15	4
Das duas situadas na parte de trás da cabeça a que fica a Sul	317	30	N.	7	30	4 Maior
A que fica a Norte	321	30	N.	9	30	4
Das duas que estão no dorso, a que fica a Oeste	319	20	N.	9	20	4
A que fica a Este	324	0	N.	7	30	4
Das que ficam no abdómen do peixe, a que está a Oeste	319	20	N.	4	30	4
A que fica a Este	323	0	N.	2	30	4
A que fica na cauda do mesmo peixe	329	20	N.	6	20	4
A primeira a seguir à cauda, na sua linha	334	20	N.	5	45	6
A que fica a Este	336	20	N.	2	45	6
Das três estrelas brilhantes a Este desta, a que fica a Oeste	340	30	N.	2	15	4
A que fica no meio	343	50	N.	1	10	4
A que fica a Este	346	20	S.	1	20	4

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
Das duas pequenas [estrelas] da curva, a que fica a Norte	345	40	S.	2	0	6
A que fica a Sul	346	20	S.	5	0	6
Das três situadas a Este da curva, a que fica a Oeste	350	20	S.	2	20	4
A que fica no meio	352	0	S.	4	40	4
A que fica a Este	354	0	S.	7	45	4
A que fica no nó das duas linhas	356	0	S.	8	30	3
A que fica na linha do Norte, a Oeste do nó	354	0	S.	4	20	4
Das três situadas a Este desta, a que fica ao Sul	353	30	N.	1	30	5
A que fica no meio	353	40	N.	5	20	3
Das três, a que fica a Norte e a última na linha	353	50	N.	9	0	4
No peixe a Este:						
Das duas situadas na boca, a que fica ao Norte	355	20	N.	21	45	5
A que fica a Sul	355	0	N.	21	30	5
Das três estrelas pequenas situadas na cabeça, a que fica a Este	352	0	N.	20	0	6
A que fica no meio	351	0	N.	19	50	6
Das três a que fica a Oeste	350	20	N.	23	0	6
Das três situadas na barbatana a Sul, a que fica a Oeste, junto do ombro esquerdo da Andrómeda	349	0	N.	14	20	4
A que fica no meio	349	40	N.	13	0	4
Das três, a que fica a Este	351	0	N.	12	0	4
Das duas situadas no abdómen do peixe, a que fica ao Norte	355	30	N.	17	0	4
A que fica mais a Sul	352	40	N.	15	20	4
A que fica na barbatana a Este, próximo da cauda	353	20	N.	11	45	4

São, portanto, 34 estrelas, das quais 2 de 3.ª grandeza, 22 de 4.ª, 3 de 5.ª e 7 de 6.ª

ESTRELAS SITUADAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:

No lado Sul, a que fica a Oeste	324	30	S.	2	40	4
A que fica a Este	325	35	S.	2	30	4
No lado Norte do quadrilátero, abaixo do peixe situado a Oeste, a que fica a Oeste	324	0	S.	5	50	4
A que fica a Este	325	40	S.	5	30	4

São 4 estrelas de 4ª grandeza

Assim, no Zodíaco há 346 estrelas, 5 de 1.ª grandeza, 9 de 2.ª, 64 de 3.ª, 133 de 4.ª, 105 de 5.ª, 27 de 6.ª, 3 nebulosas. Além destas, há também a «Cabeleira» que, como dissemos atrás, foi chamada a «Cabeleira de Berenice» por Conon.

ZONA AUSTRAL

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
A BALEIA						
A que fica na extremidade do focinho, nas nas narinas	11	0	S.	7	45	4
Das três situadas no queixo superior, a que fica a Este	11	0	S.	11	20	3
A que está no meio, ao centro da boca	6	0	S.	11	30	3
Das três situadas na face, a que fica a Oeste	3	50	S.	14	0	3
A que fica no olho	4	0	S.	8	10	4
A que fica na cabeleira, a Norte	5	30	S.	6	20	4
A que fica na crina, a Oeste	1	0	S.	4	10	4
Das quatro situadas no peito, a que fica a Norte das que estão a Oeste	355	20	S.	24	30	4
A que fica ao Sul	356	40	S.	28	0	4
Das que ficam a Este, a que está ao Norte	0	0	S.	25	10	4
A que fica ao Sul	0	20	S.	27	30	3
Das três situadas no corpo, a que fica ao meio	345	20	S.	25	20	3
A que fica ao Sul	346	20	S.	30	30	4
Das três a que fica ao Norte	348	20	S.	20	0	3
Das duas situadas na cauda, a que fica a Este	343	0	S.	15	20	3
A que fica a Oeste	338	20	S.	15	40	3
Daquelas que estão a Este do quadrilátero situado na cauda, a que fica ao Norte	335	0	S.	11	40	5
A que fica ao Sul	334	0	S.	13	40	5
Das restantes situadas a Oeste, a que fica a Norte	332	40	S.	13	0	5
A que fica ao Sul	332	20	S.	14	0	5
A que fica na extremidade Norte da cauda	327	40	S.	9	30	3
A que fica na extremidade Sul da cauda	329	0	S.	20	20	3
São, portanto, 22 estrelas, das quais 10 são de 3.ª grandeza, 8 de 4.ª e 4 de 5.ª						
ORION						
A estrela nebulosa situada na cabeça	50	20	S.	16	30	Nebulosa
A estrela avermelhado-claro situada no ombro direito	55	20	S.	17	0	1
A que fica no ombro esquerdo	43	40	S.	17	30	2 Maior
A que fica a Este daquela	48	20	S.	18	0	4 Menor
A que fica no cotovelo direito	57	40	S.	14	30	4
A que fica no antebraço direito	59	40	S.	11	50	6
Das quatro que estão na mão direita, situadas a Sul, a que fica a Este	59	50	S.	10	40	4
A que fica a Oeste	59	20	S.	9	45	4
No lado Norte, a que fica a Este	60	40	S.	8	15	6
No mesmo lado, a que fica a Oeste	59	0	S.	8	15	6
Das duas situadas no cajado, a que fica a Oeste	55	0	S.	3	45	5
A que fica a Este	57	40	S.	3	15	5
Das quatro que estão em linha recta nas costas, a que fica a Oeste	50	50	S.	19	40	4

Constelações das estrelas	Longitude			Latitude		Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
A segunda a Oeste	49	40	S.	20	0	6
A terceira a Oeste	48	40	S.	20	20	6
A quarta a Oeste	47	30	S.	20	30	5
Das nove situadas no escudo, a que fica mais ao Norte	43	50	S.	8	0	4
A segunda	42	40	S.	8	10	4
A terceira	41	20	S.	10	15	4
A quarta	39	40	S.	12	50	4
A quinta	38	30	S.	14	15	4
A sexta	37	50	S.	15	50	3
A sétima	38	10	S.	17	10	3
A oitava	38	40	S.	20	20	3
A última que fica mais ao Sul	39	40	S.	21	30	3
Das três estrelas brilhantes, situadas no cinturão a que fica a Oeste	48	40	S.	24	10	2
A que está ao meio	50	40	S.	24	50	2
Das três que ficam em linha recta, a que está a Este	52	40	S.	25	30	2
A que fica no punho da espada	47	10	S.	25	50	3
Das três que estão na espada, a que fica ao Norte	50	10	S.	28	40	4
A que fica ao meio	50	0	S.	29	30	3
A que fica ao Sul	50	20	S.	29	50	3 Menor
Das três situadas na extremidade da espada, a que fica a Este	51	0	S.	30	30	4
A que fica a Oeste	49	30	S.	30	50	4
A estrela brilhante situada no pé direito que é comum ao Rio	42	30	S.	31	30	1
A que fica na canela da perna esquerda	44	20	S.	30	15	4 Maior
A que fica no calcanhar esquerdo	46	40	S.	31	10	4
A que fica no joelho direito	53	30	S.	33	30	3

São, portanto, 38 estrelas, das quais 2 são de 1.ª grandeza, 4 de 2.ª, 8 de 3.ª, 15 de 4.ª, 3 de 5.ª, 5 de 6.ª e 1 nebulosa.

O RIO

A que fica a seguir ao pé esquerdo de Órion, no começo do Rio	41	40	S.	31	50	4
Na curva da perna de Órion, a que fica mais a Norte	42	10	S.	28	15	4
Das duas a Oeste daquela, a que fica mais a Este	41	20	S.	29	50	4
A que fica a Oeste	38	0	S.	28	15	4
Das duas seguintes, a que fica a Este	36	30	S.	25	15	4
A que fica a Oeste dela	33	30	S.	25	20	4
Das três a seguir à anterior, a que fica a Este	29	40	S.	26	0	4
A que fica ao meio	29	0	S.	27	0	4
Das três a que fica a Oeste	26	10	S.	27	50	4
Das quatro depois do intervalo, a que fica a Este	20	20	S.	32	50	3

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza	
	Gr.	Min.		Gr.	Min.		
A que fica a Oeste desta	18	0	S.	31	0	4	
A terceira a Oeste	17	30	S.	28	50	3	
De todas as quatro, a que fica a Oeste	15	30	S.	28	0	3	
Das quatro outras estrelas, do mesmo modo a que fica a Este	10	30	S.	25	30	3	
A que fica a Oeste	8	10	S.	23	50	4	
A que fica um pouco mais para Oeste	5	30	S.	23	10	3	
Das quatro, a que fica na extremidade deste	3	50	S.	23	15	4	
A que fica na curva do Rio, tocando o peito da Baleia	358	30	S.	32	10	4	
A que fica a Este	359	10	S.	34	50	4	
Das três situadas a Este, a que fica a Oeste	2	10	S.	38	30	4	
A que fica ao meio	7	10	S.	38	10	4	
Das três, a que fica a Este	10	50	S.	39	0	5	
Das duas a Oeste, situadas no quadrilátero à que fica ao Norte	14	40	S.	41	30	4	
A que fica a Sul	14	50	S.	42	30	4	
No lado Este, a que fica a Oeste	15	30	S.	43	20	4	
Das quatro, a que fica a Este	18	0	S.	43	20	4	
Na direcção Este, das duas juntas, a que fica ao Norte	27	30	S.	50	20	4	
A que fica mais ao Sul	28	20	S.	51	45	4	
Das duas que estão na curva, a que fica a Este	21	30	S.	53	50	4	
A que fica a Oeste	19	10	S.	53	10	4	
Das três situadas na extensão restante, a que fica a Este	11	10	S.	53	0	4	
A que fica ao meio	8	10	S.	53	30	4	
Das três, a que fica a Oeste	5	10	S.	52	0	4	
A estrela brilhante, na extremidade do Rio	353	30	S.	53	30	1	
São, portanto, 34 estrelas, 1 de 1.ª grandeza, 5 de 3.ª, 27 de 4.ª e 1 de 5.							
A LEBRE							
Das que estão a Oeste no quadrilátero situado nas orelhas, a que fica a Norte	43	0	S.	35	0	5	
A que fica ao Sul	43	10	S.	36	30	5	
No lado Oeste a que fica ao Norte	44	40	S.	35	30	5	
A que fica ao Sul	44	40	S.	36	40	5	
A que fica na maxila	42	30	S.	39	40	4	Maior
A que fica na extremidade da pata anterior esquerda	39	30	S.	45	15	4	Maior
A que fica no meio do corpo	48	50	S.	41	30	3	
A que fica por baixo do abdómen	48	10	S.	44	20	3	
Das duas situadas nas patas traseiras, a que fica a Norte	54	20	S.	44	0	4	
A que fica mais a Sul	52	20	S.	45	50	4	
A que fica no lombo	53	20	S.	38	20	4	
A que fica na extremidade da cauda	56	0	S.	38	10	4	
São, portanto, 12 estrelas, das quais duas são de 3.ª grandeza, 6 de 4.ª e 4 de 5.ª							

Constelações das estrelas	Longitude		Latitude			Grandeza
	Gr.	Min.		Gr.	Min.	
O CÃO						
A estrela muito brilhante situada na boca e chamada Cão	71	0	S.	39	10	1 Máxima
A que fica nas orelhas	73	0	S.	35	0	4
A que fica na cabeça	74	40	S.	36	30	5
Das duas situadas no pescoço, a que fica ao Norte	76	40	S.	37	45	4
A que fica ao Sul	78	40	S.	40	0	4
A que fica no peito	73	50	S.	42	30	5
Das duas situadas no joelho direito, a que fica ao Norte	69	30	S.	41	15	5
A que fica ao Sul	69	20	S.	42	30	5
A que fica na extremidade da pata anterior	64	20	S.	41	20	3
Das duas situadas no joelho esquerdo, a que fica a Oeste	68	0	S.	46	30	5
A que fica a Este	69	30	S.	45	50	5
Das duas situadas na espádua esquerda, a que fica a Este	78	0	S.	46	0	4
A que fica a Oeste	75	0	S.	47	0	5
A que fica na anca esquerda	80	0	S.	48	45	3 Menor
A que fica ao fundo do abdómen, entre as coxas	77	0	S.	51	30	3
A que fica na parte de baixo, na cavidade da pata direita	76	20	S.	55	10	4
A que fica nas extremidade desta pata	77	0	S.	55	40	3
A que fica na extremidade da cauda	85	30	S.	50	30	3 Menor
São, portanto, 18 estrelas, das quais 1 de 1.ª grandeza, 5 de 3.ª, 5 de 4.ª e 7 de 5.ª						
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
A que fica ao Norte da cabeça do Cão	72	50	S.	25	15	4
A que fica mais ao Sul, em linha recta, abaixo das patas posteriores	63	20	S.	60	30	4
A que fica mais ao Norte	64	40	S.	58	45	4
A que fica ainda mais ao Norte desta	66	20	S.	57	0	4
Das quatro, a última mais ao Norte	67	30	S.	56	0	4
Das três quase em linha recta para Oeste, a que fica mais a Oeste	50	20	S.	55	30	4
A que fica ao meio	53	40	S.	57	40	4
Das três a que está a Leste	55	40	S.	59	30	4
Das duas estrelas brilhantes abaixo destas, a que fica a Este	52	20	S.	59	40	2
A que fica a Oeste	49	20	S.	57	40	2
A última que fica mais ao Sul do que as acabadas de mencionar	45	30	S.	59	30	4
São, portanto, 11 estrelas, das quais 2 de 2.ª grandeza e 9 de 4.ª						
CANÍCULA OU PRÓCION						
A que fica no pescoço	78	20	S.	14	0	4

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
A estrela brilhante que está na coxa chamada Prócion ou Canícula	82	30	S.	16	10	1
São, portanto, 2 estrelas, 1 de 1.ª grandeza e 1 de 4.ª						
ARGO OU NAU						
Das duas situadas na extremidade da nau, a que fica a Oeste	93	40	S.	42	40	5
A que fica a Este	97	40	S.	43	20	3
Das duas situadas na popa, a que fica a Norte	92	10	S.	45	0	4
A que fica mais a Sul	92	10	S.	46	0	4
Das duas a que fica a Oeste	88	40	S.	45	30	4
A estrela brilhante ao meio do escudo	89	40	S.	47	15	4
Das três situadas abaixo do escudo, a que fica a Oeste	88	40	S.	49	45	4
A que fica a Este	92	40	S.	49	50	4
Das três a que fica ao meio	91	50	S.	49	15	4
A que fica na extremidade do leme	97	20	S.	49	50	4
Das duas situadas na parte traseira da quilha, a que fica ao Norte	87	20	S.	53	0	4
A que fica ao Sul	87	20	S.	58	30	3
A que fica ao Norte, no convés da popa	93	30	S.	55	30	5
Das três situadas no mesmo convés, a que fica a Oeste	95	30	S.	58	30	5
A que fica ao meio	96	40	S.	57	15	4
A que fica a Este	99	50	S.	57	45	4
A estrela brilhante a Este, situada no banco dos remadores	104	30	S.	58	20	2
Das duas estrelas abaixo desta, a que fica a Oeste	101	30	S.	60	0	5
A que fica a Este	104	20	S.	59	20	5
Das duas situadas acima da referida estrela luminosa, a que fica a Oeste	106	30	S.	56	40	5
A que fica a Este	107	40	S.	57	0	5
Das três situadas nos escudos pequenos e na base do mastro a que fica a Norte	119	0	S.	51	30	4 Maior
A que fica no meio	119	30	S.	55	30	4 Maior
Das três a que fica ao Sul	117	20	S.	57	10	4
Das duas estrelas juntas, abaixo destas, a que fica a Norte	122	30	S.	60	0	4
A que fica a Sul	122	20	S.	61	15	4
Das duas situadas ao meio do mastro, a que fica ao Sul	113	30	S.	51	30	4
A que fica ao Norte	112	40	S.	49	0	4
Das duas situadas na parte superior da vela, a que fica a Oeste	111	20	S.	43	20	4
A que fica a Este	112	20	S.	43	30	4
A que fica abaixo da terceira das que estão a Este do escudo	98	30	S.	54	30	2 Menor
A que fica na divisão do convés	100	50	S.	51	15	2
A que fica na quilha, entre os remos	95	0	S.	63	0	4
A estrela menos brilhante que fica a Este desta	102	20	S.	64	30	6
A estrela brilhante situada a Este desta no convés	113	20	S.	63	50	2

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
A estrela brilhante mais para o Sul, abaixo da quilha	121	50	S.	69	40	2
Das três a Este desta, a que fica a Oeste	128	30	S.	65	40	3
A que fica ao meio	134	40	S.	65	50	3
A que fica a Este	139	20	S.	65	50	2
Das duas situadas a Este, junto da divisão, a que fica a Oeste	144	20	S.	62	50	3
A que fica a Este	151	20	S.	62	15	3
Das que estão no braço de um remo a nordeste, a que fica a Oeste	57	20	S.	65	50	4 Maior
A que fica a Este	73	30	S.	65	40	3 Maior
A que fica no braço do outro remo a Oeste, chamada Canopo	70	30	S.	75	0	1
A restante, a Este desta	82	20	S.	71	50	3 Maior

São, portanto, 45 estrelas, das quais 1 de 1.ª grandeza, 6 de 2.ª, 8 de 3.ª, 22 de 4.ª, 7 de 5.ª e 1 de 6.ª

HIDRA

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
Das duas situadas a Oeste pertencentes ao grupo das cinco situadas na cabeça, a que fica nas narinas	97	20	S.	15	0	4
Das duas a Este situadas no olho, a que fica ao Norte	98	50	S.	14	45	4
Das duas a Este situadas na parte de trás da cabeça, a que fica a Norte	99	0	S.	11	30	4
Das duas situadas na boca aberta, a que fica ao Sul	98	50	S.	14	45	4
De todas as que estão abaixo do olho, a que fica a Este	100	50	S.	12	15	4
Das duas que estão no começo do pescoço, a que fica a Oeste	103	40	S.	11	50	5
A que fica a Este	106	40	S.	13	30	4
Das três situadas na curva do pescoço, a que está ao meio	111	40	S.	15	20	4
A que fica a Este desta	114	0	S.	14	50	4
A que fica mais ao Sul	111	40	S.	17	10	4
Das duas que estão juntas ao Sul, a estrela que fica a Norte	112	30	S.	19	45	6
A estrela brilhante que está a Oeste destas	113	20	S.	20	30	2
Das três situadas a Este da curva do pescoço, a que fica a Oeste	119	20	S.	26	30	4
A que fica a Este	124	30	S.	23	15	4
A que fica no meio destas	122	0	S.	26	0	4
Das três que estão em linha recta, a que fica a Oeste	131	20	S.	24	30	3
A que fica ao meio	133	20	S.	23	0	4
A que fica a Este	136	20	S.	22	10	3
Das duas abaixo da base da Taça, a que fica ao Norte	144	50	S.	25	45	4
A que fica a Sul	145	40	S.	30	10	4

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
No triângulo a Este destas, a que fica a Oeste	155	30	S.	31	20	4
A que fica a Sul	157	50	S.	34	10	4
Das três a que fica a Este	159	30	S.	31	40	3
A Este do corvo, a que fica a seguir à cauda	173	20	S.	13	30	4
A que está na extremidade da cauda	186	50	S.	17	30	4
São, portanto, 25 estrelas, das quais 1 de 2.ª grandeza, 3 de 3.ª, 19 de 4.ª, 1 de 5.ª e 1 de 6.ª						
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
A que fica a Sul da cabeça	96	0	S.	23	15	3
Das que estão no pescoço, a que fica a Este	124	20	S.	26	0	3
São, portanto, 2 estrelas, de 3.ª grandeza						
A TAÇA						
A que fica na base da Taça, comum à Hidra	139	40	S.	23	0	4
Das duas situadas ao meio da Taça, a que fica ao Sul	146	0	S.	19	30	4
Destas a que fica ao Norte	143	30	S.	18	0	4
A que fica no rebordo da Taça, a Sul	150	20	S.	18	30	4 Maior
A que fica na parte Norte do mesmo	142	40	S.	13	40	4
A que fica na asa do Sul	152	30	S.	16	30	4 Menor
A que fica na asa do Norte	145	0	S.	11	50	4
São, portanto, 7 estrelas de 4.ª grandeza						
O CORVO						
A que está no bico, comum à Hidra	158	40	S.	21	30	3
A que fica no pescoço	157	40	S.	19	40	3
A que fica no peito	160	0	S.	18	10	5
A que fica na asa direita a Oeste	160	50	S.	14	50	3
Das duas situadas na asa, a Este, a que fica a Oeste	160	0	S.	12	30	3
A que fica a Este	161	20	S.	11	45	4
A que fica na extremidade da pata, comum à Hidra	163	50	S.	18	10	3
São, portanto, 7 estrelas, das quais 5 de 3.ª grandeza, 1 de 4.ª e 1 de 5.ª						
O CENTAURO						
Das quatro situadas na cabeça, a que fica mais a Sul	183	50	S.	21	20	5
A que fica mais a Norte	183	20	S.	13	50	5
Das duas que estão ao meio, a que fica a Oeste	182	30	S.	20	30	5
A última das quatro que fica a Este	183	20	S.	20	0	5
A que fica no ombro esquerdo a Oeste	179	30	S.	25	30	3
A que fica no ombro direito	189	0	S.	22	30	3
A que fica no ombro esquerdo	182	30	S.	17	30	4
Das quatro estrelas situadas no escudo a que fica a Norte das duas que estão a Oeste	191	30	S.	22	30	4
A que fica a Sul	192	30	S.	23	45	4

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
Das duas restantes, a que fica na parte, superior do escudo	195	20	S.	18	15	4
A que fica mais a Sul	196	50	S.	20	50	4
Das três estrelas no lado direito, a que fica a Oeste	186	40	S.	28	20	4
A que fica ao meio	187	20	S.	29	20	4
A que fica a Este	188	30	S.	28	0	4
A que fica no braço direito	189	40	S.	26	30	4
A que fica no cotovelo direito	196	10	S.	25	15	3
A que fica na extremidade da mão direita	200	50	S.	24	0	4
A estrela brilhante que está no começo da parte humana do corpo	191	20	S.	33	30	3
Das duas estrelas menos brilhantes, a que fica a Este	191	0	S.	31	0	5
A que fica a Oeste	189	50	S.	30	20	5
A que fica na separação do dorso	185	30	S.	33	50	5
A que fica a Oeste desta, no dorso do cavalo	182	20	S.	37	30	5
Das três que estão na virilha,a que fica a Este	179	10	S.	40	0	3
A que fica ao meio	178	20	S.	40	20	4
Das três a que fica a Oeste	176	0	S.	41	0	5
Das duas que estão juntas na anca direita, a que fica a Oeste	176	0	S.	46	10	2
A que fica a Este	176	40	S.	46	45	4
A que fica no peito, abaixo da asa do cavalo	191	40	S.	40	45	4
Das duas situadas na barriga, a que fica a Oeste	179	50	S.	43	0	2
A que fica a Este	181	0	S.	43	45	3
A que fica no vão da pata direita	183	20	S.	51	10	2
A que fica na barriga da perna direita	188	40	S.	51	40	2
A que fica no vão da pata esquerda	188	40	S.	55	10	4
A que fica por baixo do músculo da mesma perna	184	30	S.	55	40	4
A que fica na parte superior da pata da frente	181	40	S	41	10	1
A que fica no joelho esquerdo	197	30	S.	45	20	2
A que fica da parte de fora, abaixo da coxa direita	188	0	S.	49	10	3
São, portanto, 37 estrelas, das quais 1 é de 1.ª grandeza, 5 de 2.ª, 7 de 3.ª, 15 de 4.ª e 9 de 5.ª						
O ANIMAL, AGARRADO PELO CENTAURO						
A que fica na parte superior da pata posterior, junto à mão do Centauro	201	20	S.	24	50	3
A que fica na parte inferior da mesma pata	199	10	S.	20	10	3
Das duas que estão na espádua, que fica a Oeste	204	20	S.	21	15	4
A que fica a Este	207	30	S.	21	0	4
A que fica no meio do corpo	206	20	S.	25	10	4
A que fica no abdómen	203	30	S.	27	0	5
A que fica na anca	204	10	S.	29	0	5
Das duas que estaõ na articulação da anca, a que fica a Norte	208	0	S.	28	30	5
A que fica a Sul	207	0	S.	30	0	5
A que fica na extremidade do lombo	208	40	S.	33	10	5

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
Das três situadas na extremidade da cauda, a que fica ao Sul	195	20	S.	31	20	5
A que fica ao meio	195	10	S.	30	0	4
Das três, a que fica ao Norte	196	20	S.	29	20	4
Das duas que estão na goela, a que fica ao Sul	212	10	S.	17	0	4
A que fica ao Norte	212	40	S.	15	20	4
Das duas que estão na boca aberta, a que fica a Oeste	209	0	S.	13	30	4
A que fica a Este	210	0	S.	12	50	4
Das duas que estão no pé dianteiro, a que está mais ao Sul	240	40	S.	11	30	4
A que está mais ao Norte	239	50	S.	10	0	4
São, portanto, 19 estrelas, das quais 2 de 3.ª grandeza, 11 de 4.ª e 6 de 5.ª						
ALTAR OU TURÍBULO						
Das duas na base, a que fica ao Norte	231	0	S.	22	40	5
A que fica ao Sul	233	40	S.	25	45	4
A que fica ao meio do pequeno altar	229	30	S.	26	30	4
Das três que estão no braseiro, a que fica a Norte	224	0	S.	30	20	5
Das outras duas que estão juntas, a que fica a Sul	228	30	S.	34	10	4
A que está a Norte	228	20	S.	33	20	4
A que está no meio da chama	224	10	S.	34	10	4
São, portanto, 7 estrelas, da quais 5 de 4.ª grandeza e 2 de 5.ª						
COROA AUSTRAL						
A que fica na parte de fora do rebordo a Sul	242	30	S.	21	30	4
A que fica a Este desta, na coroa	245	0	S.	21	0	5
A que fica a Este dela	246	30	S.	20	20	5
A que ainda fica mais a Este	248	10	S.	20	0	4
A que fica a Este desta última, a Oeste do joelho do Sagitário	249	30	S.	18	30	5
A estrela brilhante que fica no joelho, a Norte	250	40	S.	17	10	4
A que fica para o Norte	250	10	S.	16	0	4
A que fica ainda mais para o Norte	249	50	S.	15	20	4
Das duas situadas no rebordo a Norte, a que fica a Este	248	30	S.	15	50	6
A que fica a Oeste	248	0	S.	14	50	6
A que fica a alguma distância destas	245	10	S.	14	40	5
A que fica ainda mais a Oeste	343	0	S.	15	50	5
A última, que é a que fica mais ao Sul	242	30	S.	18	30	5
São, portanto, 13 estrelas, 5 de 4.ª grandeza, 6 de 5.ª e 2 de 6.ª						

Constelações das estrelas	Longitude Gr.	Longitude Min.	Latitude	Latitude Gr.	Latitude Min.	Grandeza
PEIXES AUSTRAIS						
A que está na boca: a mesma que está na extremidade do Rio	300	20	S.	23	0	1
Das três que estão na cabeça, a que fica a Oeste	294	0	S.	21	20	4
A que fica no meio	297	30	S.	22	15	4
A que fica a Este	299	0	S.	22	30	4
A que fica na guelra	297	40	S.	16	15	4
A que fica na barbatana posterior, a Sul	288	30	S.	19	30	5
Das duas situadas no abdómen do peixe, a que fica a Este	294	30	S.	15	10	5
A que fica no meio	292	10	S.	14	30	4
A que fica a Oeste	288	30	S.	15	15	4
Das três que estão na barbatana, a Norte, a que fica a Este	285	10	S.	16	30	4
A que fica a Oeste	284	20	S.	18	10	4
A que fica na extremidade da cauda	289	20	S.	22	15	4
São 11 estrelas, portanto, das quais 9 de 4.ª grandeza e 2 de 5.ª A primeira não entra neste número.						
ESTRELAS FORA DESTA CONSTELAÇÃO MAS PRÓXIMAS DELA:						
Das estrelas brilhantes que estão a Oeste do peixe, a que fica a Oeste	271	20	S.	22	20	3
A que fica ao meio	274	30	S.	22	10	3
Das três, a que fica a Este	277	20	S.	21	0	3
A estrela menos brilhante que fica a Oeste desta	275	20	S.	20	50	5
Das restantes situadas a Norte, a que fica ao Sul	277	10	S.	16	0	4
A que fica mais ao Norte	277	10	S.	14	50	4
São, portanto, 6 estrelas das quais 3 de 3.ª grandeza, 2 de 4.ª e 1 de 5.ª						
Na zona austral há 316 estrelas: 7 de 1.ª grandeza, 18 de 2.ª, 60 de 3.ª, 167 de 4.ª, 54 de 5.ª, 9 de 6.ª e 1 nebulosa. Reunindo as estrelas de todas as zonas, há ao todo 1022 estrelas, das quais 15 de 1.ª grandeza, 45 de 2.ª, 208 de 3.ª, 474 de 4.ª, 216 de 5.ª, 50 de 6.ª, 9 baças e 5 nebulosas.						

LIVRO III

Capítulo I

A PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS

Depois de descrever as constelações das estrelas fixas é mister passar a tratar da revolução anual. Assim, falaremos primeiramente da variação dos equinócios, pois a ela se atribui o facto de se julgar que também as estrelas fixas se movem.

Ora eu verifiquei que os antigos astrónomos não distinguiam entre o ano trópico ou natural, e o ano que se mede em relação a uma estrela fixa. Por isso eles pensavam que os anos das Olimpíadas, cujo começo faziam coincidir com o nascimento da Canícula, eram os mesmos que os anos medidos em relação ao solstício, sendo desconhecida a sua diferença até então. Hiparco de Rodes, homem de notável sabedoria, foi o primeiro a notar que diferiam uns dos outros. Quando se dedicava a uma observação cuidadosa da duração do ano, verificou que o ano que se media em relação às estrelas fixas era mais longo do que aquele que se relacionava com os equinócios e solstícios. Nesta ordem de ideias, estava convencido de que as estrelas fixas tinham também algum movimento na direcção Este, embora muito lento e não facilmente perceptível. Mas com o decorrer do tempo é já agora muito evidente [Ptolomeu, *Almagesto* III, 1]. Assim, verificamos que presentemente os signos e as estrelas nascem e se põem muito diferentemente do que os antigos ensinavam. Os doze signos do zodíaco afastaram-se consideravelmente das constelações das estrelas fixas, se bem que originariamente coincidissem em nomes e posições. Além disso, verificou-se que o próprio movimento era irregular, e aqueles que quiseram apresentar uma causa para esta diferença formularam diversas teorias. Alguns opinavam que o Universo, estando suspenso, tinha uma certa oscilação, um movimento semelhante ao que observamos nas latitudes dos planetas [VI, 2]; dentro de certos limites fixados num lado e noutro, o avanço seria neutralizado, em devido tempo, por um retrocesso, e a sua extensão do ponto médio para os dois lados não era superior a 8°. Mas esta perspectiva é agora obsoleta e não pode ser defendida, porque hoje ressalta com evidência que o primeiro ponto da constelação de Áries está desviado do equinócio vernal, três vezes 8 graus. O mesmo acontece com outras estrelas, não tendo sido observado, entretanto, vestígio de uma regressão em tantos séculos. Outros defenderam a opinião de que a esfera das estrelas se move em progressão mas em ritmo desigual, não se lhe descobrindo, no entanto, um tipo definido. E para além disto, sobreveio uma outra maravilha da Natureza: a obliquidade da eclíptica não se nos apresenta tão grande como anteriormente se apresentava a Ptolomeu, de acordo com o que dissemos atrás. Para explicar isto alguns conceberam a ideia de uma nona esfera, outros uma décima, que, segundo eles, eram a causa desta situação. Contudo não foram capazes de alcançar o que tinham prometido. Agora começou a ver a luz do dia uma undécima esfera também. Eu, porém, invocando o movimento da Terra, refutarei com facilidade este número de esferas, que é supérfluo. Efectivamente, segundo o que já em parte assentámos no Livro I [Capítulo 11], as duas revoluções, isto é, a inclinação anual e a revolução do centro da Terra, não são exactamente iguais, pois a inclinação se completa naturalmente um pouco antes da revolução do centro da Terra.

Donde necessário é concluir-se que os equinócios e solstícios parecem antecipar o seu movimento não porque a esfera das estrelas se mova para Este mas porque o equador

se move para Oeste, sendo oblíquo ao plano da eclíptica proporcionalmente à inclinação do eixo do globo terrestre. Com efeito, seria mais apropriado dizer que o equador é oblíquo em relação à eclíptica do que a eclíptica é oblíqua em relação ao equador, pois se compara uma coisa mais pequena com uma maior. Na verdade, sendo a eclíptica descrita pela revolução anual na distância entre o Sol e a Terra, é muito maior que o equador, o qual é descrito, como já disse [I, 11], pela rotação diária da Terra à volta do seu eixo. Assim se observa que essas intersecções nos equinócios, juntamente com toda a obliquidade da eclíptica, antecipam o seu movimento com o decorrer do tempo, enquanto as estrelas ficam para trás. Ora a medida deste movimento e a explicação da sua variação não eram conhecidas dos
47° 50′ do equinócio do Outono. Em todos estes casos, a
antigos, dado que a extensão do período da sua revolução é ainda desconhecida, por causa da sua lentidão imprevisível. Realmente, em tantos séculos decorridos desde que foi primeiramente descoberta pelo homem, mal completou 1/15 de uma revolução. Contudo e tanto quanto possível, aproveitando o que consegui saber acerca deste assunto pelo estudo da história das observações feitas no decorrer dos séculos até o nosso tempo, lançarei alguma luz sobre ele.

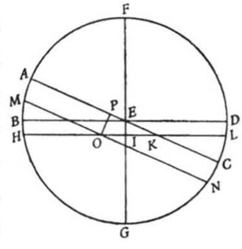
HISTÓRIA DAS OBSERVAÇÕES QUE ATESTAM A PRECESSÃO DESIGUAL DOS EQUINÓCIOS E SOLSTÍCIOS

No primeiro período de 76 anos, segundo Calipo, e no seu 36.° ano que foi o 30.° depois da morte de Alexandre Magno, Timócares de Alexandria, o primeiro a preocupar-se com a posição das estrelas fixas, afirmou que a Espiga que a Virgem tem na mão se afastara 82 $^1/_3$° do ponto do solstício do Verão, com a latitude de 2° Sul, e que a estrela mais a Norte das três, situada na fronte do Escorpião, a primeira na ordem da formação deste signo, tinha uma latitude norte de 1 $^1/_3$°, com a distância de 32° contada do equinócio do Outono. De novo, no 48.° ano do mesmo período, verificou estar a Espiga da Virgem a uma distância de 82 $^1/_2$° do solstício do Verão, permanecendo a latitude a mesma. Mas Hiparco, no 50.° ano do 3.° período de Calipo, no 196.° ano da era de Alexandre, verificou que a estrela do peito do Leão, chamada Régulus, estava a 29 $^5/_6$° a Este do solstício do Verão. A seguir, Menelau, geómetra romano, no 1.° ano do reinado do imperador Trajano, 99 anos depois do nascimento de Cristo e 422 depois da morte de Alexandre, referiu que a distância longitudinal entre a Espiga da Virgem e o solstício [do Verão] era de 86 $^1/_4$°, enquanto a estrela da fronte do Escorpião estava a $3^{11}/_{12}$° (35° 55′) do equinócio do Outono. A estes seguiu-se Ptolomeu que, como já dissemos, no 2.° ano do reinado de Antonino Pio [II, 14], que era o 462.° ano depois da morte de Alexandre, observou que o Régulus de Leão estava a 32 $^1/_2$° de longitude do solstício, a Espiga a 86 $^1/_2$°, e a estrela da fronte do Escorpião a 36 $^1/_3$° do equinócio do

Outono, permanecendo a latitude exactamente a mesma, como atrás se indicou no Catálogo. Passámos estas observações em revista tal qual eles as referiram. Contudo, passado muito tempo, precisamente no ano 1202 depois da morte de Alexandre, seguiu-se uma observação de Albatémio de Raqqa a quem podemos dar grande crédito. Nesse ano o Régulus ou o Basilisco do Leão tinha atingido os 44° 5′ do solstício, e a estrela da fonte do Escorpião 47° 50′ do equinócio do Outono. Em todos estes casos, a latitude de cada uma destas estrelas permaneceu sempre idêntica, de modo que não há mais lugar para dúvidas quanto a este ponto.

Também nós, no ano 1525 da era de Cristo, 1.º ano depois do ano bissexto, o 1849.º ano egípcio depois da morte de Alexandre, observámos em Frombork, na Prússia, a Espiga, várias vezes mencionada. A sua maior altura no meridiano era de cerca de 27°. Verificámos que a latitude de Frombork era de 54° 19 $^1/_2$′. Assim, a declinação da Espiga em relação ao equador será evidentemente de 8° 40′. A sua posição a partir disto foi determinada do modo seguinte.

Descrevi o meridiano *ABCD* pelos pólos da eclíptica e do equador. Este meridiano intersecta o equador segundo o diâmetro *AEC* e a eclíptica pelo diâmetro *BED*. O pólo Norte da eclíptica é *F*, e o eixo *FEG*. Seja *B* o primeiro ponto do Capricórnio e *D* o de Câncer. Tomemos agora o arco *BH* com 2º, igual à latitude Sul da estrela. Do ponto *H* tracemos *HL* paralelo a *BD*. *HL* intersecta o eixo da eclíptica em *I*, e o equador em *K*. De acordo com a declinação Sul da estrela tomemos o arco *MA* de 8º 40′ e tracemos *MH* paralelo a *AC*. *MN* intersectará *HIL*, paralelo à eclíptica. Seja *O* o ponto desta intersecção. A linha recta *OP*, perpendicular à eclíptica, será igual a metade da corda correspondente ao dobro do arco *AM*, que representa a declinação. Mas os círculos cujos diâmetros são *FG*, *HL* e *MN* são perpendiculares ao plano *ABCD* e segundo o 19º teorema do livro XI dos *Elementos* de Euclides, as suas intersecções formam ângulos rectos com o mesmo plano nos pontos *O* e *I*.' Também pelo 6.º teorema do mesmo livro, estas intersecções são paralelas uma à outra. Dado que *I* é o centro de um círculo cujo diâmetro é *HL*, *OI* será igual a metade da corda correspondente, no círculo cujo diâmetro é *HL*, o dobro do arco que é semelhante à distância longitudinal do primeiro ponto da Balança. Este é o arco que procuramos. Vamos encontrá-lo do modo seguinte.



Os ângulos *OKP* e *AEB* são iguais pois são ângulos interiores e alternos e *OPK* é um ângulo recto. Assim, a razão de *OP* para *OK*, é a mesma da metade da corda do arco duplo de *AB* para *BE*, e também da metade da corda do dobro de *AH* para *HIK*, dado que são lados de triângulos semelhantes a *OPK*. Mas *AB* tem 23º 28 $^{1}/_{2}$′, e metade da corda correspondente ao dobro deste tem 39832 unidades quando *BE* tem 100000. Também *ABH* mede 25º 28 $^{1}/_{2}$′, e metade da corda correspondente ao dobro da declinação *MA* mede 15069 unidades. Segue--se daqui que toda a corda *HIK* tem 107978 unidades, *OK* mede 37831, e *HO*, a diferença entre *HOK* e *OK*, tem 70147. Mas o dobro de *HOI* corresponde ao segmento circular *HGL* de 176º. Assim, *HOI* terá 99939 unidades quando *BE* tem 100000. Por conseguinte *OI*, a diferença entre *HOI* e *HO*, terá 29792 unidades. Mas se *HOI*, sendo metade de um diâmetro, é tomado com 100000 unidades, então *OI* terá 29810, às quais corresponde um arco com aproximadamente 17º 21′. Esta era a distância da Espiga da Virgem, a contar do primeiro ponto da Balança e tal era a posição da Estrela.

De igual modo uma década antes, isto é, em 1515, verificámos que a sua declinação era de 8º 26′ e a sua posição 17º 14′ em relação à Balança. Contudo, Ptolomeu dera-lhe como declinação apenas $^{1}/_{2}$º [*Almagesto*, VII, 3]. Seria pois a sua posição 26º 40′ em Virgem, o que é rigorosamente mais exacto em comparação com as observações precedentes. E parece bem claro que virtualmente em todo o intervalo de tempo desde Timócares a Ptolomeu, 432 anos, os equinócios e os solstícios tinham mudado as suas posições por precessão, regularmente 1º em cada intervalo de 100 anos, havendo sempre uma razão constante entre o tempo e a extensão do seu movimento, que no total atingiu 4 $^1/_3$º. Com efeito, comparando também a distância entre o solstício do Verão e o Basilisco do Leão em relação ao tempo que decorreu entre Hiparco e Ptolomeu, 266 anos, os equinócios avançaram 2 $^2/_3$º. Também aqui, em proporção ao tempo se verifica que avançaram 1º em 100 anos. Por outro lado, a estrela situada ao cimo da fronte do Escorpião, nos 782 anos entre Albaténio e Menelau, percorreu 11º 55′. Sendo assim, devia-se calcular para 1º, não 100 anos mas 66, como se verá. Além disso, nos 741 anos de Ptolomeu a Albaténio, atribuem-se apenas 65 anos a 1º.

Finalmente, se compararmos o período restante de 645 anos com a diferença de 9º 11′ da minha observação, a 1º corresponderão 71 anos.

Disto resulta com evidência que a precessão dos equinócios foi mais lenta nos 400 anos antes de Ptolomeu do que de Ptolomeu a Albaténio, e foi também mais rápida do que desde Albaténio até ao nosso tempo. Dá-se igualmente uma diferença no movimento da obliquidade. Com efeito, Aristarco de Samos achou a mesma obliquidade da eclíptica e do equador que Ptolomeu encontrara, isto é, 23º 51′ 20″; Albaténio 23º 35′; Azarquiel de Espanha, 190 anos depois dele, 23º 34′. Igualmente 230 anos mais tarde, Profácio, o Judeu, achou cerca de 2′ menos. Contudo, na nossa época, verificou-se não ser superior a 23º 28 $^1/_2$′. Daqui se vê com clareza que de Aristarco a Ptolomeu o movimento foi o mais lento, e de Ptolomeu a Albaténio o mais rápido.

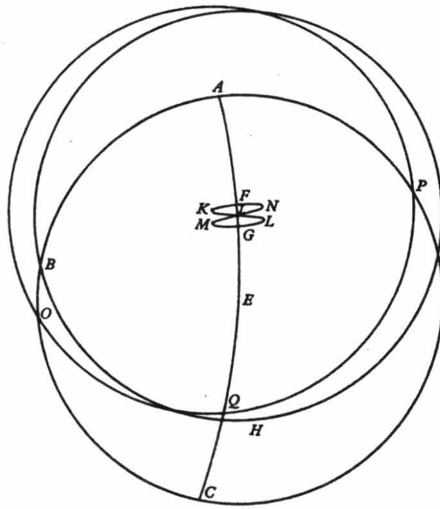
HIPÓTESES PARA DEMONSTRAR A VARIAÇÃO NOS EQUINÓCIOS, NA OBLIQUIDADE DA ECLÍPTICA E NO EQUADOR

Do que atrás fica dito vê-se, portanto, que os equinócios e os solstícios variam com um ritmo desigual. Para isto talvez ninguém possa aduzir uma razão melhor do que uma certa divagação do eixo da Terra e dos pólos do equador. Com efeito, isto parece resultar da hipótese do movimento da Terra. Na verdade, é evidente que a eclíptica se mantém perpetuamente sem qualquer variação, como o mostram as latitudes constantes das estrelas fixas, enquanto o equador se altera. Ora, se o movimento do eixo da Terra concordasse, simplesmente e com exactidão, com o movimento do seu centro, pareceria, como disse [I, 11], que não havia qualquer precessão dos equinócios e solstícios. Mas visto que diferem um do outro, embora com uma diferença variável, os solstícios e os equinócios tinham de avançar para além das posições das estrelas, com um movimento não uniforme. O mesmo se aplica ao movimento de inclinação que provoca também uma mudança variável na obliquidade da eclíptica, embora esta obliquidade se deva atribuir mais correctamente ao equador. Por este motivo devemos distinguir dois movimentos interactuantes, realizados inteiramente pelos pólos e semelhantes às librações pendulares. Ora um movimento será aquele que altera a inclinação desses círculos de um para o outro, fazendo os pólos deflectir para cima e para baixo à volta do ângulo de intersecção. O outro, aquele que aumenta e diminui as precessões dos solstícios e equinócios produzindo um movimento transversal de um lado para o outro. Chamamos a estes movimentos librações porque, como objectos que oscilam entre dois extremos, seguindo o mesmo caminho, no meio aceleram e nas extremidades afrouxam, tal qual geralmente acontece nas latitudes dos planetas, segundo o que veremos no lugar próprio [IV, 2]. Além disso estes movimentos diferem no período porque dois ciclos de irregularidade dos equinócios são completados num ciclo de obliquidade. Ora em todo o movimento aparente não uniforme temos de considerar algum valor como médio, em relação ao qual se possa medir a não uniformidade. Também neste caso há que ter em conta os pólos médios e o equador médio assim como as intersecções médias equacionais e os pontos médios solsticiais. Girando para um e outro lado destes pontos médios, mas dentro de limites fixos, os pólos e o círculo do equador da Terra fazem com que estes movimentos regulares pareçam irregulares. Assim, essas duas librações, combinando-se uma com a outra, obrigam os pólos da Terra, com o decorrer do tempo, a descrever linhas semelhantes a uma corda entrelaçada.

Mas porque não é fácil explicar estes fenómenos por palavras adequadas, receio que não as compreendam quando as ouvem, se não forem também vistas com os olhos.

Descrevamos então numa esfera, a eclíptica *ABCD*. Seja *E* o seu pólo Norte, *A* o primeiro ponto de Capricórnio, *C* o de Câncer, *E* o de Áries e *D* o da Balança. A seguir descrevamos o círculo *AEC* pelos pontos *A* e *C* passando pelo pólo *E*. Seja *EF* a maior distância entre os pólos norte da eclíptica e do equador e *EG* a mais curta, assim como *I* a posição média do pólo. À volta de *I* descrevamos *BHD* como equador e chamemos-lhe equador médio, sendo *B* e *D* os equinócios médios. Façamos com que todos estes se movam em volta do pólo *E*, num movimento perpetuamente regular na direcção Oeste, isto é, em direcção oposta à ordem dos signos do zodíaco na esfera das estrelas fixas e com um movimento lento, como se disse [III, 1]. Admitamos agora para os pólos da Terra dois movimentos interactuantes semelhantes aos de objectos que balanceiam, um entre *F* e *G* que se chamará o movimento de anomalia, isto é, da irregularidade da inclinação, e o outro, de Oeste para Este e de Este para Oeste, que denominaremos a anomalia dos equinócios, duas vezes mais rápido do que o anterior.

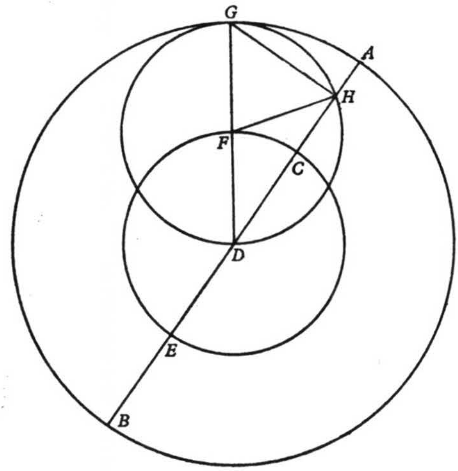
Ambos estes movimentos combinando-se nos pólos da Terra, fazem-nos deflectir de modo admirável. Com efeito, tomando *F* em primeiro lugar como pólo Norte da Terra, o equador descrito à volta dele passará pelas mesmas intersecções *B* e *D*, isto é, pelos polos do círculo *AFEC*, mas formará ângulos de obliquidade maior, em proporção com o arco *FI*. Tomando este como posição de partida, quando o pólo da Terra está a ponto de passar para a posição de obliquidade média em *I*, outro movimento intervém e não lhe permite seguir directamente no sentido *FI*, mas fá-lo deflectir, seguindo um curso de desvio até um ponto extremo na direcção Este. Seja este ponto *K*. A intersecção com o equador aparente *OPQ*, descrito à volta desta posição, não será em *B* mas atrás, em *O*, e a redução da precessão dos equinócios será igual a *BO*. Quando o pólo volta a este ponto *K* e se move para Oeste, os dois movimentos, actuando conjunta e simultaneamente concorrem para colocar o pólo na posição média *I*. O equador aparente coincide com o equador uniforme ou médio. Passando por este ponto, o pólo da Terra move-se para o Ocidente e separa o equador aparente do médio, aumentando a precessão dos equinócios até a outra extremidade, *L*. Voltando daí tira aos equinócios o que há pouco lhes acrescentara, até que, uma vez localizado no ponto *G*, reduz a obliquidade ao mínimo no mesmo ponto de intersecção, *B*, onde novamente o movimento dos equinócios e dos solstícios será muito lento, quase o mesmo que em *F*. Verifica-se que a sua não uniformidade completou uma revolução depois de atingir as duas posições extremas a partir da média, enquanto o movimento de obliquidade, tendo passado do máximo ao mínimo



da sua inclinação, apenas completou meia revolução. A seguir, o pólo movendo-se para Este, alcança outra posição extrema em *M*. Voltando daí, coincide novamente com a posição média e desviando-se uma vez mais para Oeste, passa pelo limite *N* e completa finalmente aquilo que apontámos como uma linha entrelaçada: *FKILGMINF*. É assim evidente que no decurso de um ciclo da obliquidade, o pólo da Terra atinge o seu limite, a Oeste, duas vezes, e também duas vezes o seu limite a Este.

COMO O MOVIMENTO OSCILATÓRIO, OU MOVIMENTO DE LIBRAÇÃO SE COMPÕE DE MOVIMENTOS CIRCULARES

Que este movimento concorda com os fenómenos [III, 6] é o que vamos demonstrar a seguir. Entretanto, alguém perguntará de que modo se pode compreender a uniformidade daquelas librações, visto que desde o princípio [I, 4] se disse que o movimento celeste era uniforme ou composto de movimentos uniformes e circulares. Neste caso, porém, os dois movimentos aparecem como um só dentro dos limites de ambos em que tem de intervir uma suspensão de movimento. Vamos, porém, demonstrar do modo seguinte que [os movimentos de òscilação] são compostos de movimentos uniformes. Seja *AB* uma linha recta que é dividida em quatro partes, nos pontos *C, D* e *E*. À volta de *D*, descrevamos os círculos *ADB* e *CDE* que são concêntricos e no mesmo plano. Na circunferência do círculo interior, tomemos um qualquer ponto *F*. Com o centro em *F* e o raio *FD*, descrevamos o círculo *GHD* que intersectará a linha recta *AB* em *H*. Tracemos o diâmetro *DFG*. Desejamos mostrar que pela combinação dos dois movimentos dos círculos *GHD* e *CFE*, o ponto móvel *H* desliza para lá e para cá, com um movimento oscilatório na mesma linha recta, *AB*. Este será o caso, se admitirmos que *H* se desloca na direcção oposta a *F* e duas vezes mais longe. Com efeito, sendo o mesmo ângulo *CDF*, um ângulo ao centro de *CFE* e inscrito em *GHD*, intersecta arcos de círculos iguais, *FC* e *GH*, sendo este o dobro de *FC*. Suponhamos que alguma vez o ponto móvel *H* coincide em *G* com *A*, quando as linhas rectas *ACD* e *DFG* coincidem, enquanto *F* está em *C*. Então o centro *F* desloca-se para a direita por *FC*, e *H* para a esquerda pelo arco *GH*, duas vezes a distância *CF*, ou vice-versa. Assim *H* voltará em sentido contrário pela linha *AB*. De outro modo aconteceria que a parte seria maior do que o todo. Isto compreende-se facilmente, segundo penso. Assim, percorrendo a linha quebrada *DFH*,



que é igual a *AD*, *H* afasta-se da posição anterior *A* pela linha quebrada *DFG*, na extensão *AH*, que é igual ao excesso do diâmetro *DFG* sobre a corda *DH*.

E deste modo *H* mover-se-á para o centro *D*. Isto acontecerá quando o círculo *DHG* for tangente à linha recta *AB*, enquanto *GD* é perpendicular a *AB*. Então *H* alcançará o outro limite *B*, donde voltará novamente, pela mesma razão.

[O autógrafo, Cap. 4, fl. 75r, termina originariamente com o seguinte passo, que Copérnico depois substituiu:

Algumas pessoas dizem que este movimento se dá «na largura do círculo», quer dizer, segundo o seu diâmetro; mas derivam a sua amplitude e o seu período da circunferência do círculo, como provarei um pouco mais adiante. [III, 5]. Entretanto, deverá ser notado, de passo, que se os círculos *HG* e *GF* são desiguais, mantendo-se inalteráveis todas as outras condições, ele deve descrever não uma linha recta, mas uma secção cónica cilíndrica, chamada elipse pelos matemáticos. Discutirei isto noutro lugar.]

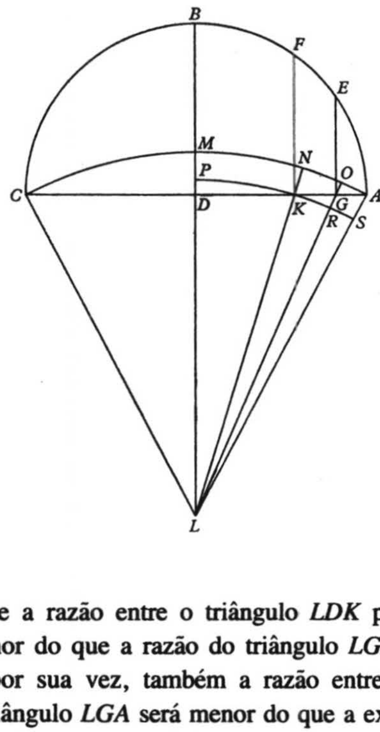
É por conseguinte evidente que um movimento em linha recta é composto de dois movimentos circulares que se combinam um com o outro da forma mencionada, tal como um movimento oscilatório não uniforme é produzido por movimentos uniformes, como se pretendia demonstrar.

Daqui se segue também que a linha recta *GH* será sempre perpendicular a *AB*. Com efeito, as duas linhas, *DH* e *HG* devem subtender um ângulo recto num semicírculo. Por conseguinte *GH* será metade da corda correspondente ao duplo do arco *AG*, enquanto *DH* será metade da corda correspondente ao duplo da diferença entre *AG* e o quadrante de um círculo, porque o diâmetro do círculo *AGB* é o dobro do de *AGD*.

EXPLICAÇÃO DA NÃO UNIFORMIDADE DA PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS E DA OBLIQUIDADE

Por esta razão podemos chamar a este movimento, um movimento «na largura do círculo», isto é, ao longo do diâmetro. Contudo medimos o seu período e uniformidade pela circunferência, mas sua amplitude pelas cordas correspondentes. Assim, vê-se com facilidade que ele é não uniforme: é mais rápido perto do centro, mas mais lento ao aproximar-se da circunferência. Seja então *ABC* um semicírculo, *D* o seu centro e *ADC* o diâmetro. Bissectemo-lo no ponto *B*. Tomemos agora os arcos iguais *AE* e *BF* e dos pontos *F* e *E* façamos descer as perpendiculares *EG* e *FK* a *ADC*. Assim, dado que o dobro de *DK* corresponde ao dobro de *BF* e o dobro de *EG* corresponde ao dobro de *AE*, *DK* e *FG* são iguais. Mas pela 7.ª proposição do III livro dos *Elementos* de Euclides, *AG* é menor do que *GE* e será também menor do que *DK*. Mas *GA* e *KD* foram percorridos em tempo igual porque os arcos *AE* e *BF* são iguais. Por conseguinte, o movimento é mais lento próximo da circunferência *A* do que perto do centro *E*. Tendo demonstrado isto, suponhamos agora que o centro da Terra está em *L* de modo que a linha recta *DL* seja perpendicular a *ABC*, o plano do círculo. Pelos pontos *A* e *C*, com o centro em *L* descrevamos o arco de um círculo, *AMC*, e tracemos uma linha recta, *LDM*. Assim o pólo do semicírculo *ABC* estará em *M*, e *ADC* será a intersecção dos círculos. Juntemos *LA* e *LC* bem como *LK* e *LG* que, prolongados em linha recta, intersectam o arco *AMC* em *N* e *O*. Ora, dado que o ângulo *LDK* é um ângulo recto, o ângulo *LKD* será agudo. Por isso também *LK* é maior do que *LD* e, com mais razão, o lado

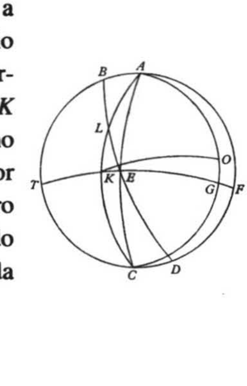
LG é maior do que o lado *LK* e *LA* maior do que *LG* nos triângulos obtusângulos. Por conseguinte um círculo descrito com o centro em *L* e o raio *LK* cairá fora de *LD*, mas intersectará as linhas *LG* e *LA*. Descrevamo-lo, então, e seja *PKRS*. O triângulo *LDK* é menor do que o sector *LPK*, mas o triângulo *LGA* é maior do que o sector *LRS*; conse-



quentemente a razão entre o triângulo *LDK* para o sector *LPK* é menor do que a razão do triângulo *LGA* e o sector *LRS*. E, por sua vez, também a razão entre o triângulo *LDK* e o triângulo *LGA* será menor do que a existente entre o sector *LPK* e o sector *LRS*. E igualmente de acordo com a 1.ª proposição do VI livro dos *Elementos* de Euclides, o triângulo *LDK* está para o triângulo *LGA* como a base *DK* está para a base *AG*. Mas a razão entre os sectores é a mesma que a razão entre o ângulo *DLK* e o ângulo *RLS* ou entre o arco *MN* e o arco *OA*. Mas já se mostrou que *DK* é menor do que *GA*. Com mais razão, pois, *MN* será maior do que *OA*. Estes arcos são descritos pelos pólos da Terra, em intervalos iguais de tempo correspondendo a arcos iguais *AE* e *BF* da anomalia. Era isto o que se pretendia demonstrar.

Contudo, dado que a diferença entre a obliquidade máxima e a mínima é muito ligeira, não excedendo $^2/_5$°, a diferença entre a linha curva *AMC* e a recta *ADC* será imperceptível. Assim, nenhum erro se cometerá se trabalharmos simplesmente com a linha *ADC* e o semicírculo *ABC*. Quase o mesmo se aplica ao outro movimento dos pólos que afecta os equinócios, dado que este não vai também até $^1/_2$°, como mais abaixo se verá.

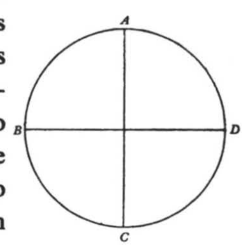
Descrevamos novamente o círculo *ABCD* pelos pólos da eclíptica e do equador médio, a que podemos chamar o coluro médio de Câncer. Seja *DEB* um semicírculo da eclíptica e *AEC* o equador médio, intersectando-se um ao outro no ponto *E*, no qual estará o equinócio médio. Seja *F* um pólo do equador e descrevamos por ele um círculo máximo *FET*. Segue-se que este será também um coluro dos equinócios médios ou uniformes. Agora, para facilitar a demonstração, separaremos a libração dos equinócios da libração da obliquidade da eclíptica. No coluro *EF*, tomemos o arco *FG*. Seja *G* o pólo aparente do equador. Suponhamos que ele se move a partir do pólo médio *F*, descrevendo *FG*. Descrevamos à volta do pólo *G*, *ALKC*, um semicírculo do equador aparente. Ele deve intersectar a eclíptica em *L*, e assim o ponto *L* deve ser o equinócio aparente. A sua distância ao equinócio médio *LE* é determinada pela igualdade entre *EK* e *FG*. Mas se, tomando *K* como pólo, descrevemos o círculo *AGC* e supomos que no tempo em que a libração *FG* tem lugar, o pólo do equador não permanece [coincidente com] o pólo verdadeiro no ponto *G*, mas [distancia-se do arco *GO*], impelido por outra libração diversa, na direcção da obliquidade da



eclíptica; então, enquanto a eclíptica *BED* permanecer estacionária, o equador aparente verdadeiro deslocar-se-á de acordo com a mudança da posição do pólo *O*. E igualmente o movimento de *L*, a intersecção do equador aparente, acelerar-se-á junto de *E*, o equinócio médio, e atingirá a maior lentidão nas extremidades, quase na proporção da libração dos pólos como já se demonstrou [III, 3]. É importante ter compreendido este ponto.

OS MOVIMENTOS REGULARES DE PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS E DA INCLINAÇÃO DA ECLÍPTICA

É de notar que todo o movimento circular não uniforme tem lugar entre quatro limites. Há uma zona onde ele é lento, outra em que é rápido. São as zonas extremas, e a meio caminho entre elas está a média. Realmente, no ponto da desaceleração e no começo da aceleração, muda-se para a velocidade média. A partir daí aumenta até atingir a velocidade máxima. Deste ponto voltará mais uma vez à posição média e, depois, para completar a parte restante do seu círculo total, regressa da velocidade média à sua anterior lentidão. Assim podemos descobrir em que parte do círculo se encontrava a posição da não uniformidade ou anomalia, num dado momento. É também a partir destas indicações que se compreende o ciclo da anomalia. Por exemplo, num círculo dividido em quatro partes, seja *A* a posição da lentidão máxima, *B* a posição média da velocidade crescente, *C* o termo da aceleração e o começo da desaceleração e *D* a posição média da desaceleração. O facto atrás indicado, de se ter verificado, entre Timócares e Ptolomeu, que o movimento aparente de precessão dos equinócios foi mais lento do que na nossa época, e durante algum tempo ele foi regular e uniforme de acordo com as observações de Aristilo, Hiparco, Agripa e Menelau, feitas entretanto, prova que o movimento aparente dos equinócios se encontrava absolutamente no seu ponto mais lento e no meio do período, no começo da aceleração. Neste momento, a cessação da desaceleração combinada com o início da aceleração, anulando-se uma à outra, faziam com que, entretanto, o movimento parecesse uniforme. Conse-



quentemente, a observação de Timócares deve ser colocada na última parte do círculo, dentro de *DA*, mas a de Ptolomeu situa-se no primeiro quadrante dentro de *AB*. Além disto, o facto de no segundo período, entre Ptolomeu e Albaténio, se verificar que o movimento era mais rápido do que no terceiro período, torna claro que a velocidade máxima, isto é, o ponto *C*, passou no segundo período e que a anomalia tinha agora atingido o terceiro quadrante do círculo dentro de *CD*. No terceiro período, que vai até à nossa época, o ciclo da anomalia está quase completo e prestes a voltar ao ponto em que começou com Timócares.

Com efeito, se consideramos o ciclo completo de 1819 anos, de Timócares e até nós como os 360° usuais, teremos em proporção um arco de 85 $^1/_2$° para 432 anos, 146° 51′ para 742 anos, e para 654 anos que faltam o arco restante é de 127° 39′. Chegámos a estes resultados imediatamente e por simples conjectura, mas reexaminando-os com maior cuidado, para estarem mais rigorosamente de acordo com as observações, verificámos que em 1819 anos egípcios o movimento de anomalia ultrapassara já o seu ciclo completo em 21° 24′ e o período é apenas de 1717 anos egípcios. Segundo este cálculo, vê-se que o primeiro segmento do círculo tem 90° 35′ , o segundo 155° 34′, o terceiro durante 543 anos, os restantes 113° 51′ do círculo. Partindo destes resultados, o movimento médio da precessão dos equinócios torna-se claro: corresponde a 23° 57′ nos mesmos 1717 anos durante os quais o seu ciclo de variações se completa e regressa de novo à sua posição inicial. Com efeito, em 1819 anos, verificámos um movimento aparente de cerca de 25° 1′. Contudo, desde Timócares, no período de 102 anos, que são a diferença entre 1717 e 1819 anos, o movimento aparente deve ter sido cerca de 1° 4', porque é provável que fosse então um pouco maior do que o aumento de 1° em cem anos, pois estava ainda a decrescer, mas sem contudo ter chegado ao fim do seu período de desaceleração. De harmonia com isto, se tirarmos 1 $^1/_{15}$° a 25° 1′, o resto será, como dissemos, o movimento médio uniforme para 1717 anos egípcios, o qual era então igual ao movimento não uniforme aparente de 23° 57′. Daqui resulta que o ciclo completo da revolução uniforme da precessão dos equinócios se realiza em 25 816 anos, tempo em que se perfazem cerca de 15 $^1/_{28}$ ciclos de anomalia.

O movimento de obliquidade também está de acordo com este número, sendo o seu período, como dissemos, duas vezes mais lento do que a precessão dos equinócios [III, 3]. Com efeito, também o facto de Ptolomeu ter indicado que a obliquidade de 23° 51′ 20″ tinha mudado muito pouco em 400 anos, desde Aristarco de Samos até o seu tempo, mostra que, nesta altura, a obliquidade atingira quase o limite máximo do seu valor, tendo em conta que a precessão dos equinócios se encontrava então no seu movimento mais lento. Mas agora que o ciclo está a atingir o mesmo grau de lentidão, provavelmente a inclinação do eixo não está de novo a caminho do seu máximo mas do mínimo, dado que no período intermédio, Albaténio, como se disse, verificou que era de 23° 35′, Azarquiel de Espanha, 99 anos depois dele, 23° 34′, e ainda, 230 anos depois, Profácio, o Judeu, quase 2′ menos. Pelo que diz respeito à nossa época, durante os últimos 30 anos e por meio de observações frequentes, verificámos que é de 23° 28 $^2/_5$′. Jorge Purbáquio e João de Monterrégio, que viveram um pouco antes de nós, pouco se afastaram deste cálculo.

[Texto inicial:
No ano de 1460 Purbáquio adiantou ser a inclinação de 23°, de acordo com os astrónomos anteriormente mencionados, acrescida, entretanto, de apenas 28′; além do número de graus inteiros mencionado, Domenico Maria da Novara afirmou que se devia acrescentar uma fracção de 29′ em 1491; e de acordo com João de Monterrégio o valor seria de 23° 28 $^1/_2$′ (Inicialmente Copérnico referira os valores de Purbáquio e Novara no texto, e citou o de Monterrégio na margem)].

Daqui resulta novamente com toda a clareza, que a variação da obliquidade durante 900 anos, desde Ptolomeu, foi maior do que em qualquer outro intervalo de tempo. Ora, como já sabemos que o ciclo da anomalia de precessão é metade do período de obliquidade, o seu ciclo completo é de 3434 anos. Daqui se conclui que se dividirmos 360º pelo mesmo número de anos, 3434, ou 180º por 1717, o resultado será o movimento anual da anomalia simples, $6'\ 17''\ 24'''\ 9''''$. Dividindo esta quantidade a seguir por 365 dias, dá um movimento diário de $1''\ 2'''\ 2''''$. De modo semelhante, dividindo por 1717 anos a precessão média dos equinócios, que é de 23º 57 ', dá o movimento anual de $50''\ 12'''\ 5''''$ e dividindo isto por 365 dias dá o movimento diário de $8'''\ 15''''$. Para tornar estes movimentos mais claros e acessíveis, quando tivermos de nos servir deles, vamos apresentá-los em Tabelas ou Catálogos.

Nestas Tabelas far-se-á a indicação do movimento anual sempre de maneira igual, contínua. Se a soma exceder 60, dividir-se-á por 60 e o quociente adiciona-se à fracção superior do grau ou aos graus. Construímos estas Tabelas, comportando os números de 1 a 60 anos, por conveniência, pois que de 60 em 60 anos se repetem as mesmas séries de números, mudando apenas a designação da fracção do grau ou os graus, de modo que aquilo que era antes um segundo, é agora um minuto, etc.

Assim, com a economia posta nestas pequenas Tabelas, só com duas entradas, podemos deduzir e obter os movimentos regulares para qualquer ano dado até 3600 anos. O mesmo é igualmente verdadeiro para o número de dias.

Contudo, em todos os casos, usaremos sempre, no cálculo dos movimentos dos céus, os anos egípcios. Entre os anos civis só eles são uniformes. De facto, a unidade de medida tinha de estar de acordo com o que se media. Ora isto não se dá com os anos dos Romanos, dos Gregos ou dos Persas. Neles faz-se uma intercalação, não segundo uma norma geral, mas como cada nação preferia. Mas o ano egípcio não oferece qualquer ambiguidade, pois tem um número fixo de dias, 365. Compreendem 12 meses iguais que têm os seguintes nomes, por esta ordem: Tot, Faofi, Atu, Choiach, Tibi, Mechir, Famenot, Farnuti, Pachon, Pauni, Efifi e Mesori. Estes contêm por igual 6 grupos de 60 dias e os 5 dias que faltam chamam-se intercalares. É por isso que no cálculo dos movimentos uniformes, os anos egípcios são os melhores. Todos os outros se reduzem facilmente a eles, fazendo uma transposição de dias.

MOVIMENTO UNIFORME DA PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS EM ANOS E PERÍODOS DE SESSENTA ANOS											Era Cristã 5° 32′
Anos	Longitude					Anos	Longitude				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	0	50	12	31	0	0	25	56	14
2	0	0	1	40	24	32	0	0	26	46	26
3	0	0	2	30	36	33	0	0	27	36	38
4	0	0	3	20	48	34	0	0	28	26	50
5	0	0	4	11	0	35	0	0	29	17	2
6	0	0	5	1	12	36	0	0	30	7	15
7	0	0	5	51	24	37	0	0	30	57	27
8	0	0	6	41	36	38	0	0	31	47	39
9	0	0	7	31	48	39	0	0	32	37	51
10	0	0	8	22	0	40	0	0	33	28	3
11	0	0	9	12	12	41	0	0	34	18	15
12	0	0	10	2	25	42	0	0	35	8	27
13	0	0	10	52	37	43	0	0	35	58	39
14	0	0	11	42	49	44	0	0	36	48	51
15	0	0	12	33	1	45	0	0	37	39	3
16	0	0	13	23	13	46	0	0	38	29	15
17	0	0	14	13	25	47	0	0	39	19	27
18	0	0	15	3	37	48	0	0	40	9	40
19	0	0	15	53	49	49	0	0	40	59	52
20	0	0	16	44	1	50	0	0	41	50	4
21	0	0	17	34	13	51	0	0	42	40	16
22	0	0	18	24	25	52	0	0	43	30	28
23	0	0	19	14	37	53	0	0	44	20	40
24	0	0	20	4	50	54	0	0	45	10	52
25	0	0	20	55	2	55	0	0	46	1	4
26	0	0	21	45	14	56	0	0	46	51	16
27	0	0	22	35	26	57	0	0	47	41	28
28	0	0	23	25	38	58	0	0	48	31	40
29	0	0	24	15	50	59	0	0	49	21	52
30	0	0	25	6	2	60	0	0	50	12	5

MOVIMENTO UNIFORME DA PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS EM DIAS E PERÍODOS DE SESSENTA DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	″		60°	°	′	″	″
1	0	0	0	0	8	31	0	0	0	4	15
2	0	0	0	0	16	32	0	0	0	4	24
3	0	0	0	0	24	33	0	0	0	4	32
4	0	0	0	0	33	34	0	0	0	4	40
5	0	0	0	0	41	35	0	0	0	4	48
6	0	0	0	0	49	36	0	0	0	4	57
7	0	0	0	0	57	37	0	0	0	5	5
8	0	0	0	1	6	38	0	0	0	5	13
9	0	0	0	1	14	39	0	0	0	5	21
10	0	0	0	1	22	40	0	0	0	5	30
11	0	0	0	1	30	41	0	0	0	5	38
12	0	0	0	1	39	42	0	0	0	5	46
13	0	0	0	1	47	43	0	0	0	5	54
14	0	0	0	1	55	44	0	0	0	6	3
15	0	0	0	2	3	45	0	0	0	6	11
16	0	0	0	2	12	46	0	0	0	6	19
17	0	0	0	2	20	47	0	0	0	6	27
18	0	0	0	2	28	48	0	0	0	6	36
19	0	0	0	2	36	49	0	0	0	6	44
20	0	0	0	2	45	50	0	0	0	6	52
21	0	0	0	2	53	51	0	0	0	7	0
22	0	0	0	3	1	52	0	0	0	7	9
23	0	0	0	3	9	53	0	0	0	7	17
24	0	0	0	3	18	54	0	0	0	7	25
25	0	0	0	3	26	55	0	0	0	7	33
26	0	0	0	3	34	56	0	0	0	7	42
27	0	0	0	3	42	57	0	0	0	7	50
28	0	0	0	3	51	58	0	0	0	7	58
29	0	0	0	3	59	59	0	0	0	8	6
30	0	0	0	4	7	60	0	0	0	8	15

MOVIMENTO UNIFORME DA PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS EM ANOS E PERÍODOS DE SESSENTA ANOS

Anos	Movimento					Anos	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	6	17	24	31	0	3	14	59	28
2	0	0	12	34	48	32	0	3	21	16	52
3	0	0	18	52	12	33	0	3	27	34	16
4	0	0	25	9	36	34	0	3	33	51	41
5	0	0	31	27	0	35	0	3	40	9	5
6	0	0	37	44	24	36	0	3	46	26	29
7	0	0	44	1	49	37	0	3	52	43	53
8	0	0	50	19	13	38	0	3	59	1	17
9	0	0	56	36	37	39	0	4	5	18	42
10	0	1	2	54	1	40	0	4	11	36	6
11	0	1	9	11	25	41	0	4	17	53	30
12	0	1	15	28	49	42	0	4	24	10	54
13	0	1	21	46	13	43	0	4	30	28	18
14	0	1	28	3	38	44	0	4	36	45	42
15	0	1	34	21	2	45	0	4	43	3	6
16	0	1	40	38	26	46	0	4	49	20	31
17	0	1	46	55	50	47	0	4	55	37	55
18	0	1	53	13	14	48	0	5	1	55	19
19	0	1	59	30	38	49	0	5	8	12	43
20	0	2	5	48	3	50	0	5	14	30	7
21	0	2	12	5	27	51	0	5	20	47	31
22	0	2	18	22	51	52	0	5	27	4	55
23	0	2	24	40	15	53	0	5	33	22	20
24	0	2	30	57	39	54	0	5	39	39	44
25	0	2	37	15	3	55	0	5	45	57	8
26	0	2	43	32	27	56	0	5	52	14	32
27	0	2	49	49	52	57	0	5	58	31	56
28	0	2	56	7	16	58	0	6	4	49	20
29	0	3	2	24	40	59	0	6	11	6	45
30	0	3	8	42	4	60	0	6	17	24	9

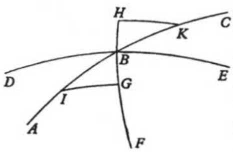
MOVIMENTO UNIFORME DA PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS EM ANOS E PERÍODOS DE SESSENTA ANOS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	0	1	2	31	0	0	0	32	3
2	0	0	0	2	4	32	0	0	0	33	5
3	0	0	0	3	6	33	0	0	0	34	7
4	0	0	0	4	8	34	0	0	0	35	9
5	0	0	0	5	10	35	0	0	0	36	11
6	0	0	0	6	12	36	0	0	0	37	13
7	0	0	0	7	14	37	0	0	0	38	15
8	0	0	0	8	16	38	0	0	0	39	17
9	0	0	0	9	18	39	0	0	0	40	19
10	0	0	0	10	20	40	0	0	0	41	21
11	0	0	0	11	22	41	0	0	0	42	23
12	0	0	0	12	24	42	0	0	0	43	25
13	0	0	0	13	26	43	0	0	0	44	27
14	0	0	0	14	28	44	0	0	0	45	29
15	0	0	0	15	30	45	0	0	0	46	31
16	0	0	0	16	32	46	0	0	0	47	33
17	0	0	0	17	34	47	0	0	0	48	35
18	0	0	0	18	36	48	0	0	0	49	37
19	0	0	0	19	38	49	0	0	0	50	39
20	0	0	0	20	40	50	0	0	0	51	41
21	0	0	0	21	42	51	0	0	0	52	43
22	0	0	0	22	44	52	0	0	0	53	45
23	0	0	0	23	46	53	0	0	0	54	47
24	0	0	0	24	48	54	0	0	0	55	49
25	0	0	0	25	50	55	0	0	0	56	51
26	0	0	0	26	52	56	0	0	0	57	53
27	0	0	0	27	54	57	0	0	0	58	55
28	0	0	0	28	56	58	0	0	0	59	57
29	0	0	0	29	58	59	0	0	1	0	59
30	0	0	0	31	1	60	0	0	1	2	2

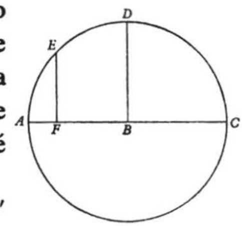
QUAL A MAIOR DIFERENÇA ENTRE AS PRECESSÕES REGULARES E APARENTES

[Originariamente Copérnico iniciou III, 7 com o seguinte passo, depois eliminado: Visto que expus, tão bem quanto me foi possível, o movimento médio e uniforme dos equinócios, devo interrogar-me qual é o máximo valor entre esse valor e o aparente. A partir desta [diferença máxima] poderei facilmente obter também diferenças pontuais. A diferença da dupla anomalia, ou seja, a anomalia dos equinócios em 432 anos, desde Timócares a Ptolomeu, foi claramente de 90° 35′ [III, 6]. Mas o movimento médio da precessão foi de 6°, e o aparente de 4° 20′ sendo a diferença entre eles de 1° 40′. Localizei a fase final do movimento lento e o início da aceleração no ponto médio deste período; então o movimento médio coincidia com o aparente, e os equinócios aparentes com os médios. Em ambos os términos destes factos, consequentemente, existiam distâncias médias e iguais, ou seja, 45° 17 $^1/_2$′, e deste modo uma diferença de 50′ entre os [equinócios] aparentes e médios.]

Tendo explicado os movimentos médios, trata-se agora de verificar qual a diferença máxima entre o movimento uniforme e o movimento aparente dos equinócios ou a grandeza do diâmetro do pequeno círculo à volta do qual se processa o movimento de anomalia. Com efeito, este conhecimento tornará fácil determinar quaisquer outras diferenças entre estes movimentos. Como se notou atrás, entre a primeira observação de Timócares e a de Ptolomeu, no ano 2.° do reinado de Antonino, mediaram 432 anos. Durante esse período o movimento médio foi de 6° e o aparente de 4° 20′. A diferença entre eles é de 1° 40′. Além disto o movimento da dupla anomalia foi de 90° 35′ e também se viu que no tempo médio deste período, ou cerca dele, o movimento aparente atingia o extremo da sua maior lentidão, devendo então necessariamente coincidir com o movimento médio, enquanto o equinócio médio e o verdadeiro estavam no mesmo segmento dos seus círculos. Portanto, se dividirmos o movimento e o tempo por dois, a diferença, em cada metade, entre os movimentos não uniforme e uniforme, será de 10/12°, compreendida em cada lado em arcos de 45° 17 $^1/_2$' do círculo de anomalia. Uma vez assente isto, seja *ABC* um arco da eclíptica, *DBE* o equador médio e *B* o ponto médio de intersecção dos equinócios aparentes em Áries ou em Balança. Descrevamos *BF* passando pelos pólos de *DBE*. Tomemos nas duas partes de *ABC* os arcos iguais *BI* e *BK*, de 10/12°, de modo que todo o arco *IBK* tenha 1° 40'.



Descrevamos também dois arcos dos círculos equatoriais aparentes *IG* e *HK*, em ângulos rectos com *FB* estendido a *FBH*. Digo «em ângulos rectos», embora os pólos de *IG* e *HK* geralmente caiam fora do círculo *BF*, dado que o movimento em inclinação está associado como se viu na hipótese [III, 3]. Contudo, visto que a distância é muito pequena, não indo no máximo além de $^1/_{450}$ de um ângulo recto [= 12'], nós consideramo-los como praticamente iguais a ângulos rectos. Isto não induzirá em qualquer erro. Ora sabe-se que no triângulo *IBG* o ângulo *IBG* mede 66° 20' uma vez que a diferença entre ele e o ângulo recto *DBA* é de 23° 40', o ângulo da obliquidade média da eclíptica, *BGI*, é um ângulo recto e o ângulo *BIG* é aproximadamente igual a *IBD*, tendo o lado *IB*, 50'. Por conseguinte, o arco *BG* que representa a distância entre os pólos dos equador médio e aparente é igual a 20'. Mas porque se verificou que todas estas quantidades são demasiadamente pequenas, não chegando a 1 $^1/_2$° da eclíptica, sendo portanto as cordas quase iguais aos arcos e notando-se dificilmente qualquer diferença mesmo em sexagésimas de segundo, não cairemos em qualquer erro se considerarmos os arcos como linhas rectas. Seja *ABC* parte da eclíptica e *B* o equinócio médio. Tomando *B* como pólo, descrevamos um semicírculo *ADC*, que intersecta a eclíptica nos pontos *A* e *C*. Tracemos também *DB* a partir do pólo da eclíptica de modo a cortar o semicírculo que foi descrito à volta de *D*, onde se entende que está o limite da retardação máxima e o início da aceleração. No quadrante *AD* tomemos um arco de 45° 17 $^1/_2$′, *DE*, e pelo ponto *E*, a partir do pólo do zodíaco, tracemos *EF*. Seja *BF* de 50′. Procuremos assim encontrar o comprimento de toda a recta *BFA*. É pois evidente que o dobro de *BF* é a corda que subtende o dobro do segmento *DE*. Deste modo, assim os 50′ de *BF* estão para os 70′ de *AFB*. Daqui se conclui que *AB* mede 1° 10′ e esta é a diferença máxima entre os movimentos médio e aparente dos equinócios, que é o que procurávamos saber e o que é seguido pela máxima divergência dos pólos, 28′.



Estes 28′ correspondem, na intersecção do equador, aos 70′ na anomalia dos equinócios, que chamaremos «dupla anomalia» para a distinguir da «anomalia simples» da obliquidade.

DIFERENÇAS PARTICULARES ENTRE ESTES MOVIMENTOS E O SEU ESCALONAMENTO NUMA TABELA

Dado sabermos que *AB* mede 70′ e que este arco não difere aparentemente da corda correspondente, não será difícil mostrar outras diferenças particulares entre os movimentos médio e aparente a que os Gregos chamam «prostaféreses» e os mais modernos chamam «equações». É pela sua adição ou subtracção que os movimentos aparentes são ajustados aos movimentos regulares.

Nós preferimos empregar o termo grego como mais apropriado.

Ora se *ED* mede 3°, tendo em conta a razão existente entre *AB* e a corda *BF*, verificamos que a prostaférese *BF* é de 4′. Para 6° a prostaférese é 7′ e para 9°, 11′, e assim por diante. Na nossa opinião, devíamos proceder do mesmo modo em relação à variação da obliquidade onde se verificou, como dissemos [III, 5], que a diferença entre o seu máximo e o seu mínimo era de 24′ que são percorridos num círculo de anomalia simples, em 1717 anos. Metade da duração de um quadrante de círculo será 12′. Nessa posição, o pólo do pequeno círculo desta anomalia estará numa obliquidade de 23° 40′. Desta maneira, como dissemos, deduziremos os restantes valores das diferenças quase na proporção daquelas já verificados, incluídos na Tabela apresentada a seguir. De acordo com a exposição feita atrás, os movimentos aparentes podem ser apresentados de vários modos. Contudo, agradou-nos mais aquele em que as prostaféreses são tomadas separadamente. Isto torna o cálculo dos movimentos mais fácil de entender e mais rigorosamente coerente com a sequência do raciocínio nas exposições. Assim, fizemos uma tabela de 60 linhas, avançando 3º em cada linha. Deste modo ela não tomará excessivo espaço nem parecerá muito compacta e breve. O mesmo faremos em casos semelhantes. Esta terá apenas 4 colunas. As duas primeiras contêm os graus dos dois semicírculos, a que chamamos «o número comum», porque à obliquidade do círculo da eclíptica convém o número simples, enquanto o número complexo servirá para as prostaféreses dos equinócios, cujo início se toma no começo das aceleração (1).

Na terceira coluna encontram-se as prostaféreses para os equinócios correspondentes, numa escala de 3º, que se adicionarão ou subtrairão ao movimento médio cuja origem atribuímos à primeira estrela da cabeça de Áries, no equinócio da Primavera. As prostaféreses devem ser subtraídas quando se referem à anomalia do semicírculo menor, ou seja, à primeira coluna. Devem ser adicionadas se pertencem à segunda coluna e ao semicírculo seguinte. Finalmente, na quarta coluna estão os números de minutos, chamados diferenças entre as proporções de obliquidade. Estas vão até o máximo de 60 minutos, visto que escrevemos 60 em vez de 24′, que é a diferença entre a obliquidade máxima e a mínima. Na mesma proporção ajustamos as fracções das outras diferenças, seguindo um processo semelhante. Por conseguinte pomos 60 no princípio e no fim da anomalia, mas onde a diferença a mais sobe a 22, como na anomalia de 33º, pomos 55 em vez de 22′. Do mesmo modo em vez de 20′, pomos 50 como em relação a uma anomalia de 48º, e assim por diante, como na Tabela junta se mostra.

---

(1) Aqui «número comum» significa número de graus inteiros; e número complexo número expresso em graus e fracções (minutos neste caso).

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DOS EQUINÓCIOS E DA OBLIQUIDADE DA ECLÍPTICA

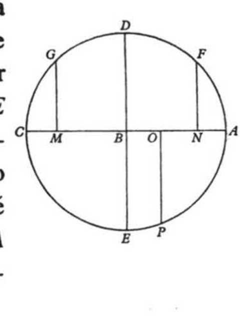
Números Comuns		Prostaféreses dos Equinócios		Proporc. da Obliquidade	Números Comuns		Prostaféreses dos Equinócios		Obliquidade
Gr.	Gr.	Gr.	Min.	Min.	Gr.	Gr.	Gr.	Min.	Min.
3	357	0	4	60	93	267	1	10	28
6	354	0	7	60	96	264	1	10	27
9	351	0	11	60	99	261	1	9	25
12	348	0	14	59	102	258	1	9	24
15	345	0	18	59	105	255	1	8	22
18	342	0	21	59	108	252	1	7	21
21	339	0	25	58	111	249	1	5	19
24	336	0	28	57	114	246	1	4	18
27	333	0	32	56	117	243	1	2	16
30	330	0	35	56	120	240	1	1	15
33	327	0	38	55	123	237	0	59	14
36	324	0	41	54	126	234	0	56	12
39	321	0	44	53	129	231	0	54	11
42	318	0	47	52	132	228	0	52	10
45	315	0	49	51	135	225	0	49	9
48	312	0	52	50	138	222	0	47	8
51	309	0	54	49	141	219	0	44	7
54	306	0	56	48	144	216	0	41	6
57	303	0	59	46	147	213	0	38	5
60	300	1	1	45	150	210	0	35	4
63	297	1	2	44	153	207	0	32	3
66	294	1	4	42	156	204	0	28	3
69	291	1	5	41	159	201	0	25	2
72	288	1	7	39	162	198	0	21	1
75	285	1	8	38	165	195	0	18	1
78	282	1	9	36	168	192	0	14	1
81	279	1	9	35	171	189	0	11	0
84	276	1	10	33	174	186	0	7	0
87	273	1	10	32	177	183	0	4	0
90	270	1	10	30	180	180	0	0	0

EXAME E CORRECÇÃO DA EXPOSIÇÃO ACERCA DA PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS

Como conjectura admitimos que o início da aceleração do movimento não uniforme estava no meio tempo contado entre o 36.º ano do primeiro período, segundo Calipo, e o 2.º ano do reinado de Antonino, e calculámos o movimento de anomalia como tendo então o seu início. Agora devemos examinar se procedemos correctamente e se isso concorda com as observações.

Recordemos as três observações de estrelas feitas por Timócares, Ptolomeu e Albaténio. É óbvio que no primeiro intervalo houve 432 anos egípcios e no segundo 742. O movimento uniforme no primeiro período de tempo foi 6°, o movimento não uniforme 4° 20′ e o movimento de anomalia dupla 90° 35′, subtraindo 1° 40′ do movimento uniforme. No segundo período este movimento uniforme foi 10° 21′ o não uniforme $11^{1}/_{2}$°, e o de anomalia dupla 155° 34′, acrescentando 1° 9′ ao movimento uniforme

Como antes, seja agora *ABC* um arco da eclíptica. À volta do seu pólo *B*, que é o equinócio da Primavera médio, sendo *AB* o arco de 1° 10′, descrevamos o pequeno círculo *ADCE*. Suponhamos o movimento uniforme de *B* para *A*, isto é para Oeste. Seja *A* o limite Oeste que marca o maior avanço do equinócio variável e *C* o limite Este que indica o maior atraso do equinócio variável. Depois, a partir do pólo da eclíptica intersectará o pequeno círculo *ADCE* em quatro partes iguais, dado que se intersectam mutuamente em ângulos rectos, pois passam pelos pólos um do outro. Ora visto quê o movimento no semicírculo *ADC* é para Este e no resto do tempo no semicírculo pequeno *CEA* para Oeste, o ponto médio da retardação do equinócio apa-



rente será em D, visto que se oporá ao movimento de B, mas a maior velocidade será em E, pois os movimentos avançarão juntos, na mesma direcção. A seguir, tomemos os arcos FD e DG, a Este e Oeste de D, medindo cada um 45° 17 $^1/_2$'. Seja F a primeira posição conhecida da anomalia, a de Timócares, G a segunda, a de Ptolomeu, e P a terceira, a de Albaténio. Por estes pontos F, G, P e pelos pólos da eclíptica, descrevamos os círculos máximos FN, GM e OP que são todos virtualmente linhas rectas no pequeno círculo. Ora o arco FDG medirá 90° 35', partindo do princípio de que o pequeno círculo $ADCE$ mede 360°, subtraindo ao movimento médio 1° 40' de MN e medindo ABC 2° 20'. $GCEP$ medirá 155° 34', adicionando ao movimento médio 1° 9' a MO. Portanto, os 113° 51' de PAF [= 360°−(90° 35' + 155° 34')], resto da subtracção de FDG e $GCEP$ de $ADCE$ também acrescentará ao movimento médio os restantes 31' de ON = MN = MO = 1° 40' − − 10° 9', medindo também AB, 70'.

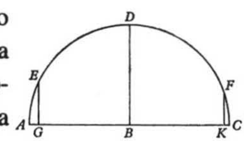
Mas, dado que todo o arco $DGCEP$ mede 200° 51 $^1/_2$' = 45° 17 $^1/_2$' + 155° 34' e EP, parte em que ele excede um semicírculo, tem 20° 51 $^1/_2$', BO dado como linha recta, tem segundo a Tabela das cordas subtendidas num círculo, 356 unidades, considerando AB com 1000. Se porém considerarmos AB com 70', BO terá cerca de 24' e BM 50'. Assim, todo o arco MBO mede 74' e NO a parte restante de MN, 26'. Ora, no cálculo anterior, MBO media 1° 9' e NO, a parte restante, 31'. Um tem menos 5' e outro mais 5'. Por conseguinte, o círculo $ADCE$ deve rodar de modo que as duas partes se ajustem. Isso far-se-á se tomarmos o arco DG com 42$^1/_2$°, de modo que o outro arco, DF, tenha 48° 5'. Com efeito, nesse caso, parecerá que os dois erros ficarão satisfatoriamente corrigidos, acontecendo o mesmo com todo o resto.

Ora, partindo do limite extremo da retardação D, o movimento não uniforme do primeiro intervalo compreenderá o arco completo *DGCEPAF*, de 311° 55', no segundo intervalo abrangerá *DG* com $42^1/_2{}'$ e no terceiro *DGCEP* com 198° 40'.

Sendo *AB* = 70', no primeiro limite, a prostaférese *BN*, de 52', deverá ser adicionada de acordo com os cálculos anteriores. No segundo limite, a prostaférese *MB* de $47\,^1/_2{}'$, será subtraída no terceiro limite, a prostaférese *BO*, com aproximadamente 21', deverá ser novamente adicionada. No primeiro intervalo, de acordo com a demonstração, *BN* deve ser uma prostaférese aditiva de 52'. Por conseguinte, durante o primeiro intervalo, todo o arco *MN* atinge 1° 40' e todo o arco *MBO*, no segundo intervalo, 1° 9', o que está rigorosamente de acordo com as observações. Daqui ressalta com evidência que a anomalia simples, no primeiro limite, é de 155° $57^1/_2{}'$, no segundo, 21° 15', e no terceiro, 99° 2', que era o que se pretendia demonstrar.

QUAL É A DIFERENÇA MÁXIMA ENTRE AS INTERSECÇÕES DO EQUADOR E DA ECLÍPTICA?

Do mesmo modo havemos de provar que as nossas conclusões acerca da variação da obliquidade da eclíptica e do equador eram correctas. Para o 2.º ano do reinado de Antonino tínhamos em Ptolomeu uma anomalia simples corrigida de $21^1/_4$° e ao mesmo tempo verificámos uma obliquidade máxima de 23° 51′ 20″. Desta posição até a nossa observação vão cerca de 1387 anos. Após estes anos, a posição da anomalia simples é avaliada em 145° 24′ e a obliquidade cerca de 23° $28^2/_5$′. Reproduzamos aqui o arco *ABC* da eclíptica ou uma linha recta em vez dele, por causa da sua pequena extensão, e sobre ela o semicírculo da anomalia simples à volta do pólo *B*, como anteriormente. Seja *A* o limite da inclinação máxima, *C* o da mínima. Vamos procurar saber a diferença entre eles. Tomemos, pois, um arco do círculo pequeno, *AE*, de 201° 15′. O resto do quadrante, *ED*, mede 68° 45′. Segundo o nosso cálculo todo o arco *EDF* mede 145° 24′ e a diferença entre *EDF* e *ED*, *DF*, é de 76° 39′. Tracemos *EG* e *FK* perpendiculares ao diâmetro *ABC*. Ora, por causa da diferença conhecida das obliquidades entre Ptolomeu e nosso tempo, o arco de um círculo máximo *GK* é igual a 22′ 56″. Mas considerando *GB* como uma linha recta, é metade da corda subtendida pelo arco duplo de *ED*, é igual a 932 unidades no sistema de unidades em que *AC*, como diâmetro, tem 2000. Nas mesmas unidades, *KB* é igual a metade da corda subtendida pelo arco duplo de *DF*, que tem 973. Daqui se conclui que toda a corda *GK* tem 1095 unidades no sistema de unidades



em que AC tem 2000. Mas se GK tem 22′ 56″, AC terá cerca de 24′ que é a diferença entre a obliquidade máxima e mínima que temos estado a examinar. Daqui resulta como ponto assente que a maior obliquidade 23° 52′, foi atingida entre Timócares e Ptolomeu. Agora nós estamos a aproximar-nos da obliquidade mínima, 23° 28′. Também assim, se calculam quaisquer inclinações médias destes círculos pelo mesmo método que apresentamos para a precessão [III, 8].

DETERMINAÇÃO DAS ÉPOCAS DOS MOVIMENTOS UNIFORMES DOS EQUINÓCIOS E DA ANOMALIA

Tendo assim esclarecido todos estes pontos, resta-nos agora determinar as posições dos movimentos do equinócio da Primavera, chamadas por alguns as épocas nas quais se baseiam os cálculos para qualquer tempo dado. Ptolomeu [*Almagesto,* III, 7] estabeleceu como início absoluto deste cálculo o começo do reinado de Nabonassar da Babilónia, que alguns historiadores pensam ser o reinado de Salmanassar, rei dos Caldeus. Mas nós preferimos tempos mais conhecidos. Assim pensámos que era suficiente começar na 1.ª Olimpíada, que se verificou ter sido 28 anos antes de Nabonassar, tomando o solstício do Verão como o nosso ponto de partida, quando Sírius nascia para os Gregos e se celebravam os Jogos Olímpicos, como escreveram Censorino e outros autores. Assim, de acordo com um cálculo mais rigoroso do tempo que é necessário no cálculo dos movimentos dos céus, desde a primeira Olimpíada, contando a partir do meio-dia do 1.º dia de Hecatombéon, que é um mês dos Gregos, até a Nabonassar, no 1.º dia do mês de Tot, ao meio-dia, segundo a maneira de contar egípcia, há 27 anos e 247 dias. Desde então até à morte de Alexandre há 424 anos egípcios. Da morte de Alexandre até o começo do Calendário de Júlio César há 278 anos egípcios e 118 $^1/_2$ dias até à meia-noite que precede o 1.º de Janeiro, quando Júlio César começou o ano que ele instituiu. Estabeleceu este ano quando era Sumo Pontífice e cônsul pela 3.ª vez, sendo seu colega no consulado Marco Emílio Lépido. A partir deste ano determinado por Júlio César, os anos passaram a chamar-se «Julianos». Do quarto consulado de César até Octaviano Augusto há realmente 18 anos, segundo a estimativa dos Romanos, contando igualmente a partir do 1.º dia de Janeiro, embora tivesse sido no dia 17 de Janeiro que o filho do divinizado Júlio César, isto é, Augusto, foi proclamado Imperador, em seguimento de uma moção de Numácio Planco, aprovada pelo Senado e pelos outros cidadãos, sendo ele cônsul pela 7.ª vez, com Marco Vipsânio Agripa.

Mas os Egípcios, que caíram sob o domínio dos Romanos dois anos antes, após a morte de Marco António e Cleópatra, afirmam haver 15 anos e $246^1/_2$ dias até ao meio-dia do 1.º dia do mês de Tot, que era o dia 30 de Agosto pelo calendário romano. Assim, de Augusto até o início da era de Cristo, cujos anos começam também em Janeiro, há 27 anos, segundo o cômputo romano, mas 29 anos e $130\ ^1/_2$ dias segundo a maneira de contar egípcia. De então até o 2.º ano do reinado de Antonino, quando Cláudio Ptolomeu catalogou as posições das estrelas, por ele mesmo observadas, há 138 anos romanos e 55 dias, tendo os anos romanos mais 35 dias cada um do que os anos egípcios. O total desde a 1.ª Olimpíada até este ponto é de 13 anos e 101 dias. Durante este tempo, a precessão uniforme dos equinócios foi de 12° 44′ e a anomalia simples 95° 44′. Contudo, no 2.º ano do reinado de Antonino [Ptolomeu, *Almagesto,* VII, 5], segundo se diz, o equinócio da Primavera estava 6° 40′ para além da primeira estrela da cabeça de Áries. E uma vez que a anomalia era de $42\ ^1/_2{}^\circ$ [III, 9], havia uma diferença entre o movimento uniforme e aparente, de menos de 48′. Quando esta diferença é novamente adicionada ao movimento aparente, o resultado é uma posição média do equinócio da Primavera com 7° 28′. Se lhe juntarmos um círculo completo de 360° e do total subtrairmos 12° 44′, teremos para a 1.ª Olimpíada que começou ao meio-dia do 1.º de Hecatombéon, em Atenas, uma posição média para o equinócio da Primavera, em 354° 44′, isto é, 5° 16′ [= 360° – 354° 44′] a Oeste da primeira estrela do Áries, portanto.

Do mesmo modo, se subtrairmos 95° 45′ menos 21° 15′, da anomalia simples, o resto para o mesmo começo das Olimpíadas, é de 285° 30′, correspondentes à posição da anomalia simples. E novamente, pela adição dos movimentos apropriados para o intervalo de tempo, tirando 360°, sempre que o total exceda este número, verificamos que as posições ou épocas são em relação ao início da era de Alexandre Magno, 1° 2′ para o movimento uniforme e 332° 52′ para a anomalia simples; em relação ao começo da era de César, o movimento médio é 4° 55′ e a anomalia simples 2° 2′; quanto ao início da era cristã, a posição média é 5° 32′ e a anomalia 16° 45′. O mesmo se dá para as outras. Acharemos as épocas dos movimentos consoante a era que tomarmos como ponto de partida.

CÔMPUTO DA PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS DA PRIMAVERA E DA OBLIQUIDADE

Portanto, sempre que desejemos encontrar a posição do equinócio da Primavera, se os anos do ponto de partida são desiguais, como acontece com os anos romanos geralmente por nós usados, reduzimo-los a anos iguais ou egípcios. Com efeito, pelas razões aduzidas [III, 6], utilizaremos apenas os anos egípcios no cálculo dos movimentos regulares. Sempre que o número de anos exceder 60, dividi-los-emos em períodos de 60 anos. Quando procurarmos estes períodos de 60 anos na Tabela dos Movimentos dos Equinócios [III, 6], não atendemos à primeira coluna dessa Tabela, pois é desnecessária. Passaremos à segunda coluna, a dos graus. Se houver alguns conjuntos de 60°, tomá-los-emos assim como os graus restantes e os minutos que se seguem. Em seguida, consultando a Tabela, uma segunda vez, para os anos restantes, tomaremos os conjuntos de 60°, os graus e os minutos que houver, como estão nesta Tabela a partir da primeira coluna. Assim faremos com os dias e conjuntos de 60 dias quando quisermos adicionar-lhes os movimentos uniformes pela Tabela dos dias e minutos. Contudo, poderíamos aqui desprezar, sem qualquer prejuízo, partes do dia, ou até dias, tendo em conta a lentidão destes movimentos, pois em relação ao movimento diário apenas se trata de segundos ou sexagésimos de segundo. Depois de somarmos tudo isto com a sua época, adicionando os números da mesma espécie, e eliminando seis conjuntos de 60°, se o número for superior a 360°, teremos, para o tempo dado, a posição média do equinócio da Primavera, correspondente a quanto ela se encontra para além da primeira estrela do Áries ou a estrela que segue o equinócio. Determinaremos a anomalia do mesmo modo. Além da anomalia simples, encontraremos na Tabela das prostaféreses [III, 8], na última coluna, os minutos proporcionais que conservaremos à parte. Ora, além da anomalia dupla, encontraremos na terceira coluna da mesma Tabela de prostaféreses o número de graus e minutos em que o movimento verdadeiro difere do médio. Se a anomalia dupla é menor do que um semicírculo, subtraímos a prostaférese do movimento médio; mas se é maior do que um semicírculo, tendo mais de 180 graus, juntamo-lo ao movimento médio e a soma ou diferença resultantes representam a precessão verdadeira e aparente do equinócio da Primavera ou então quanto a primeira estrela de Áries está afastada do equinócio da Primavera.

Mas se procurarmos a posição de qualquer outra estrela, juntaremos o número que lhe corresponde no Catálogo das estrelas.

Assim, visto que quando se trata de um trabalho prático, os exemplos tornam as coisas mais claras. Suponhamos que temos o propósito de calcular a verdadeira posição do equinócio da Primavera no dia 16 de Abril do ano 1525 da era cristã, assim como a obliquidade da eclíptica e a distância da Espiga da Virgem ao referido equinócio. Evidentemente, nos 1524 anos romanos e mais 106 dias desde o começo da era cristã até agora, foram intercalados 381 dias, ou seja, 1 ano e 16 dias . Isto perfaz em anos iguais 1525 anos e 122 dias, isto é, 25 períodos de 60 anos, mais 25 anos, dois períodos de 60 dias e 2 dias. O número correspondente a 25 períodos de 60 anos na Tabela do movimento uniforme [imediata a III, 6] é 20° 55′2″; a 25 anos é 20′25″; a 2 períodos de 60 dias é 16″. O número correspondente aos restantes dois dias é dado em sexagésimos de segundo. Todos estes números, juntamente com a época, que era 5° 22′ [III, 11] perfazem o total de 26° 48′ para a precessão média do equinócio da Primavera. Do mesmo modo, em relação ao movimento da anomalia simples, encontraremos para os 25 períodos de 60 anos, 2 períodos de 60°, mais 37° 15′ 3″. Para os 25 anos, 2° 37′ 15″; para os 2 períodos de 60 dias, 2 4″ e para o mesmo número de dias 2″. Acrescentando isto à época que é 6° 45′, dá a anomalia simples de 2 períodos de 60°, mais 46° 40′. Quanto aos minutos proporcionais correspondentes a esta anomalia que se encontram na última coluna da Tabela de prostaféreses reservá-los-ei para procurar a obliquidade, e neste caso apenas se encontra 1′. A seguir, com a anomalia dupla que é de 5 conjuntos de 60 graus, mais 33° 20′, acho a prostaférese, 32′, que deve ser adicionada, pois que a anomalia é maior do que um semicírculo. Quando for somada com o movimento médio, o resultado será a precessão verdadeira e aparente do equinócio de Primavera, 27° 21′. Finalmente, se a isto se juntar 170°, a distância da Espiga da Virgem, à primeira estrela do Áries, teremos a sua posição a Este do equinócio da Primavera, em 17° 21′ da Balança, aproximadamente no lugar em que se encontrava na altura da nossa observação.

Mas para a obliquidade da eclíptica e para as declinações a regra é que, quando o número de minutos proporcionais atinge 60, as adições marcadas na Tabela das Declinações [em seguida a II, 3], isto é, as diferenças da obliquidade máxima e mínima são acrescentadas no seu total aos graus das declinações. Contudo, neste caso, um destes minutos proporcionais junta simplesmente 24″ à obliquidade. Daqui resulta que as declinações dos graus da eclíptica, dadas na Tabela permanecem como estão, dado que a obliquidade mínima se aproxima agora de nós, embora noutras ocasiões as suas mudanças sejam mais evidentes. Por exemplo, se a anomalia simples for 99°, como era 880 anos egípcios depois de Cristo, dá 25′ para os minutos proporcionais. Mas 60′ estão para 24′, diferença entre a obliquidade máxima e mínima, assim como 25′ estão para 16′.

Juntando 10 a 28, dá uma obliquidade para este tempo, de 23° 38′. Ora, se quisermos saber a declinação de qualquer grau da eclíptica, por exemplo do 3° do Touro que está a 33° do equinócio, acho na Tabela 12° 32′ com um excesso de 12′. Mas 60 está para 25 assim como 12 está para 5. Juntando 5′ aos graus da declinação dá 12° 37′ para os 33° da eclíptica. Para os ângulos da intersecção da eclíptica e do equador, e as ascensões rectas, podemos utilizar o mesmo método, a não ser que prefiramos usar as relações dos triângulos esféricos, tendo em conta que devemos sempre acrescentar as prostaféreses no tocante aos ângulos de intersecção, e subtrair em relação às ascensões rectas, para obter todos os números corrigidos cronologicamente e com exactidão.

A EXTENSÃO E VARIAÇÃO DO ANO SOLAR

A interpretação da precessão dos equinócios e solstícios, que resulta da deflexão do eixo da Terra [III, 3], como dissemos, será confirmada pelo movimento anual do centro da Terra, que se realiza à volta do Sol, e dele devemos tratar agora. Seguir-se-á naturalmente que, quando a extensão do ano se conta a partir de um dos equinócios ou solstícios, é variável, tendo em conta a mudança não uniforme daqueles limites, pois estes fenómenos são interdependentes. Devemos por conseguinte separar e distinguir o ano «sazonal» ([1]) do ano sideral. Chamamos natural ou «sazonal» ao ano que nos apresenta a sucessão das quatro estações, e sideral àquele que se refere a uma estrela fixa. O ano natural também chamado trópico, é irregular. As observações dos antigos mostram-no muito claramente.

Com efeito, Calipo, Aristarco de Samos e Arquimedes de Siracusa fixam a extensão do ano em 365 dias e um quarto, tomando o último como início do ano o solstício do Verão, segundo o costume de Atenas. Mas Cláudio Ptolomeu, pondo em evidência que era difícil a determinação dos solstícios, sendo necessário fazê-la com rigor, não confiou nas observações dele mas voltou-se mais para Hiparco, que nos legou observações não só dos solstícios mas também dos equinócios, feitas em Rodes, declarando que era um pouco menos de um quarto de dia. Depois, Ptolomeu concluiu que o excesso do ano sobre 365 dias era $^1/_{300}$ de dia a menos, seguindo o método seguinte [*Alma-*

([1]) Empregamos o adjectivo sazonal em vez da perífrase «relacionado com as estações», que nos apresenta o original.

gesto, III, 1]. Tomou o equinócio do Outono observado com o maior rigor possível por Hiparco, em Alexandria, no ano 177 depois da morte de Alexandre, no terceiro dia intercalar pelo cômputo egípcio, à meia-noite, imediatamente antes do quarto dia intercalar. Juntou-lhe a sua própria observação do mesmo equinócio, em Alexandria, no terceiro ano do reinado de Antonino, 463 anos depois da morte de Alexandre, no dia 9 de Atir, o 3.º mês egípcio, cerca de uma hora depois do nascer do Sol. Ora, entre esta observação e a determinação de Hiparco, decorreram 285 anos egípcios, 70 dias, 7 horas e meia, enquanto deviam ter sido 71 dias e 6 horas se o ano trópico tivesse sido um quarto de dia mais do que os 365 dias inteiros.

Portanto em 285 anos falta 1 dia menos $^{1}/_{20}$. Daí resulta que em 300 anos, falta 1 dia inteiro. Ptolomeu adoptou também uma estimativa semelhante para o equinócio da Primavera. Com efeito, o que Ptolomeu recordou ter sido observado por Hiparco no ano 178 depois da morte de Alexandre, a 27 de Mechir, o sexto mês do ano egípcio, ao nascer do Sol, observou-o ele próprio no ano 473 depois da morte de Alexandre, a 7 do mês de Pachon, o nono segundo o Calendário egípcio, 1 hora e pouco depois do meio-dia. Do mesmo modo, em 285 anos faltava $^{1}/_{20}$ de dia. Com o auxílio destes dados fixou o ano trópico em 365 dias, 14 minutos de um dia e 48 segundos de um dia. A seguir, em Al-Raqqa, na Síria, com não menos engenho, Albaténio observou o equinócio do Outono, no ano 1206 depois da morte de Alexandre, e verificou que foi no dia 7 do mês de Pachon, cerca das 7 horas e 24 minutos depois do começo da noite a seguir a este dia, isto é, cerca de 4 horas e 36′ antes do nascer do Sol do dia 8.

Comparando esta sua observação com a de Ptolomeu feita no terceiro ano do reinado de Antonino, uma hora depois do nascer do Sol, em Alexandria, que fica a 10º a

Oeste de Al-Raqqa, ajustou-a ao seu próprio meridiano em Al-Raqqa, onde esse equinócio devia ter ocorrido 1 hora e 40 minutos depois do nascer do Sol. Portanto, no intervalo de 743 anos uniformes, houve a mais 178 dias e 17 horas e 24 minutos, em contraste com o total de 185 dias e 18 horas resultante da adição dos quartos de dia. Ora, como faltavam 7 dias e 24 minutos, parecia ser $^1/_{106}$ menos do que $^1/_4$ de dia. De acordo com isto dividiu 7 dias e 24 minutos por 743, segundo o número de anos, sendo o quociente 13′ 36″. Subtraindo esta quantidade de 6 horas, verificou que o ano natural tem 365 dias, 5 horas, 46 minutos e 24 segundos. Também observámos o equinócio do Outono em Frombork, no ano 1515 da Era de Cristo, no dia 13 de Setembro correspondente ao ano egípcio de 1840 depois da morte de Alexandre Magno, no dia 6 do mês de Faofi, meia hora depois do nascer do Sol. Mas como Al-Raqqa está mais para Este do que a nossa região, quase 25°, correspondentes a 1 hora e 40 minutos, no período entre este nosso equinócio e o de Albaténio, houve 153 dias e $6\,^3/_4$ horas para além dos 633 anos egípcios, em vez de 158 dias e 6 horas. Da observação de Ptolomeu em Alexandria para o lugar e tempo da nossa própria observação há uma diferença de 1386 anos egípcios, 322 dias e meia hora, pois diferimos de Alexandria quase 1 hora. Por conseguinte, desde o tempo de Albaténio até nós, em 633 anos, faltaram cinco dias menos $^1/_4$ ou um dia em 128 anos. Contudo, desde Ptolomeu, em 1376 anos, foram cerca de 12 dias ou 1 dia para 115 anos. Além disso o ano resultou não uniforme nos dois casos. Determinámos também o equinócio da Primavera que teve lugar no ano seguinte, 1516 da Era de Cristo, 4 horas e 20 minutos depois da meia-noite, no dia 11 de Março. A partir do equinócio da Primavera de Ptolomeu, levando em conta a diferença entre o meridiano de Alexandria e o nosso, há 1376 anos egípcios, 322 dias, 16 horas e 20 minutos. Neste caso, também é evidente que os intervalos entre os equinócios da Primavera e do Outono são desiguais. Assim o ano solar medido desta maneira está longe de ser uniforme. Com efeito, o facto de nos equinócios do Outono entre Ptolomeu e nós, como se demonstrou, considerando a percentagem anual constante, haver $^1/_{115}$ menos do que $^1/_4$ de dia menos $^1/_{28}$ do dia, está de acordo com Ptolomeu, mas a data calculada precede o equinócio por ele observado em mais de 1 dia completo, e, comparado com o de Hiparco, mais de 2 dias. Igualmente o cálculo referente ao período de Ptolomeu a Albaténio excede o equinócio de Hiparco em 2 dias. Por conseguinte a duração regular do ano solar deriva mais correctamente da esfera das estrelas fixas, como foi primeiramente descoberto por Thabit ibn Qurra. A sua duração é de 365 dias, mais 15 minutos de um dia e 23 segundos de um dia, que são aproximadamente 6 horas iguais, 9 minutos e 12 segundos, aceitando o argumento muito provável de que o ano pareceria mais longo quando a chegada dos equinócios e solstícios fosse mais lenta do que quando fosse mais rápida, numa proporção definida. Isto não podia ser assim se não houvesse regularidade em comparação com a esfera das estrelas fixas. Assim, não devemos seguir Ptolomeu neste ponto, pois achou absurdo e impróprio medir o movimento uniforme anual do Sol tendo como base a realização de algum circuito pelas estrelas fixas e que fosse mais apropriado do que atribuí-lo a Júpiter ou Saturno [*Almagesto*, III, 1],. Assim se compreende facilmente por que, antes de Ptolomeu, o ano natural era mais longo e depois dele se tornou mais curto, com uma diminuição variável. Contudo, pode também ocorrer uma variação no ano astral ou estrelar mais reduzido e muito menor do que aquele que acabamos de referir. A razão disto é que mesmo o movimento aparente do centro da Terra à volta do Sol é também não uniforme, variando de dois modos. Destas suas variações, a primeira é simples e tem um período anual. A outra, que pelas suas variações faz com que a primeira mude, demorou muito tempo a ser descoberta. Por isso, o cálculo do ano uniforme a partir do ano [real] nem é elementar nem fácil de descobrir. Com efeito, se alguém pretende fundamentá-lo simplesmente da distância definida a uma estrela de posição conhecida, o que se pode fazer com o auxílio de um astrolábio, tendo a Lua como ponto de referência, como explicámos para o caso de Régulus de Leão [II, 14], não evitará completamente o erro, a não ser que o Sol tenha uma prostaférese nula nesse tempo, por causa do movimento da Terra, ou tenha uma prostaférese semelhante e igual em ambos os pontos cardeais.

Se não é esse o caso e há alguma não uniformidade desses pontos cardeais, é decerto evidente que uma revolução uniforme não se completa em tempos iguais. Mas se nos dois pontos cardeais se subtrair ou adicionar toda a irregularidade proporcionalmente, à variação inteira, a prática será correcta. Além disso, a determinação da não uniformidade exige que o movimento médio seja conhecido antes, e por esse motivo é que tentámos encontrá-lo. Não obstante, para acabar eventualmente de desatar este nó, descobrimos quatro causas da não uniformidade aparente. A primeira é a não uniformidade da precessão dos equinócios, que explicámos [III, 3]. A segunda é a desigualdade dos arcos da eclíptica, que vemos o Sol atravessar, desigualdade que se estende por aproximadamente um ano. A terceira é a que produz também variações na anterior, à qual, por isso, chamaremos segunda desigualdade. E resta a quarta, que altera as ápsides superior e inferior da Terra, como se verá a seguir [III, 20]. De todas estas causas apenas a segunda era conhecida de Ptolomeu [*Almagesto*, III, 4], mas só por si ela não podia provocar a não uniformidade anual, o que só pode alcançar-se combinando-a com as outras. Para explicar a variação do movimento uniforme e aparente do Sol parece que não é necessário um cálculo exacto do ano. Com esta finalidade é satisfatório acertarmos como duração do ano, $365^1/_4$, período em que o movimento da primeira desigualdade se completa, dado que a diferença tão diminuta num círculo inteiro desaparece quase por completo quando absorvida por uma grandeza menor. Mas atendendo à ordenação lógica e à facilidade de compreensão, apresentamos aqui os movimentos uniformes da revolução anual do centro da Terra, em primeiro lugar, e depois associar-lhes-emos as diferenças entre o movimento uniforme e aparente, com base nas provas necessárias [III, 15].

OS MOVIMENTOS REGULAR E MÉDIO DAS REVOLUÇÕES DO CENTRO DA TERRA

Verificámos que a duração do ano uniforme era apenas $1^{10}/_{60}$ segundos de um dia maior do que Thabit ibn Qurra referiu [III, 13], isto é, 365 dias, mais 15 minutos de um dia, 24 segundos de um dia e $^{10}/_{60}$ de segundo de um dia, que são 6 horas iguais, 9 minutos e 40 segundos. A sua regularidade em relação às estrelas fixas devia ser de uma uniformidade precisa.

Assim, se multiplicarmos os 360° do círculo pelos 360 dias e dividirmos o produto por 365 dias, 15 minutos de um dia e $24^{10}/_{60}$ segundos de um dia, teremos o movimento num ano egípcio com $5 \times 60° + 59°\ 44'\ 49''\ 7'''\ 4''''$. Em 60 anos semelhantes, o movimento é, depois de eliminarmos os círculos totais, $5 \times 60° + 44°\ 49'\ 7''\ 4'''$. Se dividirmos depois o movimento anual por 365 dias, verificamos que o movimento diário é $59'\ 8''\ 11'''\ 22''''$. Mas se juntarmos a isto a precessão média e uniforme dos equinócios [III, 6], encontramos, combinado-os, o movimento uniforme para o ano natural, que é $5 \times 60° + 59°\ 45'39''19'''9''''$ e o movimento diário, $59'\ 8''\ 19'''37'''$. Por esta razão podemos chamar ao primeiro, o movimento uniforme simples do Sol, para usar a expressão vulgar, e ao segundo, o movimento uniforme composto do Sol. Colocá-los-emos também nas Tabelas do mesmo modo que fizemos na precessão dos equinócios. A estes junta-se-lhes o movimento uniforme de anomalia do Sol, acerca do que diremos algo mais a seguir [III, 18].

TABELA DO MOVIMENTO UNIFORME E SIMPLES DO SOL EM ANOS

Era Cristã 272° 31′

Anos	Movimento					Anos	Movimento				
	60°	°	′	″	″		60°	°	′	″	‴
1	5	59	44	49	7	31	5	52	9	22	39
2	5	59	29	38	14	32	5	51	54	11	46
3	5	59	14	27	21	33	5	51	39	0	53
4	5	58	59	16	28	34	5	51	23	50	0
5	5	58	44	5	35	35	5	51	8	39	7
6	5	58	28	54	42	36	5	50	53	28	14
7	5	58	13	43	49	37	5	50	38	17	21
8	5	57	58	32	56	38	5	50	23	6	28
9	5	57	43	22	3	39	5	50	7	55	35
10	5	57	28	11	10	40	5	49	52	44	42
11	5	57	13	0	17	41	5	49	37	33	49
12	5	56	57	49	24	42	5	49	22	22	56
13	5	56	42	38	31	43	5	49	7	12	3
14	5	56	27	27	38	44	5	48	52	1	10
15	5	56	12	16	46	45	5	48	36	50	18
16	5	55	57	5	53	46	5	48	21	39	25
17	5	55	41	55	0	47	5	48	6	28	32
18	5	55	26	44	7	48	5	47	51	17	39
19	5	55	11	33	14	49	5	47	36	6	46
20	5	54	56	22	21	50	5	47	20	55	53
21	5	54	41	11	28	51	5	47	5	45	0
22	5	54	26	0	35	52	5	46	50	34	7
23	5	54	10	49	42	53	5	46	35	23	14
24	5	53	55	38	49	54	5	46	20	12	21
25	5	53	40	27	56	55	5	46	5	1	28
26	5	53	25	17	3	56	5	45	49	50	35
27	5	53	10	6	10	57	5	45	34	39	42
28	5	52	54	55	17	58	5	45	19	28	49
29	5	52	39	44	24	59	5	45	4	17	56
30	5	52	24	33	32	60	5	44	49	7	4

TABELA DO MOVIMENTO UNIFORME E SIMPLES DO SOL EM DIAS

Dias	Movimento						Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴			60°	°	′	″	‴
1	0	0	59	8	11		31	0	30	33	13	52
2	0	1	58	16	22		32	0	31	32	22	3
3	0	2	57	24	34		33	0	32	31	30	15
4	0	3	56	32	45		34	0	33	30	38	26
5	0	4	55	40	56		35	0	34	29	46	37
6	0	5	54	49	8		36	0	35	28	54	49
7	0	6	53	57	19		37	0	36	28	3	0
8	0	7	53	5	30		38	0	37	27	11	11
9	0	8	52	13	42		39	0	38	26	19	23
10	0	9	51	21	53		40	0	39	25	27	34
11	0	10	50	30	5		41	0	40	24	35	45
12	0	11	49	38	16		42	0	41	23	43	57
13	0	12	48	46	27		43	0	42	22	52	8
14	0	13	47	54	39		44	0	43	22	0	20
15	0	14	47	2	50		45	0	44	21	8	31
16	0	15	46	11	1		46	0	45	20	16	42
17	0	16	45	19	13		47	0	46	19	24	54
18	0	17	44	27	24		48	0	47	18	33	5
19	0	18	43	35	35		49	0	48	17	41	16
20	0	19	42	43	47		50	0	49	16	49	28
21	0	20	41	51	58		51	0	50	15	57	39
22	0	21	41	0	9		52	0	51	15	5	50
23	0	22	40	8	21		53	0	52	14	14	2
24	0	23	39	16	32		54	0	53	13	22	13
25	0	24	38	24	44		55	0	54	12	30	25
26	0	25	37	32	55		56	0	55	11	38	36
27	0	26	36	41	6		57	0	56	10	46	47
28	0	27	35	49	18		58	0	57	9	54	59
29	0	28	34	57	29		59	0	58	9	3	10
30	0	29	34	5	41		60	0	59	8	11	22

TABELA DOS MOVIMENTOS UNIFORMES E COMPOSTOS DO SOL EM ANOS

Anos	Movimento					Anos	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	5	59	45	39	19	31	5	52	35	18	53
2	5	59	31	18	38	32	5	52	20	58	12
3	5	59	16	57	57	33	5	52	6	37	31
4	5	59	2	37	16	34	5	51	52	16	51
5	5	58	48	16	35	35	5	51	37	56	10
6	5	58	33	55	54	36	5	51	23	35	29
7	5	58	19	35	14	37	5	51	9	14	48
8	5	58	5	14	33	38	5	50	54	54	7
9	5	57	50	53	52	39	5	50	40	33	26
10	5	57	36	33	11	40	5	50	26	12	46
11	5	57	22	12	30	41	5	50	11	52	5
12	5	57	7	51	49	42	5	49	57	31	24
13	5	56	53	31	8	43	5	49	43	10	43
14	5	56	39	10	28	44	5	49	28	50	2
15	5	56	24	49	47	45	5	49	14	29	21
16	5	56	10	29	6	46	5	49	0	8	40
17	5	55	56	8	25	47	5	48	45	48	0
18	5	55	41	47	44	48	5	48	31	27	19
19	5	55	27	27	3	49	5	48	17	6	38
20	5	55	13	6	23	50	5	48	2	45	57
21	5	54	58	45	42	51	5	47	48	25	16
22	5	54	44	25	1	52	5	47	34	4	35
23	5	54	30	4	20	53	5	47	19	43	54
24	5	54	15	43	39	54	5	47	5	23	14
25	5	54	1	22	58	55	5	46	51	2	33
26	5	53	47	2	17	56	5	46	36	41	52
27	5	53	32	41	37	57	5	46	22	21	11
28	5	53	18	20	56	58	5	46	8	0	30
29	5	53	4	0	15	59	5	45	53	39	49
30	5	52	49	39	34	60	5	45	39	19	9

TABELA DOS MOVIMENTOS UNIFORMES E COMPOSTOS DO SOL EM DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	59	8	19	31	0	30	33	18	8
2	0	1	58	16	39	32	0	31	32	26	27
3	0	2	57	24	58	33	0	32	31	34	47
4	0	3	56	33	18	34	0	33	30	43	6
5	0	4	55	41	38	35	0	34	29	51	26
6	0	5	54	49	57	36	0	35	28	59	46
7	0	6	53	58	17	37	0	36	28	8	5
8	0	7	53	6	36	38	0	37	27	16	25
9	0	8	52	14	56	39	0	38	26	24	45
10	0	9	51	23	16	40	0	39	25	33	4
11	0	10	50	31	35	41	0	40	24	41	24
12	0	11	49	39	55	42	0	41	23	49	43
13	0	12	48	48	15	43	0	42	22	58	3
14	0	13	47	56	34	44	0	43	22	6	23
15	0	14	47	4	54	45	0	44	21	14	42
16	0	15	46	13	13	46	0	45	20	23	2
17	0	16	45	21	33	47	0	46	19	31	21
18	0	17	44	29	53	48	0	47	18	39	41
19	0	18	43	38	12	49	0	48	17	48	1
20	0	19	42	46	32	50	0	49	16	56	20
21	0	20	41	54	51	51	0	50	16	4	40
22	0	21	41	3	11	52	0	51	15	13	0
23	0	22	40	11	31	53	0	52	14	21	19
24	0	23	39	19	50	54	0	53	13	29	39
25	0	24	38	28	10	55	0	54	12	37	58
26	0	25	37	36	30	56	0	55	11	46	18
27	0	26	36	44	49	57	0	56	10	54	38
28	0	27	35	53	9	58	0	57	10	2	57
29	0	28	35	1	28	59	0	58	9	11	17
30	0	29	34	9	48	60	0	59	8	19	37

TABELA DO MOVIMENTO UNIFORME E SIMPLES DO SOL EM ANOS

Anos	Movimento					Anos	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	5	59	44	24	46	31	5	51	56	48	11
2	5	59	28	49	33	32	5	51	41	12	58
3	5	59	13	14	20	33	5	51	25	37	45
4	5	58	57	39	7	34	5	51	10	2	32
5	5	58	42	3	54	35	5	50	54	27	19
6	5	58	26	28	41	36	5	50	38	52	6
7	5	58	10	53	27	37	5	50	23	16	52
8	5	57	55	18	14	38	5	50	7	41	39
9	5	57	39	43	1	39	5	49	52	6	26
10	5	57	24	7	48	40	5	49	36	31	13
11	5	57	8	32	35	41	5	49	20	56	0
12	5	56	52	57	22	42	5	49	5	20	47
13	5	56	37	22	8	43	5	48	49	45	33
14	5	56	21	46	55	44	5	48	34	10	20
15	5	56	6	11	42	45	5	48	18	35	7
16	5	55	50	36	29	46	5	48	2	59	54
17	5	55	35	1	16	47	5	47	47	24	41
18	5	55	19	26	3	48	5	47	31	49	28
19	5	55	3	50	49	49	5	47	16	14	14
20	5	54	48	15	36	50	5	47	0	39	1
21	5	54	32	40	23	51	5	46	45	3	48
22	5	54	17	5	10	52	5	46	29	28	35
23	5	54	1	29	57	53	5	46	13	53	22
24	5	53	45	54	44	54	5	45	58	18	9
25	5	53	30	19	30	55	5	45	42	42	55
26	5	53	14	44	17	56	5	45	27	7	42
27	5	52	59	9	4	57	5	45	11	32	29
28	5	52	43	33	51	58	5	44	55	57	16
29	5	52	27	58	38	59	5	44	40	22	3
30	5	52	12	23	25	60	5	44	24	46	50

TABELA DAS ANOMALIAS SOLARES EM DIAS E PERÍODOS DE SESSENTA ANOS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	59	8	7	31	0	30	33	11	48
2	0	1	58	16	14	32	0	31	32	19	55
3	0	2	57	24	22	33	0	32	31	28	3
4	0	3	56	32	29	34	0	33	30	36	10
5	0	4	55	40	36	35	0	34	29	44	17
6	0	5	54	48	44	36	0	35	28	52	25
7	0	6	53	56	51	37	0	36	28	0	32
8	0	7	53	4	58	38	0	37	27	8	39
9	0	8	52	13	6	39	0	38	26	16	47
10	0	9	51	21	13	40	0	39	25	24	54
11	0	10	50	29	21	41	0	40	24	33	2
12	0	11	49	37	28	42	0	41	23	41	9
13	0	12	48	45	35	43	0	42	22	49	16
14	0	13	47	53	43	44	0	43	21	57	24
15	0	14	47	1	50	45	0	44	21	5	31
16	0	15	46	9	57	46	0	45	20	13	38
17	0	16	45	18	5	47	0	46	19	21	46
18	0	17	44	26	12	48	0	47	18	29	53
19	0	18	43	34	19	49	0	48	17	38	0
20	0	19	42	42	27	50	0	49	16	46	8
21	0	20	41	50	34	51	0	50	15	54	15
22	0	21	40	58	42	52	0	51	15	2	23
23	0	22	40	6	49	53	0	52	14	10	30
24	0	23	39	14	56	54	0	53	13	18	37
25	0	24	38	23	4	55	0	54	12	26	45
26	0	25	37	31	11	56	0	55	11	34	52
27	0	26	36	39	18	57	0	56	10	42	59
28	0	27	35	47	26	58	0	57	9	51	7
29	0	28	34	55	33	59	0	58	8	59	14
30	0	29	34	3	41	60	0	59	8	7	22

TEOREMAS PRELIMINARES PARA DEMONSTRAR A NÃO UNIFORMIDADE DO MOVIMENTO APARENTE DO SOL

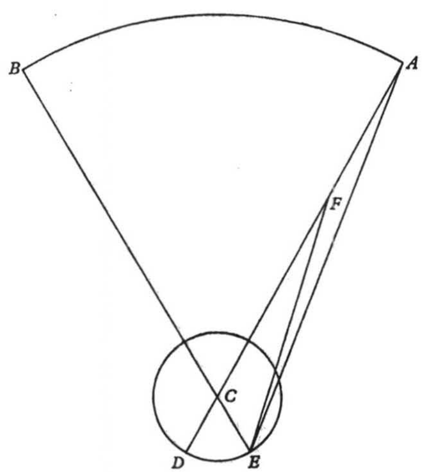
Para melhor compreensão da não uniformidade aparente do movimento do Sol, vamos agora mostrar de modo mais claro que ele se move regularmente em relação a qualquer estrela ou ponto dado da esfera das estrelas fixas, uma vez que tem a sua posição no meio do Universo e a Terra gira à volta dele como seu centro e, como dissemos [I, 5, 10], há entre o Sol e a Terra uma distância insignificante comparada com a imensidade daquela esfera.

Com efeito, seja *AB* o círculo máximo em volta do Universo no plano da eclíptica, *C* o seu centro onde se encontra o Sol. *CD* representa a distância entre o Sol e a Terra comparada com a qual a altura do Universo é imensa. Descrevamos um círculo *DE*, no mesmo plano da eclíptica em que se realiza a revolução anual do centro da Terra. Digo que em relação a qualquer ponto dado ou estrela no círculo *AB*, o Sol se moverá uniformemente. Suponhamos que o ponto dado é *A*, onde o Sol se vê da Terra, a qual está em *D*. Tracemos *ACD*. Suponhamos também que a Terra se move num arco *DE*. De *E*, o ponto que a Terra atingiu, tracemos *AE* e *BE*. Portanto, de *E* ver-se-á agora o Sol no ponto *B*. Dado que *AC* é imensa (1) comparada com *CD* ou com *CE* igual a *CD*, também *AE* será imensa comparada com *CE*. Com efeito, tomemos um ponto *F* em *AC* e tracemos *EF*. Então, dado que as duas linhas rectas que

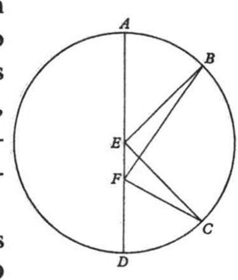
(1) Mantemos a terminologia do texto: «imensa» significa muito grande.

partem da base caem fora do triângulo *EFC*, no ponto *A*, pela proposição convexa da 21.ª proposição do I livro dos *Elementos* de Euclides, o ângulo *FAE* será menor do que o ângulo *EFC*.

Por conseguinte as linhas rectas prolongadas indefinidamente acabarão por determinar o ângulo *CAE*, tão agudo que chega a ser imperceptível, constituindo a diferença para mais entre o ângulo *BCA* e o ângulo *AEC*. Ora, visto que esta diferença é tão pequena, estes ângulos parecem iguais. As linhas *AC* e *AE* parecem, por consequência, parelelas, e o Sol parece também mover-se uniformemente em relação a qualquer ponto da esfera das estrelas fixas. Q.E.D.

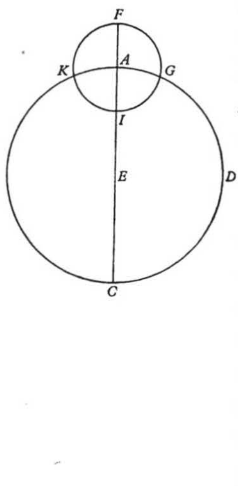


Contudo a não uniformidade [do movimento] explica-se pelo facto do movimento do centro da Terra na sua revolução anual não ocorrer precisamente à volta do centro do Sol. Isto pode representar-se de duas formas, isto é, por um círculo excêntrico, cujo centro não seja portanto o mesmo do Sol, ou por um epiciclo num círculo concêntrico, [isto é, um círculo cujo centro coincide com o do Sol e funciona como o deferente de um epiciclo]. No caso do círculo excêntrico, a demonstração faz-se do modo seguinte. Seja *ABCD* um círculo excêntrico no plano da eclíptica. O seu centro, *E*, deve estar a uma distância do centro do Sol ou do Universo que se não pode desprezar. Seja este, *F*, e o diâmetro do círculo que passa dois centros, *AEFD*. Seja em *A* o apogeu, que em latim se chama ápside superior, o ponto mais afastado do centro do Universo, e *D* o perigeu, o mais próximo do centro do Universo, ou ápside inferior. Assim, dado que a Terra, no seu círculo *ABCD*, se move uniformemente à volta do centro *E*, como já disse, o seu movimento à volta de *F* será não uniforme.

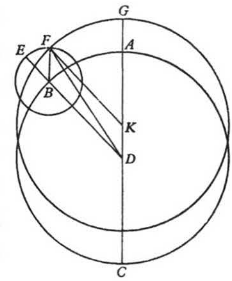


Com efeito, tomemos arcos iguais *AB* e *CD*. Tracemos as linhas rectas *BE*, *CE*, *BF*, *CF*. Os ângulos *AEB* e *CED* são iguais e correspondentes a arcos iguais de um círculo de centro *E*. Mas o ângulo observado *CFD* é maior do que o ângulo *CED*, pois um ângulo externo é maior do que o ângulo *AEB*, que é igual a *CED*. Mas o ângulo externo *AEB* é também maior do que o ângulo interno *AFB*, e ainda com mais razão o ângulo *CFD* é maior do que *AFB*. Contudo, ambos são produzidos em tempos iguais, pois os arcos *AB* e *CD* são iguais. Portanto, o movimento será uniforme à volta de *E*, mas não uniforme à volta de *F*. O mesmo se pode ver também mais simplesmente pelo facto de o arco *AB* estar mais afastado de *F* do que *CD*. Com efeito, pela 7.ª proposição do III livro dos *Elementos* de Euclides, as linhas que definem este arco *AF* e *BF*, são maiores do que *CF* e *DF*. Ora como se mostrou na Óptica as grandezas iguais que estão perto parecem maiores do que as mais afastadas. Assim, a observação feita acerca de um círculo excêntrico é evidentemente verdadeira. A demonstração seria exactamente a mesma se a Terra estivesse parada em *F*, e o Sol se movesse na circunferência *ABC*, como dizem Ptolomeu e outros.

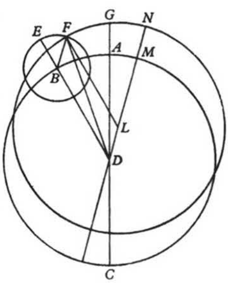
A mesma demmonstração se fará com um epiciclo num círculo concêntrico. Seja *BCD* o círculo concêntrico, *E* o seu centro e o centro do Universo, onde também está o Sol. Seja *A*, no mesmo plano, o centro do epiciclo *FG*. Passando pelos dois centros, tracemos a linha recta *CEAF* com o apogeu do epiciclo em *F* e o perigeu em *I*. Ora o movimento regular ocorre, pois, em *A*, mas a não uniformidade aparente no epiciclo *FG*. Porque, se *A* se move na direcção de *B*, isto é, para Este, equanto o centro da Terra se move do apogeu *F*, para Oeste, *E* mover-se-á mais rapidamente no perigeu, isto é, em *I* porque os dois movimentos de *A* e *I* estão na mesma direcção. No apogeu, porém, isto é, em *F*, *E* parecerá mais lento porque ele é impelido apenas pelo movimento prevalecente entre os dois movimentos contrários. Quando se encontra na posição *G* a Terra excederá o movimento uniforme, mas na posição *K*, ficará aquém dele. Em ambos os casos a diferença será o comprimento do arco *AG* ou *AK*. Por esta razão, o Sol também parecerá mover-se irregularmente.



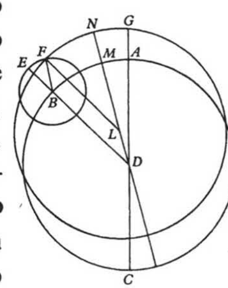
Tudo o que se faz com um epiciclo pode fazer-se igualmente com um círculo excêntrico igual ao um círculo concêntrico que o planeta descreve quando passa pelo seu epiciclo e no mesmo plano, de modo que a distância do centro do círculo excêntrico ao centro do círculo concêntrico é o comprimento do raio do epiciclo. Também isto se obtém de três maneiras. Suponha-se que o epiciclo no círculo concêntrico e o planeta no epiciclo executam revoluções iguais mas se movem em direcções opostas; então o movimento do planeta descreverá um círculo fixo excêntrico cujo apogeu e perigeu mantêm posições imutáveis. Assim, seja *ABC* um círculo concêntrico, *D* o centro do Universo e *ADC* um diâmetro. Suponhamos que, quando o epiciclo está em *A*, o planeta está no apogeu do epiciclo que é *G*, e o seu raio na linha recta *DAG*. Marquemos um arco *AB* no círculo concêntrico. Tomando *B* como centro e um raio igual a *AG*, descrevamos o epiciclo *EF* e tracemos *DB* e *EB* em linha recta. Tomemos a seguir o arco *EF* semelhante a *AB* mas em direcção oposta. Coloquemos o planeta ou a Terra em *F*. Juntemos *BF* e na linha *AD* marquemos também um segmento *DK*, igual a *BF*. Ora, dado que os ângulos *EBF* e *BDA* são iguais, *BF* e *DK* são paralelas e iguais; mas se linhas rectas estiverem ligadas por linhas iguais e paralelas, também elas são paralelas e iguais, segundo a 33.ª proposição do I livro dos *Elementos* de Euclides. E, desde que *DK* e *AG* são iguais pela adição de *AK* às duas, *GAK* será igual a *AKD* e, portanto, também igual a *KF*. Assim, o círculo descrito à volta do centro *K*, com o raio *KAG*, passará por *F*, e é de facto um círculo excêntrico, igual ao círculo concêntrico descrito pelo movimento combinado de *AB* e *EF*, portanto também fixo.



Como porém o epiciclo executa revoluções iguais com o círculo concêntrico, as ápsides do círculo excêntrico permanecerão no mesmo lugar.



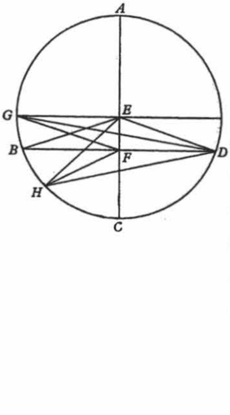
Mas se o centro do epiciclo e a circunferência fizeram revoluções desiguais, o movimento do planeta já não descreverá um círculo excêntrico fixo mas um círculo cujo centro e ápsides se movem para Oeste e Este, segundo o movimento do planeta for mais rápido ou lento que o centro do seu epiciclo. Assim, se *EBF* é maior do que o ângulo *BDA* mas o ângulo *BDM* é igual a *EBF*, pode mostrar-se igualmente que se na linha *DM* se marcar *DL* igual a *BF*, então o círculo descrito tendo *L* como centro e o raio *LMN*, igual a *AD*, passará pelo planeta em *F*. Daqui resulta claramente que o arco *NF* descrito pelo movimento composto do planeta é um arco de um círculo excêntrico cujo apogeu entretanto se moveu do ponto *G* para Oeste, segundo arco *GN*. Por outro lado, se o movimento do planeta é mais lento do que o centro do epiciclo, então o centro do círculo excêntrico mover-se-á para Oeste tal como se moveu o



centro do epiciclo. Por exemplo, se o ângulo *EBF* é menor do que o ângulo *BDM*, o resultado será evidentemente o que dissemos.

Daqui se conclui claramente que se produz sempre a mesma não uniformidade aparente, ou por um epiciclo num círculo concêntrico ou por um círculo igual ao círculo concêntrico; e não há qualquer diferença, desde que a distância entre os seus centros seja igual ao raio do epiciclo. Não é portanto fácil decidir qual dos dois existe no céu. Pela sua parte Ptolomeu pensou que o modelo do excêntrico era adequado para a compreensão da desigualdade simples, e as posições das ápsides eram fixas e não sujeitas a alterações, como no caso do Sol, de acordo com o seu pensamento [*Almagesto*, III, 4]. Mas à Lua e aos outros cinco planetas que giram com duas ou mais irregularidades, atribuiu os epiciclos excêntricos. A partir disto também se demonstra facilmente que parece haver a maior diferença entre os movimentos uniformes e aparentes, quando o planeta se encontra na posição média entre as ápsides superior e inferior, quando se adopta o caso do círculo excêntrico; mas, de acordo com o epiciclo, quando o planeta está em contacto com o deferente, [como Ptolomeu mostrou *Almagesto*, III, 3].

No caso do círculo excêntrico a prova faz-se como se expõe a seguir.



Seja *ABCD* o círculo excêntrico, tendo *E* como centro, e *AEC* o seu diâmetro que passa pelo Sol em *F*, fora do centro. Tracemos por a linha *BFD* perpendicular [ao diâmetro *AE*]. Juntemos *BE* e *ED*. Seja *A* o apogeu, *C* o perigeu e *B* e *D* as posições médias aparentes entre eles. É evidente que o ângulo externo *AEB* [do triângulo *BEF*] compreende o movimento uniforme, e o ângulo interno *EFB* o movimento aparente. A diferença entre eles é o ângulo *EBF*. Digo que nenhum ângulo maior do que qualquer dos ângulos *B* ou *D* pode ser formado da circunferência para a linha

EF. Assim, tomemos os pontos *G* e *H*, antes e depois de *B*. Juntemos *GD, GE, CF* e também *HE, HF e HD*. Ora, desde que *FG* que está mais próxima do centro, é maior do que *DF*, o ângulo *GDF* será maior do que *DGF*. Mas os ângulos *EDG* e *EGD* são iguais pois que os lados *EG* e *ED* que caem sobre a base [*DG*] são iguais. Por conseguinte, o ângulo *EDF*, igual a *EBF* é também maior do que *EGF*. De modo semelhante, *DF* é maior do que *FH* e o ângulo *FHD* é maior do que *FDH*. Mas todo o ângulo *EHD* é igual a todo o ângulo *EDH*, porque *EH* e *ED* são iguais. Assim o ângulo *EDF*, diferença entre *EDH* e *FDH*, igual a *EBF*, é maior também que o ângulo *EHF*, diferença entre *EHD* e *FHD*. Por conseguinte, nenhum ângulo maior poderá ser formado em direcção à linha *EF* do que os pontos *B* e *D*. Assim se encontra a maior diferença entre o movimento uniforme e o movimento aparente na posição média entre o apogeu e o perigeu.

A NÃO UNIFORMIDADE APARENTE DO SOL

Esta é demonstração geral que se pode aplicar não só aos fenómenos do Sol mas também à não uniformidade dos outros astros.

Agora vamos tratar das propriedades peculiares do Sol e da Terra: primeiro as que conhecemos através de Ptolomeu e outros autores mais antigos, e em segundo lugar as que os tempos e a experiência mais próxima nos ensinaram.

Ptolomeu verificou que entre o equinócio da Primavera e o solstício [do Verão] havia 94 $^{1}/_{2}$ dias e do solstício [do Verão] ao equinócio do Outono 92$^{1}/_{2}$. Por conseguinte, em proporção com o tempo do primeiro intervalo, o movimento médio e uniforme é de 93° 9′, e do segundo intervalo, 91° 11′ [*Almagesto*, III, 4]. Seja *ABCD* o círculo do ano tendo *E* como centro e assim dividido. Tomemos *AB* para o primeiro período de tempo com 93° 9′, *BC* para o segundo com 91° 11′. Seja o equinócio da Primavera também observado de *A*, o solstíco de Verão, de *B*, o equinócio do Outono de *C*, e o ponto restante, o solstício do Inverno, de *D*. Juntemos *AC* e *BD* que se intersectam entre si em ângulos rectos em *F*, onde colocamos o Sol. Ora, visto que o arco *ABC* é maior do que um semicírculo e *AB* é igualmente maior do que *BC*, Ptolomeu inferiu disto que o centro do círculo, *E*, está entre as linhas *BF* e *FA* assim como o apogeu entre o equinócio da Primavera e o solstício do Verão. Agora, pelo centro *E* descrevamos *IEG* paralelo a *AFC*, que intersectará *BFD* em *L*, e *HEK* paralelo a *BFD*, que intersectará *AF* em *M*. Assim se formará um paralelogramo rectangular *LEMF*, e a sua diagonal *FE* prolongada de modo a formar a linha recta *FEM*, indicará a distância máxima entre a Terra e o Sol, e a posição do apogeu em *N*.

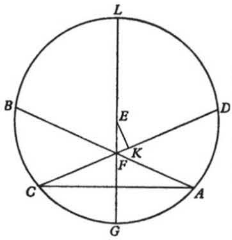
Então, uma vez que *ABC* é um arco de 184° 20′ [= 93° 9′ + 91° 11′] metade dele, *AH*, tem 92° 10′. Se ele for subtraído de *GB* obter-se-á o resto *HB* que mede 59 minutos. Depois, subtraindo os graus do quadrante do círculo *HG*, de *AH*, resulta *AG*, que mede 2° 10′ [= 93° 9′ − 92° 10′]. Ora metade da corda correspondente ao duplo [do arco], *AG* vale 378 unidades, no sistema de unidades em que o raio tem 10 000 unidades, e é igual a *LF*. Além disto, metade da corda correspondente ao duplo [do arco] *BH* tem 172 unidades também. Sendo conhecidos os dois lados do triângulo *ELF*, a hipotenusa *EF* terá 415 unidades, cerca de 1/24 do raio *NE*. Ora *EF* está para *EL* assim como o raio *NE* está para metade da corda correspondente ao duplo [do arco] *NH*. Por conseguinte, verifica-se que *NH* tem 24 $^1/_2$°, assim como o ângulo *NEH*, ao qual é igual *LFE*, ângulo do movimento aparente. Assim, esta era a distância entre a ápside superior e o solstício do Verão que ele precedia, antes de Ptolomeu.

Mas *IK* é um quadrante de um círculo. Se dele subtrairmos *IC e DK*, iguais a *AG* [= 2° 10′] e *HB* [= 59′] o resto é *CD*, que mede 86° 51′ [= 90° − 3° 9′] e a diferença para *CDA* [= 175° 40′ = 360° − 184° 20′] é *DA* com 88° 49′ [= 175° 40′ − 86° 51′]. Ora 86° 51′ correspondem a 88 $^1/_8$ dias com 88° 49′. Neste tempo, em relação ao movimento regular da Terra, o Sol parecia atravessar do equinócio do Outono para o solstício do Inverno e na parte restante do ano do solstício do Inverno para o equinócio da Primavera. Na verdade, Ptolomeu [*Almagesto,* III, 4] refere ter verificado que isto era exactamente como Hiparco referira antes.

Consequentemente supôs que no tempo restante a ápside superior permaneceria perpetuamente 23 $^1/_2$° adiante do solstício do Verão e a excentricidade, como foi dito, 1/24 do raio. Verificou-se que cada um destes valores mudou agora em quantidade perceptível. Albaténio referiu que desde o equinócio da Primavera ao solstício do Verão iam 93 dias, 35 minutos de um dia e até o equinócio do Outono 186 dias e 37 minutos de um dia.

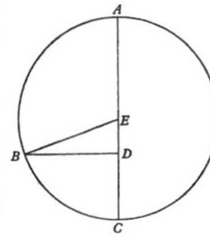
Disto concluiu, seguindo o método de Ptolomeu, que a excentricidade não era superior a 347 unidades, considerando o raio com 10 000 unidades. Azarquiel, espanhol, está de acordo com ele no cálculo da excentricidade, mas notou que o apogeu estava 12° 10′ antes do solstício, embora a Albaténio parecessem 7° 43′ antes do mesmo solstício. Destas declarações concluiu-se que existe ainda outra não uniformidade do movimento do centro da Terra, que também é confirmada na nossa época pela observação. Com efeito, nos 10 anos ou mais desde que dedicámos a nossa atenção a investigar este ponto, e particularmente no ano 1515 da era cristã, verificámos que o tempo total do equinócio da Primavera ao do Outono é 186 dias e 5 $^1/_2$ sexagésimos do dia. Para evitar enganos no determinar dos solstícios que entretanto haviam sido cometidos, segundo alguns, por aqueles que nos antecederam, adoptámos nesta investigação outras posições do Sol para além dos equinócios que não são nada difíceis de observar, tal qual acontece com os pontos médios dos signos, Touro, Leão, Escorpião e Aquário.

Verificámos, pois, que do equinócio do Outono ao ponto médio do Escorpião iam 45 dias e 16 minutos de um dia, e ao equinócio da Primavera 178 dias e 53 minutos de um dia. No primeiro intervalo, o movimento uniforme é 44° 37′ e no segundo 176° 19′. Partindo desta base, reproduzamos o círculo *ABCD*. Seja *A* o ponto em que o Sol apareceu no equinócio da Primavera, *B* o ponto do qual o



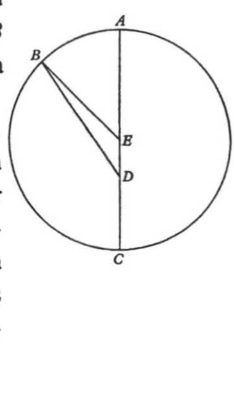
equinócio do Outuno era observado e *C* o ponto médio de Escorpião. Juntemos *AB* e *CD* que se intersectarão em *F*, o centro do Sol. Tracemos a corda *AC*. Ora o arco *CB* é conhecido, pois mede 44° 37′. Consequentemente, o ângulo *BAC* é dado no sistema em que 360° são iguais a 2 ângulos rectos. Também *BFC*, o ângulo do movimento aparente, tem 45°, num sistema em que 360° equivalem a 4 ângulos rectos. Se considerarmos um sitema em que 360° correspondem a 2 ângulos rectos, então *BFC* mede 90°. Daqui resulta que o ângulo *ACD*, a diferença entre *BFC* e *BAC* que define o arco *AD*, mede 45° 23′. Mas todo o segmento *ACB* mede 176° 19′. Depois de subtrair *BC*, o resto *AC* tem 131° 42′ que juntamente com *AD* dá um total de 177° 5′ para o arco *CAD*. Ora, dado que os dois segmentos *ACB* e *CAD* são menores do que um semicírculo, é claro que o centro se encontra no segmento restante. Seja esse centro *E*. Por *F* tracemos o diâmetro *LEFG*. Seja *L* o apogeu, e *G* o perigeu. Tracemos uma perpendicular de *EK* para *CFD*. Dado que os arcos são dados, também as suas cordas se podem achar recorrendo às Tabelas: *AC* igual a 182 494 unidades, e *CFD* igual a 199 934, no sistema em que o diâmetro é igual a 200 000. Como os ângulos do triângulo *ACF* são dados, também segundo o teorema I sobre os triângulos planos [I, 13] é dada a razão dos lados: *CF* igual a 97 967 unidades, no sistema de unidades em que *AC* tem 182 494. Por conseguinte *FD* excede *CFD* em 2 000 unidades, sendo o excesso *FK*. Também o segmento *CAD* mede 2° 54′ menos do que um semicírculo, de modo que metade da corda correspondente, igual a *EK*, tem 2 534 unidades. De acordo com isto, no triângulo *EFK*, os lados *FK* e *KE* que definem um ângulo recto, são dados. Por isso, dos lados e ângulos dados, *EF* terá quase 323 unidades no sistema de unidades em que *EL* tem 10 000, e o ângulo *EFK* 51 $^2/_3$°, no sistema em que 360° equivalem a 4 ângulos rectos. Ora todo o ângulo *AFL* mede 96 $^2/_3$° e o ângulo *BFL*, a diferença entre 180° e *AFL*, 83 $^1/_3$°, enquanto que, se *EL* tem sessenta unidades, *EF* terá aproximadamente 1 unidade e 56 minutos da unidade. Esta era a distância entre o Sol e o centro do círculo que se transformou agora simplesmente em 1/31 enquanto a Ptolomeu parecia 1/24. Igualmente o apogeu que precedia o solstício de Verão de 24$^1/_2$°, segue-o agora de 6 $^2/_3$°.

EXPLICAÇÃO DA PRIMEIRA DESIGUALDADE ANUAL DO SOL JUNTAMENTE COM SUAS VARIAÇÕES PARTICULARES



Visto que há diversas variações na desigualdade do Sol, julgamos que a variação anual, mais conhecida do que as outras, deve ser primeiramente exposta.

Reproduzamos então o círculo *ABC* tendo *E* como centro e *AEC* como diâmetro. Seja *A* o apogeu, *C* o perigeu, e o Sol em *D*. Ora, demonstrámos [III, 15] que a diferença máxima entre o movimento uniforme e o aparente está no ponto médio aparente, entre as duas ápsides. Assim, tracemos a perpendicular *BD* a *AEC* de modo a intersectar a circunferência em *B*. Unamos *B* e *E*. Visto que são dados dois lados no triângulo rectângulo *BDE*, isto é, *BE*, o raio do círculo e *DE*, a distância entre o Sol e o centro, os seus ângulos também são dados, entre os quais, *DBE*, a diferença entre *BEA*, o ângulo do movimento uniforme, e o ângulo recto *EDB*, que é o ângulo do movimento aparente. De acordo com o acréscimo ou decréscimo havido em *DE*, toda a forma do triângulo mudou. Assim, antes de Ptolomeu, o ângulo *B* media 2° 23′; no tempo de Albaténio e Azarquiel 1° 59′, mas agora mede 1° 51′. Para Ptolomeu [*Almagesto*, III, 4] o arco *AB* definido pelo ângulo *AEB* era de 92° 23′ e *BC* 87° 37′. Para Albaténio *AB* media 91° 59′, *BC* 88° 1′, e agora *AB* mede 91° 51′ e *BC* 88° 9′. Daqui resulta que as variações restantes são também claras. Com efeito, tomemos um outro arco, *AB*, como na figura anterior e seja dado o ângulo *AEB*, o ângulo suplementar *BED* e os dois lados *BE* e *ED*. Segundo a teoria dos triângulos planos, o ângulo *EBD* da prostaférese e a diferença entre o movimento uniforme e aparente serão dados. Estas diferenças também devem mudar para corresponder à variação do lado *ED*, como já se disse.

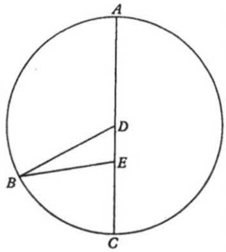


INVESTIGAÇÃO DO MOVIMENTO REGULAR EM LONGITUDE

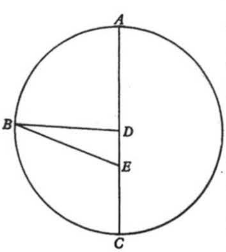
Fizemos esta exposição acerca da desigualdade do movimento anual do Sol, baseados não na variação simples, como se esclareceu, mas numa variação que o longo decorrer do tempo mostrou nela interferir. Adiante [III, 20] vamos distingui-las uma da outra. Entretanto, o movimento médio regular do centro da Terra será representado com tanto maior rigor numérico quanto melhor se distinguir das variações não uniformes e quanto maior for o período pelo qual se estenda. Esta demonstração far-se-á assim. Tomámos o equinócio do Outono observado por Hiparco, em Alexandria, no terceiro período de Calipo e no seu 32.º ano que, como se disse atrás [III, 13], foi o 177º depois da morte de Alexandre. Foi isto depois ao 3.º dia intercalar, à meia-noite que precedeu o 4.º dia intercalar.

Ora, atendendo a que Alexandria está a cerca de uma hora a Este de Cracóvia, em longitude, isto passou-se quase uma hora antes da meia-noite. Por conseguinte, segundo o cálculo apresentado atrás, a posição do equinócio do Outono, na esfera das estrelas fixas, era 176º 10′ da cabeça de Áries e esta era a posição aparente do Sol. A sua distância da ápside superior era 114 $^1/_2$º [= 24º 30′ + 90º].

Para representar esta situação descreva-se o círculo *ABC* pelo centro da Terra, tendo como centro *D* e seja *ADC* o seu diâmetro. Seja *E* a posição em que o Sol é observado, *A* o apogeu, e *C* o perigeu. Seja agora *B* a posição da qual o Sol é observado no equinócio do Outono. Juntemos as linhas rectas *DB* e *BE*. Ora o ângulo *DEB*, a distância aparente entre o Sol e o seu apogeu, é 144 $^1/_2$°. Nesse tempo *DE* tinha 415 unidades e *BD* = 10 000. Além disso o triângulo *BDE*, pelo 4.° teorema sobre os triângulos planos [II, E], é um daqueles cujos ângulos são dados, medindo o ângulo *DBE*, que é a diferença entre *BED* e *BDA*, 2° 10′.



Mas como o ângulo *BED* mede 114° 30′, *BDA* terá 116° 40′ [= 114° 30′ + 2° 10′] e por isso a posição média ou regular do Sol é 178° 20′ [= 176° 10′ + 2° 10′] na esfera das estrelas fixas a partir da cabeça de Áries. Comparámos com isto o equinócio do Outono observado por nós em Frombork, no mesmo meridiano de Cracóvia, no ano 1515 da era de Cristo, no dia 14 de Setembro, no ano egípcio de 1840 depois da morte de Alexandre, a seis do mês de Faopi, o segundo mês do calendário egípcio, meia hora depois do nascer do Sol [III, 13]. Nesta altura, a posição do equinócio do segundo o cálculo e observação, era 152° 45′ na esfera das estrelas fixas, a 83° 20′ da ápside superior, de acordo com a análise anterior [III, 16]. Definamos o ângulo *BEA* com 83° 20′, no sistema em que 180° são dois ângulos rectos. Dois lados do triângulo são dados, *BD* com 10 000 unidades, e *DE* com 323. Pelo 4.° teorema sobre os triângulos planos [II, E], o ângulo *DBE* mede cerca de 1° 50′. Se o triângulo *BDE* está inscrito num círculo, o ângulo *BDE* define na circunferência um arco de 166° 40′, no sistema em que 360° equivalem a dois ângulos rectos, e a corda *BD* terá 19 864 unidades quando o diâmetro tem 20 000. A partir da razão entre *BD* e *DE*, que é dada, calcular-se-á em cerca de 624 unidades o comprimento de *DE*, subentendida pelo ângulo *DBE* que mede 3° 40′ e está inscrito na circunferência, mas mede 1° 50′[= 3° 40′:2] como ângulo ao centro. Esta era a prostaférese e a diferença entre os movimentos uniforme e aparente. Juntando-o ao ângulo *BED* igual a 83° 20′, teremos o ângulo *BDA* e o arco *AB* igual a 85° 10′ como distância entre o movimento regular e o apogeu. Assim a posição



média do Sol na esfera das estrelas fixas é 154° 35′ [= 152° 45′ + 1° 50′]. Há no intervalo entre as duas observações 1662 anos egípcios, 37 dias, 18 minutos de um dia e 45 segundos de um dia. O movimento médio regular além das revoluções completas, 1660, é 336° e cerca de 15′ que estão de acordo com o número que colocámos na Tabela do Movimento Uniforme [a seguir a III, 14].

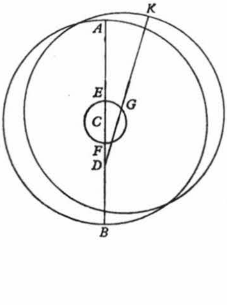
AS POSIÇÕES E ÉPOCAS A USAR COMO BASE PARA O MOVIMENTO REGULAR DO SOL

O tempo decorrido desde a morte de Alexandre Magno até as observações de Hiparco, é 176 anos, 362 dias, 27 $^1/_2$ minutos de um dia. Neste período o movimento médio é calculado em 312° 43′. Subtrai-se este número à soma de 178° 20′ referente à observação de Hiparco [III, 18] acrescentada com os 360° de um círculo. O resto são 225° 37′ e será a posição do meridiano de Cracóvia e Frombork, local da minha observação, ao meio-dia do 1.° do mês de Tot, o primeiro mês egípcio para a época da era que começa com a morte de Alexandre Magno. Desde então até a época da era Romana de Júlio César, em 278 anos, 118 $^1/_2$ dias, o movimento médio, depois de se eliminarem as revoluções completas, é 46° 27′. Somando este número com o número da posição da época de Alexandre dá o total de 272° 4′ [225° 37′ + 46° 27′] para a posição da era de César, à meia-noite do 1.° de Janeiro em que era costume Roma iniciar a contagem dos anos e dos dias. Finalmente 45 anos e 12 dias depois do início da era de César ou 323 anos e 130 $^1/_2$ dias depois da morte de Alexandre Magno 278° 118 $^1/_2{}^d$ + 45^a 12^d, vem a posição da era cristã, 272° 31′, dado que Cristo nasceu no 3.° ano da 194.ª Olimpíada, perfazendo desde o início da 1.ª Olimpíada 775 anos e 12 $^1/_2$ dias até a meia-noite anterior ao 1.° de Janeiro. Isto coloca igualmente a posição da 1.ª Olimpíada em 96° 16′, ao meio-dia do dia 1 do mês de Hecatombeu, sendo presentemente o dia 1 de Julho segundo o calendário romano, o equivalente a esse dia. Assim as épocas para o movimento simples do Sol estão referidas à esfera das estrelas fixas. Além disto, as posições do movimento composto obtêm-se aplicando a precessão dos equinócios. Em relação às posições simples, as posições compostas são para as Olimpíadas, 90° 59′ [= 96° 16′ − 5° 15′; III, 11] para Alexandre 226° 38′ [= 225° 37′ + 1° 21′], para César 276° 59′ [= 272° 4′ + 4° 55′] e para Cristo 278° 2′ [= 272° 31′ + 5° 32′]. Todas estas posições são referidas ao meridiano de Cracóvia.

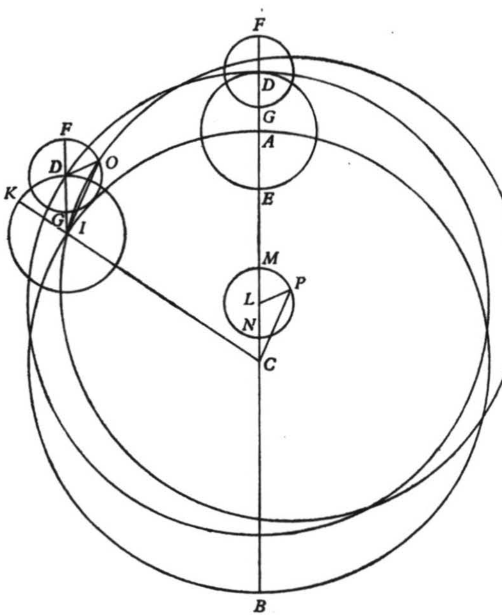
A SEGUNDA VARIAÇÃO DUPLA QUE AFECTA O SOL POR CAUSA DO DESVIO DAS ÁPSIDES

Levanta-se agora uma dificuldade maior com o desvio da ápside solar, pois que, embora Ptolomeu pensasse que ela era fixa, alguns julgavam que seguia o movimento da oitava esfera, de acordo com a sua convicção de que as estrelas fixas também se moviam. Azarquiel sustentava a opinião de que este movimento também era não uniforme, julgando que manifestava até um certo retrocesso. Isto deduzia ele do facto de que embora Albaténio, como se disse [III, 16), tivesse encontrado o apogeu 7° 43′ antes do solstício; anteriormente, nos 740 anos depois de Ptolomeu, avançara quase 17° [≅ 24° 30′ − 7° 43′], parecia contudo que em 200 anos menos 7, tinha retrocedido cerca de 4 $^1/_2$° [≅ 12° 10′ − 7° 43′]. Por este motivo, [Azarquiel] pensou que havia outro movimento do centro da órbita anual no círculo pequeno, no qual o apogeu se deslocava para trás e para a frente, enquanto a distância entre o centro daquela órbita e o centro do Universo variava. Era uma ideia engenhosa, sem dúvida, mas não foi aceite, pois que, fazendo uma comparação geral, não está de acordo com as outras. Assim, se considerarmos as sucessivas mudanças desse movimento, verifica-se que ele se manteve durante tempo, antes de Ptolomeu, tendo avançado 17° em 640 anos, mais ou menos, retrocedendo depois, em 200 anos, 4° ou 5°. No decorrer do tempo restante até o presente, avançou sem qualquer movimento de retrocesso perceptível e sem quaisquer pontos estacionários, que necessariamente teriam de aparecer em ambos os limites, quando os movimentos invertem a sua direcção. Contudo, este facto não pode compreender-se de modo nenhum no movimento uniforme e circular. Por conseguinte, muitos crêem que algum erro houve em tais observações. Os dois matemáticos são realmente iguais no rigor e na diligência, de sorte que não se sabe qual seguir. Por minha parte confesso que em nenhum outro assunto há maior dificuldade do que em localizar o apogeu do Sol, pois temos de deduzir quantidades enormes de quantidades mínimas, quase imperceptíveis.

Com efeito, na proximidade do perigeu e apogeu um grau inteiro faz uma diferença apenas de dois minutos, mais ou menos, na prostaférese, mas na proximidade dos pontos médios, entre as ápsides, há uma variação de 5° ou 6° para um minuto. Assim um pequeno erro pode ser enormemente ampliado. De acordo com isto, ao colocar o apogeu mesmo a 6 $^{2}/_{3}$° de Câncer [III, 16] não ficaríamos contentes com a observação do tempo feita por meio de instrumentos do tipo do astrolábio, se as nossas verificações não fossem também confirmadas por eclipses do Sol e da Lua. Realmente, se há qualquer erro oculto nos instrumentos, os eclipses revelá-lo-ão indiscutivelmente. Assim, com forte probabilidade, podemos deduzir da estrutura geral do movimento, que é directo ainda não uniforme. Com efeito, a seguir ao [intervalo] estacionário mencionado, de Hiparco até Ptolomeu, o apogeu pareceu mostrar um avanço contínuo, sucessivo e acelerado até o nosso tempo, exceptuando o erro que, segundo o que se julga, terá ocorrido entre Albaténio e Azarquiel, pois que quanto ao resto parece estar correcto. De igual modo a prostaférese do Sol ainda continua do mesmo modo a diminuir e parece seguir um modelo circular igual e desfazer as duas desigualdades na primeira anomalia simples ou numa semelhante [irregularidade].



Para clarificar este ponto, seja *AB* um círculo no plano da eclíptica, tendo *C* como centro e *ACB* como diâmetro. Neste círculo seja *D* o globo do Sol como se fosse o centro do Universo. Com o centro em *C* descrevamos outro círculo pequeno que não contenha o Sol. Suponhamos que o centro da revolução anual do centro da Terra se move neste pequeno círculo com um avanço bastante lento. Dado que o círculo pequeno *EF* juntamente com a linha *AD* se movem para Este, mas o centro da revolução anual avança para Oeste no círculo *EF*, ambos com um movimento muito lento, o centro da órbita anual encontrar-se-á algumas vezes à máxima distância que é *DE* e algumas vezes na mínima [distância] que é *DF*. Na primeira terá um movimento mais lento, na segunda um movimento mais rápido, e no meio



dos arcos do círculo pequeno cresce e diminui a distância entre os centros com o decorrer do tempo. A ápside superior alternadamente ultrapassará ou seguirá aquela ápside ou apogeu que está na linha *ACD* e serve de apogeu médio.

Assim, se tomarmos o arco *EG* e traçarmos com o centro em *G*, um círculo igual a *AB*, a ápside superior ficará então na linha *DGK* e a distância *DG* será menor do que *DE* segundo a 8.ª proposição do III livro de Euclides. Deste modo explicamos os factos referidos servindo-nos de um círculo excêntrico de um excêntrico e também através do epiciclo de um epiciclo, como se verá a seguir. Seja *AB* um círculo concêntrico com o Universo e o Sol, e *ACB* um diâmetro onde está a ápside superior. Com centro em *A*, descrevamos um epiciclo *DE* e depois, com centro em *D*, um epiciclo pequeno *FG*, no qual gira a Terra. Tomemos todas estas construções no mesmo plano, o plano da eclíptica. Seja o movimento do primeiro epiciclo na direcção Este em cerca de um ano, e o do segundo, isto é *D*, igualmente num ano, mas para Oeste. Sejam as revoluções dos dois epiciclos iguais em relação à linha *AC*. Além disso suponha-se que o centro da Terra se mova para Oeste a partir de *F*, um pouco mais rapidamente do que *D*. Daqui com evidência resulta que, estando a Terra em *F*, fará o apogeu solar um máximo e um mínimo quando está em *G*. Contudo no meio dos arcos do epiciclo *FG*, fará com que o apogeu siga ou preceda o apogeu médio, se acelere ou retarde, seja maior ou menor e o movimento seja variável, como se demonstrou no caso do epiciclo e do círculo excêntrico.

Marque-se também o arco *AI*. Reconstruamos o epiciclo tendo *I* como centro. Juntando *CI* prolonguemo-lo na linha recta *CIK*. O ângulo *KID* será igual a *ACI* por causa da igualdade das revoluções. Ora, como mostrámos atrás [III, 15], o ponto *D* descreverá à volta do centro *L*, um círculo excêntrico igual ao círculo concêntrico *AB*, com a excentricidade *CL* igual a *DI*.

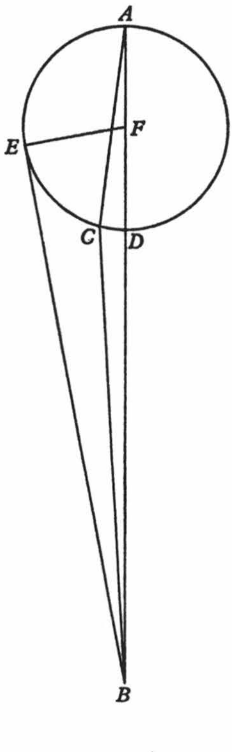
F descreverá igualmente o seu próprio círculo excêntrico com a excentricidae de *CLM* igual a *IDF*, e do mesmo modo *G* com a excentricidade *IG* igual a *CN*. Entretanto, se o centro da Terra já tiver percorrido um arco *FO* do segundo epiciclo, que é o seu, em qualquer direcção, *O* não descreverá agora um círculo excêntrico cujo centro caia na linha *AC* mas numa linha paralela a *DO*, por exemplo *LP*. Mas se *OI* e *CP* se unirem também, serão iguais entre si, mas menores do que *IF* e *CM*. O ângulo *DIO* será igual ao ângulo *LCP* pela 8.ª proposição do I livro de Euclides. Assim ver-se-á o apogeu do Sol preceder *A* na linha *CP*. Por isto é também evidente que um epiciclo excêntrico produz o mesmo resultado. Com efeito, suponhamos que no círculo excêntrico previamente considerado, descrito pelo epiciclo pequeno, tendo *L* como centro. Suponha-se que o centro da Terra gira no arco *FO* nas condições já expostas, isto é, um pouco para além da revolução anual. Assim, descreverá um segundo círculo, excêntrico em relação ao primeiro, tendo *P* como centro, e tudo resultará igual.

Uma vez que tantos métodos coincidem em dar os mesmos resultados, não me atrevo facilmente a dizer qual deles é real. Apenas posso dizer que um deles deve ser adoptado tendo em conta que coincidem perpetuamente nos resultados do cálculo e nos fenómenos observados.

MEDIDA DA VARIAÇÃO DA SEGUNDA DESIGUALDADE DO SOL

Ora, já vimos [III 20] que a segunda desigualdade segue a primeira anomalia simples da obliquidade da eclíptica ou algo de muito semelhante. Assim obteremos as suas variações com precisão se não se cometeu qualquer erro nas observações feitas no passado. Com efeito, sabemos que a anomalia simples no ano 1515 da era cristã, segundo o cálculo do valor observado, era de 165° 39′ aproximadamente e o seu ponto de partida, calculado em sentido contrário, cerca de 64 anos antes do nascimento de Cristo. Daí até ao nosso tempo há um total de 1580 anos. Ora, nós verificámos que a maior excentricidade no ponto de partida eram 417 unidades, tomando o raio com 10 000. Como se demonstrou é de 323 unidades no nosso tempo.

Seja, portanto, *AB* uma linha recta na qual *B* é o centro do Sol e do Universo. Seja a excentricidade máxima *AB* e a mínima *BD*. Descrevendo um pequeno círculo com o diâmetro *AD*, tomemos um arco dele em proporção à primeira anomalia simples, que é 165° 39′. Sabendo-se que *AB* tem 417 unidades, como se verificou ser no ponto de partida da anomalia simples, isto é, em *A*, *BC* tem agora 323 unidades. Assim, no triângulo *ABC* os lados *AB* e *BC* serão dados assim como um ângulo, *CAD*, visto que o arco *CD* é o suplemento de *AD* e este tem 14° 21′. Ora, de acordo com os teoremas sobre triângulos planos, também será dado o lado restante *AC* e o ângulo *ABC*, que é a diferença entre os movimentos médio e variável do apogeu. Dado que *AC* subtende um arco dado, igualmente serão dados *AD* e o diâmetro do círculo *ACD*. Sendo assim, do ângulo *CAD* de 14° 21′, verificamos que *CB* terá 2486 unidades, tomando o diâmetro do círculo no qual está inscrito o triângulo, como tendo 10 000 unidades. Também pela razão entre BC e AB se verifica que AB tem 3 225 unidades e corresponde ao ângulo ACB que mede 341° 26′. Por isto, no sistema em que 360° equivalem a dois ângulos rectos, o ângulo restante CBD mede 4° 13′ [= 360° − (341° 26′ + 14° 21′ = = 355° 47′)] ao qual corresponde AC com 735 unidades. Ora verificou-se que num sistema em que AB tem 417 unidades, AC tem cerca de 95, e porque é a corda correspondente a um arco dado, terá em relação a AD a mesma razão que o diâmetro. Assim AD tem 96 unidades num sistema em que ABD tem 417 e a parte restante, DB tem 321 [= $ADB - AD$ = 417 − 96], a mínima distância da excentricidade.



Ora verificou-se que o ângulo CBD mede 4° 13′ na circunferência, mas 2° 6½′ ao centro, e esta é a prostaférese a ser subtraída ao movimento uniforme de AB à volta do centro B.

Tracemos agora uma tangente, BE, ao círculo no ponto E. Tomando F como centro, juntemos EF. Dado que no triângulo rectângulo BEF o lado EF tem 48 unidades, como se sabe [= ½ 96 = diâmetro AD], e BDF tem 369 [RD = 48 + 321 = DB], tomando FDB como raio com 10 000, EF terá 1 300 unidades, metade da corda correspondente ao dobro do ângulo EBF, e no sistema em que 360° equivale a 4 ângulos rectos, mede 7° 28′ que é a prostaférese maxima entre o movimento uniforme F e o movimento aparente E. A partir disto podem determinar-se as outras diferenças para casos particulares. Por exemplo, se tomarmos o ângulo AFE igual a 6.°, teremos um triângulo cujos lados EF e FB são dados, juntamente com o ângulo EFB cujo prostaférese aparecerá com 41′. Mas se o ângulo AFE mede 12°, verificaremos que a prostaférese é igual a 1° 23′. Se medir 18° então será 2° 3′ e assim por diante, do mesmo modo para o resto, como se disse acerca dos prostaféreses anuais [III, 17].

COMO SE EXPLICAM OS MOVIMENTOS UNIFORME E NÃO UNIFORME DO APOGEU DO SOL

Sabido que o tempo no qual a excentricidade máxima coincidiu com o ponto de partida da primeira anomalia simples foi no ano terceiro da 178.ª Olimpíada ou no ano 259 da era de Alexandre Magno, segundo o cômputo egípcio [64 A.C.; III, 21], as posições verdadeiras e médias do apogeu estiveram simultaneamente em 5 $^1/_2$° de Gémeos, isto é, a 65 $^1/_2$° do equinócio da Primavera. A verdadeira precessão do equinócio, que também coincidiu com a sua precessão média, foi nesse tempo 4° 38′. Subtraindo isto de 65 $^1/_2$° vemos que o resto, 60° 52′, contado a partir da cabeça de Áries, é a posição do apogeu na esfera das estrelas fixas. Também no segundo ano da 573.ª Olimpíada ou no ano 1515 da era cristã se notou que a posição do apogeu se situava em 6 $^2/_3$°, em Câncer. Dado porém que a precessão do equinócio da Primavera calculada era 27 $^1/_4$°, se a subtrairmos de 96 $^2/_3$, o resto é 69° 25′. Mas demonstrou-se que, assim como a primeira anomalia nesse tempo era 165° 39′, a prostaférese era 2° 7′ [≅ 2° 6$^1/_2$′; III, 21], igual ao avanço que a posição verdadeira tinha sobre a média. Por conseguinte, é claro que a posição média do apogeu do Sol era 71° 32′. Ora nos 1580 anos egípcios que mediaram, o movimento médio e regular do apogeu foi 10° 41′ [= 71° 32′ − 60° 52′]. Dividindo isto pelo número de anos, verificamos que o total anual é 24″20‴14⁗.

A CORRECÇÃO DA ANOMALIA DO SOL E A DETERMINAÇÃO PRELIMINAR DAS SUAS POSIÇÕES

Se subtrairmos esta quantidade do movimento anual simples, que era 359° 44′49″7‴4⁗ [III, 14], o movimento anual uniforme da anomalia, será o resto 359° 44′24″46‴53⁗. Depois, dividindo por 365, vê-se que a parte que cabe a cada dia é 59′8″7‴22⁗, de acordo com o que se marcou nas Tabelas [em seguida a III, 14]. A partir daqui podemos também calcular a posição das épocas referidas começando pela 1.ª Olimpíada. Com efeito, demonstrou-se que no dia 14 de Setembro do segundo ano da 573.ª Olimpíada, meia hora depois do nascer do Sol, o seu apogeu médio era 71° 37′. Daqui resulta que a distância do Sol era 83° 3′ [= 71° 32′ + + 83° 3′ = 154° 35′; III, 18]. Desde a primeira Olimpíada houve 2290 anos egípcios, 281 dias, 46 minutos de um dia. Neste intervalo o movimento de anomalia, descontando os círculos completos, foi 42° 29′. Subtraindo isto de 83° 3′, ficam 40° 14′ como posição da anomalia na primeira Olimpíada. Pelo mesmo método anterior a posição para a era de Alexandre é 166° 31′, para a de César 211° 4′ e para a de Cristo 211° 14′.

APRESENTAÇÃO NUMA TABELA, DAS VARIAÇÕES NOS MOVIMENTOS UNIFORME E APARENTE DO SOL

Para tornar a demonstração das diferenças entre os movimentos uniforme e aparente do Sol mais fáceis de utilizar, apresentaremos também uma Tabela, com 60 linhas e seis fileiras ou colunas. As duas primeiras colunas conterão os valores [dos graus da anomalia anual] em ambos os semicírculos, isto é, aquele em que os valores crescem [de 0° a 180°], e aquele em que decrescem [de 360° a 180°], ordenados na escala de 3 graus, como fizemos atrás para [as prostaféreses dos] movimentos do equinócio. Na terceira coluna escrever-se-ão os graus [e minutos] das variações no movimento do apogeu solar ou na anomalia. Esta diferença eleva-se a um máximo de 7 $^1/_2$° em relação a cada escala de 3°. A quarta coluna será destinada aos minutos das partes proporcionais cujo máximo é 60. Estes são avaliados de acordo com o aumento [na sexta coluna] das prostaféreses maiores da anomalia anual. Com efeito o seu aumento máximo é 32′ cuja sexagésima parte será 32″. Por conseguinte, de acordo com o valor do aumento que acharemos a partir da excentricidade pelo método atrás descrito [II, 21], colocaremos o número de sexagésimas ao lado de cada uma das colunas de 3°.

Na quinta coluna ficarão a anual e primeira variação das prostaféreses particulares. Na sexta coluna estarão os aumentos das prostaféreses que ocorrem na excentricidade máxima. Eis a Tabela.

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DO SOL

Números Comuns		Prostaférese do Centro		Minutos Proporc.	Prostaférese da Órbita		Excesso
Gr.	Gr.	Gr.	Min.		Gr.	Min.	Min.
3	357	0	21	60	0	6	1
6	354	0	41	60	0	11	3
9	351	1	2	60	0	17	4
12	348	1	23	60	0	22	6
15	345	1	44	60	0	27	7
18	342	2	5	59	0	33	9
21	339	2	25	59	0	38	11
24	336	2	46	59	0	43	13
27	333	3	5	58	0	48	14
30	330	3	24	57	0	53	16
33	327	3	43	57	0	58	17
36	324	4	2	56	1	3	18
39	321	4	20	55	1	7	20
42	318	4	37	54	1	12	21
45	315	4	53	53	1	16	22
48	312	5	8	51	1	20	23
51	309	5	23	50	1	24	24
54	306	5	36	49	1	28	25
57	303	5	50	47	1	31	27
60	300	6	3	46	1	34	28
63	297	6	15	44	1	37	29
66	294	6	27	42	1	39	29
69	291	6	37	41	1	42	30
72	288	6	46	40	1	44	30
75	285	6	53	39	1	46	30
78	282	7	1	38	1	48	31
81	279	7	8	36	1	49	31
84	276	7	14	35	1	49	31
87	273	7	20	33	1	50	31
90	270	7	25	32	1	50	32

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DO SOL

Números Comuns		Prostaférese do Centro		Minutos Proporc.	Prostaférese da Órbita		Excesso
Gr.	Gr.	Gr.	Min.		Gr.	Min.	Min.
93	267	7	28	30	1	50	32
96	264	7	28	29	1	50	33
99	261	7	28	27	1	50	32
102	258	7	27	26	1	49	32
105	255	7	25	24	1	48	31
108	252	7	22	23	1	47	31
111	249	7	17	21	1	45	31
114	246	7	10	20	1	43	30
117	243	7	2	18	1	40	30
120	240	6	52	16	1	38	29
123	237	6	42	15	1	35	28
126	234	6	32	14	1	32	27
129	231	6	17	12	1	29	25
132	228	6	5	11	1	25	24
135	225	5	45	10	1	21	23
138	222	5	30	9	1	17	22
141	219	5	13	7	1	12	21
144	216	4	54	6	1	7	20
147	213	4	32	5	1	3	18
150	210	4	12	4	0	58	17
153	207	3	48	3	0	53	14
156	204	3	25	3	0	47	13
159	201	3	2	2	0	42	12
162	198	2	39	1	0	36	10
165	195	2	13	1	0	30	9
168	192	1	48	1	0	24	7
171	189	1	21	0	0	18	5
174	186	0	53	0	0	12	4
177	183	0	27	0	0	6	2
180	180	0	0	0	0	0	0

CÁLCULO DA POSIÇÃO APARENTE DO SOL

Penso, portanto, que o método de calcular a posição aparente do Sol em qualquer tempo dado está suficientemente esclarecido.

Procuremos então para esse tempo a verdadeira posição do equinócio da Primavera ou a sua precessão juntamente com a primeira anomalia simples, como descrevemos atrás [III, 12], e depois do movimento médio simples do centro da Terra (ou do Sol, se preferirdes chamar-lhe assim), bem como a anomalia anual, nas Tabelas dos movimentos uniformes [III, 14; no fim]. Adicionemos estes números aos das épocas estabelecidas [III, 23]. Ao lado da primeira anomalia simples e do número que lhes diz respeito, como está fixado na 1.ª ou na 3.ª coluna precedente da Tabela ou do número mais próximo, encontrareis a prostaférese correspondente à anomalia anual, na terceira coluna. Tomemos nota dos minutos proporcionais seguintes. Juntemos a prostaférese à anomalia anual, se a primeira for menor do que um semicírculo anual, ou o seu número estiver na primeira coluna; no caso contrário, subtrai-se. O resto ou total será a anomalia corrigida do Sol. Em conformidade com isto tomemos também a prostaférese para a órbita anual, que ocupa a 5.ª coluna, juntamente com o acréscimo correspondente. Este acréscimo tomado em conjunto com os minutos proporcionais anteriormente anotados atinge uma quantidade que deve ser sempre adicionada à prostaférese [da órbita], transformando-se na prostaférese ajustada, que é subtraída da posição média do Sol, se o número da anomalia anual está escrito na primeira coluna ou for menor do que um semicírculo. Contudo, deverá ser adicionada se for maior ou estiver na segunda coluna dos números. A diferença ou soma assim obtidas fixarão a verdadeira posição do Sol calculada a partir da cabeça de Áries. Finalmente, se lhe juntarmos a precessão verdadeira do equinócio da Primavera, indicará também a verdadeira posição do Sol em relação ao equinócio nos signos do zodíaco e graus do zodíaco.

Mas se quereis chegar a este resultado por outro método, tomareis o movimento uniforme composto em vez do movimento simples e repetireis todas as operações mencionadas. Mas em vez de adicionar ou subtrair a precessão, adicionaremos ou subtrairemos a prostaférese da precessão equinocial. Este é o cálculo da posição aparente do Sol, partindo do princípio que a Terra se move. Ele está de acordo com as observações antigas e modernas, de que além disso se pode presumir que já tinham previsto o futuro movimento (1).

Contudo não desconhecemos que se alguém estivesse convencido de que o centro da revolução anual estava estacionário como centro do Universo, enquanto o Sol se movia com dois movimentos, semelhantes e iguais àqueles que apresentei em ligação com o centro do círculo excêntrico [III, 20], todos os fenómenos seriam como anteriormente — os mesmos números e a mesma demonstração —, pois que nada se alteraria neles, especialmente os fenómenos referentes ao Sol, excepto a posição. Com efeito, o movimento do centro da Terra à volta do centro do Universo seria então regular e simples em si mesmo, sendo os dois restantes movimentos atribuídos ao Sol. Assim ainda permanece uma dúvida sobre qual destas duas posições é ocupada pelo centro do Universo, visto que se disse ambi-

---

(1) Refere-se ao movimento da Terra que Copérnico agora defendia.

guamente, no princípio, que o centro do Universo está no Sol [I, 9, 10] ou próximo dele [I, 10]. Discutiremos esta questão mais largamente adiante, ao tratarmos dos cinco planetas [V, 4]. Explicaremos este ponto o melhor que pudermos, julgando por agora suficiente adoptar números determinados com o menor erro possível, em relação à posição aparente do Sol.

O NUCHTEMERON, ISTO É, A VARIAÇÃO DO DIA NATURAL

Com referência ao Sol resta ainda algo para dizer sobre a variação do dia natural — o intervalo de tempo que abrange 24 horas iguais — por nós até aqui usado como medida geral e precisa dos movimentos celestes. Alguns, porém, definem este período como o tempo decorrido entre dois nascimentos do Sol, como fizeram os Caldeus e os Judeus antigos; ou entre dois ocasos do Sol, como fizeram os Atenienses. Houve outros que entenderam ser o tempo que vai da meia-noite à meia-noite, por exemplo, os Romanos, ou então do meio-dia ao meio-dia, como fizeram os Egípcios. Contudo é evidente que a rotação própria do globo terreste se completa neste período de tempo com o acréscimo que lhe é entretanto dado pela revolução anual relativa ao movimento aparente do Sol. Que esta adição é variável demonstra-se em primeiro lugar pela irregularidade do movimento aparente do Sol e, em segundo lugar, pelo facto do dia natural estar relacionado com os pólos do equador, enquanto o movimento anual tem lugar no círculo da eclíptica. Por tais razões, este período de tempo não pode ser uma medida geral e precisa do movimento, dado que os dias não mantêm uma relação constante com o dia natural nem entre si, em todos os pormenores. Portanto, foi necessário escolher entre eles algum dia médio uniforme pelo qual se pudesse medir, sem incerteza, o movimento uniforme.

Ora, visto haver, no decorrer do ano, 365 revoluções à volta dos pólos da Terra, as quais, tendo em conta o acréscimo diário provocado pelo avanço aparente do Sol, são acrescidas de uma revolução quase completa, é evidente que $^1/_{365}$ dessa rotação adicional é a diferença para mais entre um dia natural e um dia uniforme. Assim, devemos definir o dia uniforme e distingui-lo do dia variável e aparente. Entendemos, pois, por dia uniforme o que contém uma rotação completa do equador mais aquela fracção que parece ser atravessada pelo Sol no seu movimento uniforme, durante esse tempo. Pelo contrário, é um dia não uniforme e aparente aquele que compreende os 360° da rotação do equador, mais quanto sobe no horizonte ou meridiano com o avanço aparente do Sol. Embora a diferença entre estes dois dias seja muito pequena e não imediatamente perceptível, contudo, com o decorrer de muitos dias, atinge uma quantidade apreciável.

Para isto há duas causas: não uniformidade da posição aparente do Sol e também o acréscimo desigual da obliquidade da eclíptica, a primeira das quais occorre devido ao movimento não uniforme e aparente do Sol [III, 16-17]. Já esclarecemos este ponto, pois o semicírculo que tem o seu ponto médio na ápside superior era segundo Ptolomeu $4^3/_3$ graus de tempo (1) mais pequeno em comparação com os graus da eclíptica [*Almagesto,* III, 9] e o outro semicírculo que contém a ápside inferior apresenta a mesma quantidade a mais. Consequentemente, a diferença total entre um semicírculo e o outro é $9^1/_2$ graus de tempo. Na segunda causa, porém, relacionada com o nascer e o pôr do Sol, há uma grande diferença entre os semicírculos dos dois solstícios. A diferença entre o dia mais curto e o mais longo é muito variável e está de harmonia com cada região em particular. A diferença referida ao meio-dia ou à meia-noite está

---

(1) O equador celeste estava dividido em 360 «graus de tempo» ou «tempos», em vez de graus na astronomia antiga, como Copérnico explicou no Livro II, Capítulo 3.

em toda a parte limitada por quatro pontos. Com efeito, os 88° entre os 16° de Touro e os 14° de Leão atravessam o meridiano em cerca de 93 «tempos», de modo que há «cinco tempos» a menos no segundo caso e igual número a mais no primeiro. Assim, o total dos dias no primeiro segmento excede o do segundo em 10 «tempos», o que perfaz $^2/_3$ da hora. O mesmo acontece no outro semicírculo onde a situação é inversa em relação aos limites restantes, diametralmente opostos.

Aprouve, porém, aos matemáticos tomarem para princípio do dia natural não o nascer ou o pôr do Sol mas o meio-dia ou a meia-noite. Com efeito, a não uniformidade medida no horizonte é mais complicada, pois se estende por várias horas e, além disso, não é em toda a parte a mesma, mas varia de uma forma complexa, consoante a obliquidade da esfera. Mas a [não uniformidade] referida ao meridiano é em toda a parte a mais simples.

Consequentemente, a diferença total que vem das duas causas mencionadas — o movimento não uniforme aparente do Sol e o trânsito não uniforme do meridiano — antes de Ptolomeu, quando o decréscimo se iniciava no meio do Aquário e o acréscimo no começo do Escorpião, atingia os 8 $^1/_3$ «tempos» [*Almagesto*, III, 9]. Agora, quando o decréscimo se estende dos 20° dentro do Aquário ou cerca desse ponto até 10° dentro do Escorpião, e o acréscimo dos 10° dentro do Escorpião aos 20° dentro do Aquário, a diferença diminuiu para 7 «tempos» e 48 minutos. Na verdade este fenómeno muda também em tempo por causa da variação do perigeu e da excentricidade.

Finalmente, se a variação máxima na precessão dos equinócios se juntar a isto, a diferença inteira nos dias naturais pode elevar-se acima de 10 «tempos», em vários anos. Uma terceira causa da não uniformidade dos dias ocultou-se até agora porque a revolução do equador foi considerada uniforme em comparação com o equinócio uniforme médio, não com os equinócios aparentes, os quais, como é suficientemente claro, não são inteiramente uniformes. Ora duas vezes 10 «tempos» é igual a 1 $^1/_3$ horas que pode ser, algumas vezes, a diferença entre os dias mais longos e os mais curtos. Em relação com o movimento anual aparente do Sol e o movimento mais lento dos outros planetas talvez se pudessem menosprezar estes fenómenos sem qualquer erro sensível. Mas devido à velocidade da Lua, que pode provocar uma discrepância de $^5/_6{}^o$, não os poderemos certamente desprezar.

O método de conciliar o tempo uniforme com o tempo aparente e não uniforme, em que todas as variações estão de acordo, é o seguinte: Para qualquer intervalo de tempo dado, deve procurar-se em cada um dos seus limites, isto é, no início e no fim, a posição média do Sol, a partir do equinócio, resultante do seu movimento médio uniforme, a que chamámos o movimento composto, e também a sua verdadeira posição aparente em relação ao equinócio verdadeiro, e determinar quantos «tempos» passaram na ascensão recta ao meio-dia ou à meia-noite, ou quantos houve no intervalo entre as ascensões rectas entre a primeira posição verdadeira e a segunda. Com efeito, se os «tempos» são iguais aos graus entre as duas posições médias, então o tempo aparente dado será igual ao tempo médio. Mas se os «tempos» são mais, deve adicionar-se o excesso ao tempo dado. Se forem menos, subtrair-se-á a diferença ao tempo aparente. Fazendo isto, encontraremos, a partir da soma ou diferença, o tempo reduzido a tempo uniforme tomando quatro minutos de uma hora ou dez segundos de um minuto do dia. Se o tempo uniforme é dado e queremos saber qual o tempo aparente equivalente, deve fazer-se o contrário.

Ora nós verificámos que para a 1.ª Olimpíada, a posição média do Sol a partir do equinócio vernal médio da Primavera, ao meio-dia, no dia 1 de Hecatombéon, o primeiro mês dos Atenienses, era 90° 59′ [III, 19], e a partir do equinócio aparente, 0° 36′, em Câncer. Para o ano do nascimento de Cristo, o movimento médio do Sol é 8° 2′ em Capricórnio [= 278° 2′; III, 9], enquanto o movimento verdadeiro é 8° 48′ no mesmo signo. Por conseguinte, na esfera recta, desde 0° 36′ em Câncer até 8° 48′ em Capricórnio, sobem a 178 «tempos» e 54′, excedendo a distância entre as posições médias em 1 «tempo» e 51′. O mesmo método se aplica ao resto. Servindo-nos dele, podemos fazer um exame preciso do movimento da Lua. Este é o assunto do livro seguinte.

LIVRO IV

INTRODUÇÃO

Expusemos no livro anterior, [tanto] quanto nos permitiram as nossas modestas forças, os fenómenos causados pelo movimento da Terra em redor do Sol. Embora seja nossa intenção analisar os movimentos de todos os planetas seguindo o mesmo processo, desviamo-nos agora para o movimento da Lua. Deve ser assim porque é principalmente através da Lua, que partilha do dia e da noite, que encontramos e verificamos as posições de quaisquer astros. É-o também porque só ela, entre todos os astros, faz as suas revoluções, embora variáveis, à volta do centro da Terra, como um todo, sendo o astro que com ela está mais intimamente relacionado. Por conseguinte a Lua, tomada em si mesma, não nos fornece qualquer indicação de que a Terra se move, excepto talvez quanto à sua rotação diária. Foi sobretudo por esta razão que julgaram que a Terra era o centro do universo e o centro comum de todas as revoluções. Certamente, no que dizemos acerca do movimento da Lua, não discordamos das opiniões dos antigos quando afirmam que esse movimento é em redor da Terra. Contudo, acrescentaremos alguns factos para além do que recebemos dos nossos predecessores, mais conformes com a realidade. Baseando-nos neles determinaremos também com maior segurança o movimento da Lua, tanto quanto possível.

HIPÓTESES SOBRE OS CÍRCULOS DA LUA SEGUNDO A OPINIÃO DOS AUTORES ANTIGOS

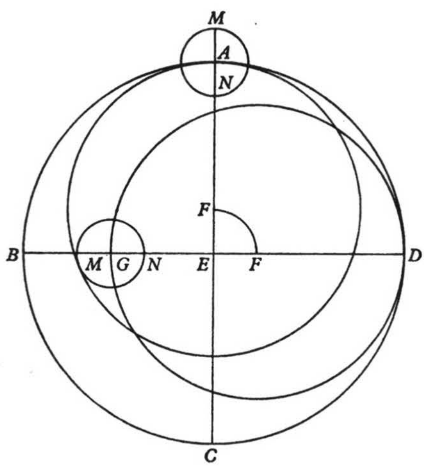
O movimento da Lua tem a propriedade de não seguir o círculo ao meio do zodíaco, mas o seu próprio círculo que é inclinado para este, bissecta-o, e, por sua vez, é bissectado por ele, atravessando-o em duas latitudes.

Isto passa-se quase como os trópicos no movimento anual do Sol, e não é de surpreender, pois o que o ano é para o Sol, é mês para a Lua. As posições médias das intersecções são chamadas «pontos eclípticos», por uns, e «nodos» por outros. Também as conjunções e oposições do Sol e da Lua, que ocorrem nestes pontos, têm o nome de eclípticos. Com efeito, não há outros pontos comuns aos dois círculos, excepto os referidos em que os eclipses do Sol e da Lua se unificam; porque quando a Lua se encontra nestes lugares, nenhum dos dois astros pode destruir a luz do outro. Além disto, este círculo oblíquo da Lua, juntamente com aqueles quatro pontos cardeais que lhe pertencem, move-se uniformemente em redor do centro da Terra, cerca de 3′ do arco cada dia, completando uma revolução ao fim de 19 anos. Neste círculo e neste plano, a Lua vê-se sempre a mover-se para Este, mas, algumas vezes, esse movimento é muito lento e outras muito grande. Com efeito, quanto mais elevado é esse movimento mais lento é, e quanto mais perto da Terra, mais rápido. Foi possível notar isto mais facilmente na Lua do que em qualquer outro astro, por causa da sua proximidade à Terra.

Entendeu-se que isto se processava através de um epiciclo, uma vez que a Lua movendo-se na parte superior da circunferência do epiciclo, teria uma velocidade inferior à da velocidade uniforme. Porém, passando na parte inferior do epiciclo, a sua velocidade seria superior à velocidade uniforme.

Além disto, demonstrou-se que o facto explicado através de um epiciclo, pode explicar-se igualmente com um círculo excêntrico [III, 15]. Mas escolheu-se um epiciclo porque a Lua se apresentava com uma não uniformidade dupla. Com efeito, quando estava na ápside superior ou inferior do epiciclo, parecia não haver variação alguma do movimento uniforme. Pelo contrário, quando estava próxima dos pontos de intersecção do epiciclo [com o deferente], notava-se uma variação não uniforme, mas muito maior no quarto crescente e minguante do que na Lua cheia e na Lua nova. Isto acontecia numa sucessão certa e ordenada. Por isso é que pensaram que o deferente em que o epiciclo se movia não era concêntrico com a Terra, mas era um epiciclo excêntrico na qual a Lua se movia de harmonia com a seguinte regra: nos pontos médios de todas as oposições e conjunções do Sol e da Lua, o epiciclo pequeno está no apogeu do círculo excêntrico, mas o epiciclo está no perigeu do excêntrico quando a Lua está a meio caminho [entre oposição e conjunção] ou seja, à distância de um quadrante [de uma e outra]. Assim imaginaram que havia dois movimentos uniformes, opostos um ao outro, à volta do centro da Terra, isto é, que o epiciclo se movia para Este, e o centro do excêntrico bem como as suas ápsides se moviam para Oeste, estando a linha da posição média do Sol sempre a meio caminho entre os dois. Deste modo o epiciclo atravessa o excêntrico duas vezes por mês.

Para pôr isto diante dos nossos olhos, seja *ABCD* o círculo oblíquo da Lua, concêntrico com a Terra, quadrissectado pelos diâmetros *AEC* e *BED*. Seja *E* o centro da Terra. Suponha-se que a conjunção média do Sol e da Lua está na linha *AC* e o apogeu do círculo excêntrico, cujo centro é *F*, bem como o centro do epiciclo *MN*, está simultaneamente na mesma posição. Mova-se agora o apogeu do círculo excêntrico para Oeste, tanto quanto o epiciclo se move para Este, ambos uniformemente em revoluções mensais iguais, à volta de *E*, em relação às conjunções ou oposições do Sol. Esteja *AEC* a linha da posição média do Sol, sempre a meio caminho entre elas; e a Lua novamente a



Oeste do apogeu do epiciclo. Estamos convencidos de que os fenómenos estão de acordo com o que acabamos de expor.

Com efeito, visto que o epiciclo completa um semicírculo, em relação ao Sol, em meio mês, mas completa uma revolução inteira relativamente ao apogeu do círculo excêntrico, os referidos epiciclo e apogeu do círculo excêntrico estão opostos, um ao outro, no diâmetro *BD*, do mesmo modo que o epiciclo, no círculo excêntrico, está no seu perigeu no ponto *G*, em metade daquele tempo, que é na altura dos quartos da Lua. Ali, tendo-se aproximado da Terra, torna maiores as variações da não uniformidade.

Com efeito, se grandezas iguais são visíveis a distâncias desiguais, a que está mais próxima da nossa vista parece maior. Por conseguinte, estas variações atingirão o seu máximo, quando o epiciclo está em *G*, e o mínimo, quando ele se encontra em *A*. Na verdade, o diâmetro do epiciclo, *MN*, terá a menor razão, em relação à linha *AE*, mas em relação a *GE*, uma razão maior do que todas as outras linhas situadas em posições diferentes. Com efeito, *GE* é a mais curta das linhas que se podem traçar do centro da Terra para o círculo excêntrico, e mais extensa delas é *AE*, ou a sua equivalente, *DE*.

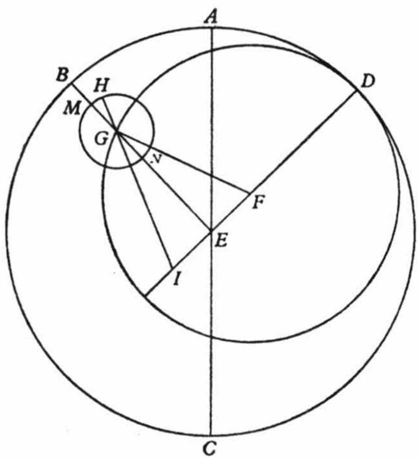
A DEFICIÊNCIA DESTAS AFIRMAÇÕES

Os nossos predecessores afirmaram que um tal sistema de círculos está de acordo com os fenómenos da Lua. Mas, se ponderarmos o assunto com mais cuidado, veremos que esta hipótese não é suficientemente adequada nem conveniente. Podemos provar isto pela razão e pelos sentidos. Efectivamente, enquanto os nossos predecessores admitem que o movimento do centro do epiciclo é uniforme em redor do centro da Terra, também têm de admitir que não é uniforme no seu próprio círculo excêntrico (que descreve). Na verdade, se, por exemplo, o ângulo *AEB* medir 45°, isto é, metade de um ângulo recto, e for igual a *AED*, de modo que todo o ângulo *BED* seja um ângulo recto, e se tomarmos o centro do epiciclo em *G*, juntando *GF*, é evidente que o ângulo *GFD*, por ser um ângulo exterior, é naturalmente maior do que *CEF* interior e oposto. Também são desiguais os arcos *DAB*, e *DG*, embora sejam ambos descritos no mesmo tempo. Daqui se conclui que, sendo *DAB* um quadrante, *DG*, que entretanto é descrito pelo centro do epiciclo, será maior do que um quadrante. Contudo, é claro que nos quartos da Lua, *DAB* e *DG* são semicírculos [IV, 1]. Por conseguinte, o movimento do epiciclo é não uniforme no círculo excêntrico que descreve.

Mas se assim é, que diremos acerca do axioma segundo o qual o movimento dos corpos celestes é uniforme e só aparentemente se apresenta como não uniforme, quando o movimento aparente uniforme do epiciclo é, de facto, não uniforme, coisa absolutamente contrária ao princípio estabelecido e à afirmação feita?

Mas se dissermos que o epiciclo se move uniformemente em redor do centro da Terra e que tal basta para salvaguardar a uniformidade, então, que espécie de uniformidade será aquela que existe num círculo estranho no qual o movimento do epiciclo não ocorre, ocorrendo sim no próprio círculo excêntrico deste epiciclo?

Na verdade, também ficamos surpreendidos por verificarmos que pretendem não estar a uniformidade da Lua, no

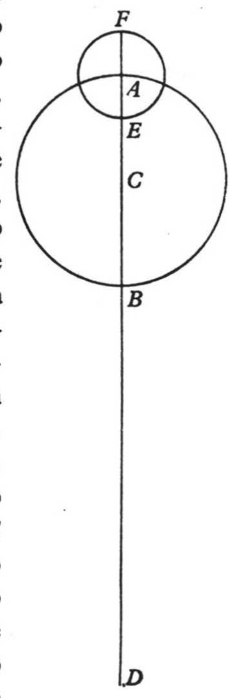


seu epiciclo, relacionada com o centro da Terra, em relação ao qual o movimento uniforme, que está de acordo com o centro do epiciclo, devia ser propriamente referido pela linha *EGM*. Pensam, ao contrário, que deve ser referido a qualquer outro ponto e que a Terra se encontra a meio caminho entre este ponto e o centro do círculo excêntrico, actuando a linha *IGH* como um indicador do movimento uniforme da Lua no epiciclo. Só por si, também isto é suficiente para provar a não uniformidade deste movimento. São obrigados, efectivamente, a admitir isto mesmo por causa dos fenómenos que em parte acompanham esta hipótese. Assim, atravessando a Lua não uniformemente o seu epiciclo, se queremos agora basear a não uniformidade aparente nos movimentos realmente não uniformes, é evidente qual deve ser a natureza da nossa argumentação daqui em diante. Com efeito, que faremos nós senão dar uma ajuda aos detractores desta ciência?

Além disso, tanto a experiência como a observação nos dizem que as paralaxes da Lua são diferentes das indicadas pela razão dos círculos. Com efeito, as paralaxes, chamadas «comutações», ocorrem devido à grandeza apreciável da Terra em comparação com a proximidade da Lua. De facto, as linhas rectas traçadas da superfície da Terra e do centro para a Lua, não são paralelas mas intersectam-se num ângulo visível, no corpo da Lua. Têm assim, necessariamente, de produzir uma variação na aparência da Lua, de modo que parece estar num lugar àqueles que a vêem num ângulo da curvatura da Terra, e num lugar diferente àqueles que observam a Lua numa linha do centro da Terra ou de um ponto directamente abaixo da Lua. Por isso estas paralaxes variam de acordo com a distância da Terra à Lua; na verdade, todos os matemáticos admitem que a maior distância é de 64 $^1/_6$ unidades, sendo o raio da Terra a unidade; mas a distância mais curta, segundo o modelo dos nossos predecessores, deve ser 33 unidades e 33′, de modo que a Lua se deve aproximar de nós cerca de metade da distância. De acordo com a razão resultante, as paralaxes, nas distâncias mínima e máxima, deviam estar quase na proporção de 1 para 2. Todavia, nós vemos que as paralaxes que ocorrem no quarto crescente e no quarto minguante, mesmo quando está no perigeu do epiciclo, diferem muito pouco, ou mesmo nada, das paralaxes que ocorrem nos eclipses do Sol e da Lua, como demonstraremos satisfatoriamente no lugar próprio [IV, 22]. Mas o erro torna-se evidente, sobretudo devido ao corpo da Lua, cujo diâmetro, por essa razão, devia parecer duas vezes maior ou com metade do seu tamanho. Contudo, como os círculos estão entre si na razão dos quadrados dos seus diâmetros, a Lua pareceria geralmente quatro vezes maior, partindo da suposição que ela brilhava com todo o seu disco iluminado, em quadratura, quando mais próxima da Terra, do que em oposição ao Sol. Dado, porém que [em quadratura] brilha só com meio disco iluminado, devia, não obstante, brilhar com o dobro do brilho que teria na Lua cheia, se estivesse naquela posição. Embora o contrário seja por si evidente, se alguém não estiver satisfeito com a observação feita só com os seus olhos e desejar observar com o auxílio da dioptra de Hiparco ou qualquer outro instrumento, para medir o diâmetro da Lua, verificará que ele apenas varia quanto exige o epiciclo sem aquele círculo excêntrico. Por conseguinte, Menelau e Timócares, ao investigarem as estrelas fixas através da posição da Lua, não hesitaram em usar sempre para o diâmetro da Lua o mesmo valor de $^1/_2{}^{\circ}$, que a Lua ocupava habitualmente.

OUTRA OPINIÃO SOBRE O MOVIMENTO DA LUA

Deste modo é bem claro que o epiciclo parece maior ou menor não por causa de um círculo excêntrico, mas devido a qualquer outro sistema de círculos. Com efeito, seja *AB* o epiciclo, a que nos referiremos, como o primeiro e o maior, sendo *C* o seu centro. Com o centro da Terra em *D*, tracemos, a partir dele, a linha recta, *DC*, para a ápside superior do epiciclo [*A*]. Depois, tendo *A* como centro, descrevamos outro pequeno epiciclo, *EF*, e situemos tudo no plano do círculo oblíquo da Lua. Suponha-se que *C* se desloca para Este, e *A* para Oeste. Por outro lado, de *F*, na parte superior de *EF*, a Lua mover-se-á para Este, mantendo-se de tal maneira que, quando a linha *DC* está alinhada com a posição média do Sol, a Lua se encontra sempre mais próxima do centro *C*, isto é, no ponto *E*. Contudo, na quadratura, está o mais afastada possível de *C*, em *F*. Assim, segue-se qua a Lua atravessará o epiciclo pequeno, *EF*, duas vezes por mês, e durante esse tempo *C* completará o seu curso, voltando novamente em direcção ao Sol; a Lua, quando nova ou cheia, descreverá o seu círculo mais pequeno, por exemplo aquele cujo raio é *CE*. Deste modo tornará também as diferenças entre o movimento uniforme e aparente menores, nas primeiras posições, e maiores, nas segundas; enquanto passa por arcos semelhantes mas desiguais, à volta do centro *C*. Dado que o centro do epiciclo, *C*, estará sempre num círculo concêntrico com a Terra, a Lua não nos apresentará paralaxes que variem



muito, mas que estão apenas conformes com o epiciclo. Além disto, também se verá facilmente a razão por que o corpo da Lua é sempre virtualmente o mesmo, sem mudança. Todos os outros fenómenos relacionados com o movimento da Lua aparecerão, no momento preciso em que sejam observados.

Demonstraremnos isto mais tarde, a partir da nossa hipótese, embora os mesmos fenómenos possam mais uma vez ser produzidos pelos círculos como fizemos com o Sol [III, 15], mantidas as devidas proporções.

Começaremos, pois, pelos movimentos uniformes, como procedemos anteriormente [III, 13-14], pois, sem eles, não se pode distinguir o movimento não uniforme. A dificuldade não é nesse caso pequena, por causa das paralaxes mencionadas.

Por esta razão a posição da Lua não pode ser observada com astrolábios ou quaisquer outros instrumentos. Mas a benevolência da Natureza, mesmo neste ponto, vai ao encontro dos desejos humanos. Assim, a posição da Lua é localizada com mais rigor através dos seus eclipses do que pelo uso de instrumentos, e sem qualquer risco de erro.

Com efeito, enquanto o resto do Universo está brilhante e inundado com a luz do dia, é evidente que a noite não é mais do que a sombra da Terra, que se estende na forma de um cone e termina num ponto. A Lua ao entrar nela, fica obscurecida, e, quando se situa no meio da escuridão, entende-se que alcançou o lugar oposto ao Sol. Por outro lado, os eclipses solares que são provocados pela interposição da Lua [entre o Sol e a Terra], não nos fornecem uma prova clara da posição da Lua. Com efeito, nesta ocasião, acontece que vemos uma conjunção do Sol e da Lua, a qual, em relação ao centro da Terra, ou já passou ou ainda não ocorreu, devido à já referida influência da paralaxe. Consequentemente, não observamos o mesmo eclipse do Sol com igual duração e grandeza, em todas as regiões, nem semelhante nos seus aspectos particulares. Mas estes obstáculos não ocorrem nos eclipses da Lua. São idênticos em toda a parte. É que a Terra faz com que o seu eixo que provoca este obscurecimento passe pela direcção do Sol através do seu próprio centro; e, assim, os eclipses lunares são os mais próprios para determinar o movimento da Lua, por um método extremamente digno de confiança.

Capítulo IV

AS REVOLUÇÕES DA LUA E OS SEUS MOVIMENTOS PARTICULARES

Entre os mais antigos astrónomos que se preocuparam em transmitir à posteridade números precisos acerca deste assunto, distinguiu-se Méton de Atenas, que floresceu cerca da 87.ª Olimpíada. Ele declarou que em 19 anos solares se completaram 235 meses. De acordo com isto, aquele grande período — enneadekaeteris — isto é, o ciclo de 19 anos, foi chamado Metónico. Este número foi tão popular que está gravado no «forum» de Atenas, e de muitas outras cidades. Mesmo até ao nosso tempo é largamente aceite, pois se julga que fixa o início e o fim dos meses numa ordem precisa; e que também torna o ano solar de 365 $^1/_4$ dias comensurável com os meses. Do mesmo modo, o período de 76 anos de Calipo, em que se intercala 1 dia 19 vezes, foi chamado no «ciclo de Calipo». Mas pelo seu engenho, Hiparco verificou que havia o excesso de um dia inteiro em 304 anos, que só foi corrigido tirando ao ano solar $^1/_{300}$ de um dia. Por isso, alguns deram o nome de «ciclo de Hiparco» àquele enorme período em que se completam 3760 meses.

Estes cálculos são apresentados duma forma excessivamente simples e rude, quando também se trata de uma questão de ciclos de anomalia e latitude. Por isso, o mesmo Hiparco aprofundou mais tarde [*Almagesto*, IV, 2-3] este assunto, comparando os relatórios das suas observações extremamente cuidadosas dos eclipses lunares com aquelas que recebeu dos Babilónios. Fixou o período em que se completavam os ciclos dos meses e da anomalia, simultaneamente em 345 anos egípcios, 82 dias e 1 hora, num período em que se completam 4267 meses e 4573 ciclos de anomalia. Ora, dividindo pelo número de meses indicado, isto é, 126 007 dias e 1 hora, verifica-se que um mês é igual a 29 dias, 31′ 50″ 8‴ 9⁗ 20′′′′′. Daqui resulta conhecido claramente o movimento em qualquer tempo. Com efeito, quando se dividem pelo tempo de um mês os 360° de uma revolução mensal, o movimento diário da Lua em relação ao Sol é 12° 11′ 26″ 41‴ 20⁗ 18′′′′′. Este número multiplicado por 365, dá o total de 129° 37′ 21 ″ 28‴ 29⁗, correspondente ao movimento anual, para além das 12 revoluções completas. Além disso, 4267 e 4573, correspondentes aos meses e às revoluções, são números divisíveis por 17. Feitas todas as divisões possíveis, estes dois números estão entre si como 251 está para 269. Esta é a razão entre o movimento da Lua e o movimento de anomalia, segundo o 15.° teorema do livro V de Euclides. Quando multiplicarmos o movimento da Lua por 269 e dividirmos o produto por 251, obteremos o movimento anual de anomalia, depois das 13 revoluções completas, de 88° 43′ 8″ 40‴ 20⁗. Portanto, o movimento diário será 13° 3′ 53″ 56‴ 29⁗.

Mas o ciclo de latitude tem um ritmo diferente, pois não coincide rigorosamente com o intervalo em que a anomalia regressa; e afirmamos que o ciclo de latitude da Lua só se completa quando, mais tarde, um eclipse da Lua é, sob todos os aspectos, semelhante ou igual a um eclipse anterior, de modo que, por exemplo, no mesmo lado, ambas as áreas obscurecidas sejam iguais em extensão e tenham a mesma duração. Isto acontece quando as distâncias entre a ápside superior ou inferior e a Lua são iguais, pois é neste tempo que a Lua passa através de sombras iguais, em tempos iguais, como se sabe. Ora, segundo Hiparco, um tal ciclo tem lugar em 5458 meses, correspondentes aos 5923 ciclos de latitude. Esta razão deu-nos também a conhecer o movimento específico de latitude, em anos e dias, como os outros movimentos. Com efeito, multiplicando o movimento da Lua em relação ao Sol, por 5923 meses, e dividindo o produto por 5458, encontramos o movimento da Lua em latitude, num ano, depois de 13 revoluções, 148º 42′ 46″ 20‴ 3⁗; e num dia, 13º 13′ 45″ 39‴ 40⁗. Este foi o método de que Hiparco se serviu para calcular os movimentos regulares da Lua, e antes dele ninguém conseguira uma aproximação mais rigorosa. Contudo, os séculos futuros mostraram que estes valores ainda não estavam determinados com um rigor completo. Com efeito, Ptolomeu, embora tivesse encontrado para o movimento médio a partir do Sol o mesmo valor que Hiparco, verificou contudo estar o movimento anual de anomalia, 1′ 11″ 39‴ inferior ao dele, mas o movimento anual em latitude, 53‴ 41⁗; tendo passado já mais tempo eu verifiquei que o valor do movimento anual médio de Hiparco era de 1′ 2″ 49‴ a menos, mas, em anomalia, era apenas de 24‴ 49⁗ para menos. Quanto ao movimento em latitude, é de 1″ 1‴ 42⁗ para mais. Por conseguinte, o movimento anual regular da Lua difere do da Terra em 129º 37′ 22″ 32‴ 40⁗. No que se refere à anomalia, difere em 88º 43′ 9″ 5‴ 9⁗, e quanto ao movimento em latitude, em 148º 42′ 45″ 17‴ 21⁗.

O MOVIMENTO DA LUA EM ANOS E PERÍODOS DE 60 ANOS
Era Cristã 209° 58′

Anos egípcios	Movimento					Anos egípcios	Movimento				
	60°	°	′	″	″		60°	°	′	″	″
1	2	9	37	22	36	31	0	58	18	40	48
2	4	19	14	45	12	32	3	7	56	3	25
3	0	28	52	7	49	33	5	17	33	26	1
4	2	38	29	30	25	34	1	27	10	48	38
5	4	48	6	53	2	35	3	36	48	11	14
6	0	57	44	15	38	36	5	46	25	33	51
7	3	7	21	38	14	37	1	56	2	56	27
8	5	16	59	0	51	38	4	5	40	19	3
9	1	26	36	23	27	39	0	15	17	41	40
10	3	36	13	46	4	40	2	24	55	4	16
11	5	45	51	8	40	41	4	34	32	26	53
12	1	55	28	31	17	42	0	44	9	49	29
13	4	5	5	53	53	43	2	53	47	12	5
14	0	14	43	16	29	44	5	3	24	34	42
15	2	24	20	39	6	45	1	13	1	57	18
16	4	33	58	1	42	46	3	22	39	19	55
17	0	43	35	24	19	47	5	32	16	42	31
18	2	53	12	46	55	48	1	41	54	5	8
19	5	2	50	9	31	49	3	51	31	27	44
20	1	12	27	32	8	50	0	1	8	50	20
21	3	22	4	54	44	51	2	10	46	12	57
22	5	31	42	17	21	52	4	20	23	35	33
23	1	41	19	39	57	53	0	30	0	58	10
24	3	50	57	2	34	54	2	39	38	20	46
25	0	0	34	25	10	55	4	49	15	43	22
26	2	10	11	47	46	56	0	58	53	5	59
27	4	19	49	10	23	57	3	8	30	28	35
28	0	29	26	32	59	58	5	18	7	51	12
29	2	39	3	55	36	59	1	27	45	13	48
30	4	48	41	18	12	60	3	37	22	36	25

O MOVIMENTO DA LUA EM DIAS E PERÍODOS DE 60 DIAS E MINUTOS-DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	12	11	26	41	31	6	17	54	47	26
2	0	24	22	53	23	32	6	30	6	14	8
3	0	36	34	20	4	33	6	42	17	40	49
4	0	48	45	46	46	34	6	54	29	7	31
5	1	0	57	13	27	35	7	6	40	34	12
6	1	13	8	40	9	36	7	18	52	0	54
7	1	25	20	6	50	37	7	31	3	27	35
8	1	37	31	33	32	38	7	43	14	54	17
9	1	49	43	0	13	39	7	55	26	20	58
10	2	1	54	26	55	40	8	7	37	47	40
11	2	14	5	53	36	41	8	19	49	14	21
12	2	26	17	20	18	42	8	32	0	41	3
13	2	38	28	47	0	43	8	44	12	7	44
14	2	50	40	13	41	44	8	56	23	34	26
15	3	2	51	40	22	45	9	8	35	1	7
16	3	15	3	7	4	46	9	20	46	27	49
17	3	27	14	33	45	47	9	32	57	54	30
18	3	39	26	0	27	48	9	45	9	21	12
19	3	51	37	27	8	49	9	57	20	47	53
20	4	3	48	53	50	50	10	9	32	14	35
21	4	16	0	20	31	51	10	21	43	41	16
22	4	28	11	47	13	52	10	33	55	7	58
23	4	40	23	13	54	53	10	46	6	34	40
24	4	52	34	40	36	54	10	58	18	1	21
25	5	4	46	7	17	55	11	10	29	28	2
26	5	16	57	33	59	56	11	22	40	54	43
27	5	29	9	0	40	57	11	34	52	21	25
28	5	41	20	27	22	58	11	47	3	48	7
29	5	53	31	54	3	59	11	59	15	14	48
30	6	5	43	20	45	60	12	11	26	41	31

O MOVIMENTO DA LUA EM ANOS E PERÍODOS DE 60 ANOS

Anos	Movimento					Anos	Movimento				
	60°	°	′	″	″		60°	°	′	″	″
1	1	28	43	9	7	31	3	50	17	42	44
2	2	57	26	18	14	32	5	19	0	51	52
3	4	26	9	27	21	33	0	47	44	0	59
4	5	54	52	36	29	34	2	16	27	10	6
5	1	23	35	45	36	35	3	45	10	19	13
6	2	52	18	54	43	36	5	13	53	28	21
7	4	21	2	3	50	37	0	42	36	37	28
8	5	49	45	12	58	38	2	11	19	46	35
9	1	18	28	22	5	39	3	40	2	55	42
10	2	47	11	31	12	40	5	8	46	4	50
11	4	15	54	40	19	41	0	37	29	13	57
12	5	44	37	49	27	42	2	6	12	23	4
13	1	13	20	58	34	43	3	34	55	32	11
14	2	42	4	7	41	44	5	3	38	41	19
15	4	10	47	16	48	45	0	32	21	50	26
16	5	39	30	25	56	46	2	1	4	59	33
17	1	8	13	35	3	47	3	29	48	8	40
18	2	36	56	44	10	48	4	58	31	17	48
19	4	5	39	53	17	49	0	27	14	26	55
20	5	34	23	2	25	50	1	55	57	36	2
21	1	3	6	11	32	51	3	24	40	45	9
22	2	31	49	20	39	52	4	53	23	54	17
23	4	0	32	29	46	53	0	22	7	3	24
24	5	29	15	38	54	54	1	50	50	12	31
25	0	57	58	48	1	55	3	19	33	21	38
26	2	26	41	57	8	56	4	48	16	30	46
27	3	55	25	6	15	57	0	16	59	39	53
28	5	24	8	15	23	58	1	45	42	49	0
29	0	52	51	24	30	59	3	14	25	58	7
30	2	21	34	33	37	60	4	43	9	7	15

O MOVIMENTO DA LUA EM DIAS E PERÍODOS DE 60 DIAS E MINUTOS-DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	13	3	53	56	31	6	45	0	52	11
2	0	26	7	47	53	32	6	58	4	46	8
3	0	39	11	41	49	33	7	11	8	40	4
4	0	52	15	35	46	34	7	24	12	34	1
5	1	5	19	29	42	35	7	37	16	27	57
6	1	18	23	23	39	36	7	50	20	21	54
7	1	31	27	17	35	37	8	3	24	15	50
8	1	44	31	11	32	38	8	16	28	9	47
9	1	57	35	5	28	39	8	29	32	3	43
10	2	10	38	59	25	40	8	42	35	57	40
11	2	23	42	53	21	41	8	55	39	51	36
12	2	36	46	47	18	42	9	8	43	45	33
13	2	49	50	41	14	43	9	21	47	39	29
14	3	2	54	35	11	44	9	34	51	33	26
15	3	15	58	29	7	45	9	47	55	27	22
16	3	29	2	23	4	46	10	0	59	21	19
17	3	42	6	17	0	47	10	14	3	15	15
18	3	55	10	10	57	48	10	27	7	9	12
19	4	8	14	4	53	49	10	40	11	3	8
20	4	21	17	58	50	50	10	53	14	57	5
21	4	34	21	52	46	51	11	6	18	51	1
22	4	47	25	46	43	52	11	19	22	44	58
23	5	0	29	40	39	53	11	32	26	38	54
24	5	13	33	34	36	54	11	45	30	32	51
25	5	26	37	28	32	55	11	58	34	26	47
26	5	39	41	22	29	56	12	11	38	20	44
27	5	52	45	16	25	57	12	24	42	14	40
28	6	5	49	10	22	58	12	37	46	8	37
29	6	18	53	4	18	59	12	50	50	2	33
30	6	31	56	58	15	60	13	3	53	56	30

O MOVIMENTO DA LUA EM ANOS E PERÍODOS DE 60 ANOS

Anos	Movimento					Anos	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	2	28	42	45	17	31	4	50	5	23	57
2	4	57	25	30	34	32	1	18	48	9	14
3	1	26	8	15	52	33	3	47	30	54	32
4	3	54	51	1	9	34	0	16	13	39	48
5	0	23	33	46	26	35	2	44	56	25	6
6	2	52	16	31	44	36	5	13	39	10	24
7	5	20	59	17	1	37	1	42	21	55	41
8	1	49	42	2	18	38	4	11	4	40	58
9	4	18	24	47	36	39	0	39	47	26	16
10	0	47	7	32	53	40	3	8	30	11	33
11	3	15	50	18	10	41	5	37	12	56	50
12	5	44	33	3	28	42	2	5	55	42	8
13	2	13	15	48	45	43	4	34	38	27	25
14	4	41	58	34	2	44	1	3	21	12	42
15	1	10	41	19	20	45	3	32	3	58	0
16	3	39	24	4	37	46	0	0	46	43	17
17	0	8	6	49	54	47	2	29	29	28	34
18	2	36	49	35	12	48	4	58	12	13	52
19	5	5	32	20	29	49	1	26	54	59	8
20	1	34	15	5	46	50	3	55	37	44	26
21	4	2	57	51	4	51	0	24	20	29	44
22	0	31	40	36	21	52	2	53	3	15	1
23	3	0	23	21	38	53	5	21	46	0	18
24	5	29	6	6	56	54	1	50	28	45	36
25	1	57	48	52	13	55	4	19	11	30	53
26	4	26	31	37	30	56	0	47	54	16	10
27	0	55	14	22	48	57	3	16	37	1	28
28	3	23	57	8	5	58	5	45	19	46	45
29	5	52	39	53	22	59	2	14	2	32	2
30	2	21	22	38	40	60	4	42	45	17	21

O MOVIMENTO DA LUA EM DIAS E PERÍODOS DE 60 DIAS E MINUTOS-DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	13	13	45	39	31	6	50	6	35	20
2	0	26	27	31	18	32	7	3	20	20	59
3	0	39	41	16	58	33	7	16	34	6	39
4	0	52	55	2	37	34	7	29	47	52	18
5	1	6	8	48	16	35	7	43	1	37	58
6	1	19	22	33	56	36	7	56	15	23	37
7	1	32	36	19	35	37	8	9	29	9	16
8	1	45	50	5	14	38	8	22	42	54	56
9	1	59	3	50	54	39	8	35	56	40	35
10	2	12	17	36	33	40	8	49	10	26	14
11	2	25	31	22	13	41	9	2	24	11	54
12	2	38	45	7	52	42	9	15	37	57	33
13	2	51	58	53	31	43	9	28	51	43	13
14	3	5	12	39	11	44	9	42	5	28	52
15	3	18	26	24	50	45	9	55	19	14	31
16	3	31	40	10	29	46	10	8	33	0	11
17	3	44	53	56	9	47	10	21	46	45	50
18	3	58	7	41	48	48	10	35	0	31	29
19	4	11	21	27	28	49	10	48	14	17	9
20	4	24	35	13	7	50	11	1	28	2	48
21	4	37	48	58	46	51	11	14	41	48	28
22	4	51	2	44	26	52	11	27	55	34	7
23	5	4	16	30	5	53	11	41	9	19	46
24	5	17	30	15	44	54	11	54	23	5	26
25	5	30	44	1	24	55	12	7	36	51	5
26	5	43	57	47	3	56	12	20	50	36	44
27	5	57	11	32	43	57	12	34	4	22	24
28	6	10	25	18	22	58	12	47	18	8	3
29	6	23	39	4	1	59	13	0	31	53	43
30	6	36	52	49	41	60	13	13	45	39	22

DEMONSTRAÇÃO DA PRIMEIRA DESIGUALDADE DA LUA, QUE OCORRE NA LUA NOVA E NA LUA CHEIA

Expusemos os movimentos uniformes da Lua na medida em que nos foi possível conhecê-los até o presente. Agora temos de dedicar a nossa atenção a expor a não uniformidade, o que faremos por meio de um epiciclo. Será considerada, em primeiro lugar, a desigualdade que ocorre nas conjunções e oposições do Sol. Com esta finalidade os antigos astrónomos puseram à prova os seus notáveis talentos usando séries de três eclipses lunares. Seguiremos o caminho assim preparado por eles e tomaremos três eclipses cuidadosamente observados por Ptolomeu. Compará-los-emos com três outros eclipses observados, com não menor cuidado, para podermos verificar se os movimentos regulares já expostos estão correctos. Na nossa exposição, à imitação dos antigos, consideraremos os movimentos médios do Sol e da Lua, em relação à posição do equinócio da Primavera, como uniformes. Com efeito, a irregularidade devida à não uniforme precessão dos equinócios não é detectável em tão curto intervalo de tempo, mesmo que ele seja de 10 anos.

O primeiro eclipse que Ptolomeu [*Almagesto*, IV, 6] aproveitou, e deu-se no 17.º ano do reinado de Adriano, no fim do dia 20 de Pauni, o segundo mês do calendário egípcio, ou no ano 133 da era cristã, a 6 de Maio, ou seja, o dia anterior às Nonas. Foi um eclipse total e o seu tempo médio foi de $^3/_4$ de uma hora igual, antes da meia-noite, em Alexandria. Se fosse em Frombork ou Cracóvia, teria sido 1 $^3/_4$ hora antes da meia-noite, à qual se seguiu o dia 7 de

Maio. A posição do Sol era $3^1/_4{}^o$ em Touro, mas $12^o\ 21'$ em Touro, em relação ao seu movimento médio.

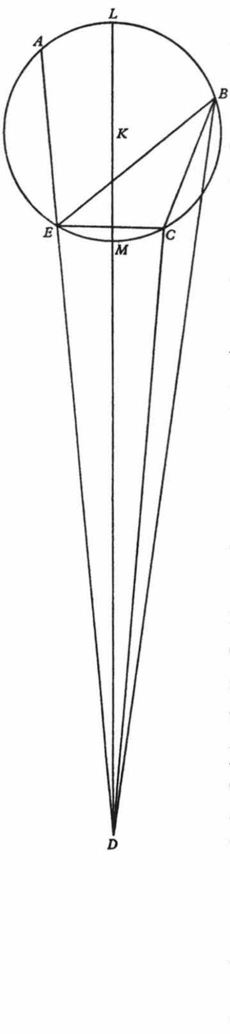
Ptolomeu diz que o segundo foi no 19.º ano do reinado de Adriano, depois de terminado o 2.º dia do mês de Choiach, que é o quarto do calendário egípcio. Era o dia 20 de Outubro do ano 134 da era Cristã. A área obscurecida começava do Norte numa extensão de $^5/_6$ do diâmetro da Lua e o seu tempo médio foi uma hora igual em Alexandria, antes da meia-noite, mas em Cracóvia, duas horas. O Sol estava em $25\ ^1/_6{}^o$ do signo da Balança, mas em relação ao seu tempo médio, em $26^o\ 43'$ do mesmo signo.

O terceiro eclipse ocorreu no 20.º ano do reinado de Adriano, depois de terminado o dia 19 de Farmuti, o oitavo mês do calendário egípcio. Era o ano 136 da era Cristã, no final do dia 6 de Março. O eclipse foi mais uma vez na parte Norte, abrangendo metade do diâmetro; e o seu tempo médio foram quatro horas iguais, em Alexandria, mas três depois da meia-noite, em que se estava a 7 de Março, em Cracóvia. O Sol encontrava-se então em $14^o\ 5'$ de Peixes e $11^o\ 44'$ no mesmo signo, em relação ao seu movimento médio.

Ora, é claro que durante o intervalo de tempo entre o primeiro e o segundo eclipse, a Lua fez o mesmo percurso do que o Sol, no seu movimento aparente, não contando, evidentemente, os círculos completos, isto é, $161^o\ 55'$. Entre o segundo e o terceiro, foi de $138^o\ 55'$. Mas no primeiro intervalo, houve 1 ano, 166 dias e $23^3/_4$ horas iguais, em relação ao tempo aparente, sendo, no entanto, $23^5/_8$ horas depois da correcção. No segundo intervalo, houve 1 ano, 137 dias, e simplesmente 5 horas, mais correctamente $5^1/_2$ horas. O movimento uniforme do Sol combinado com o da Lua, no primeiro intervalo, descontando os círculos completos, foi $169^o\ 37'$; e o movimento de anomalia [da Lua], $110^o\ 21'$. No segundo intervalo, o primeiro movimento do Sol e da Lua foi $137^o\ 34$ e o movimento de anomalia de 81° 36′. É pois claro que, no primeiro intervalo, uma revolução de 110° 21′ do epiciclo, subtrai 7° 42′ ao movimento médio da Lua; e, no segundo intervalo, uma revolução de 81° 36′ [do epiciclo] acrescenta 1° 21′.

Sendo assim, descrevamos o epiciclo lunar *ABC*. Neste epiciclo, o primeiro eclipse será em *A*, o segundo em *B*, e o terceiro em *C*. Suponhamos que o movimento da Lua é também nessa direcção, para Oeste, na parte superior do epiciclo. Seja também o arco *AB* igual a 110° 21′ ao qual, como dissemos, se subtrai 7° 42′ do movimento médio da Lua na eclíptica; e *BC*, igual a 81° 3649, a que acrescenta 1° 21′ de movimento médio da Lua na eclíptica. O resto do círculo *CA*, é igual a 168° 3′ que adicionarão os restantes 6° 21′ [da prostaférese; 1° 21′ + 6° 21′ = 7° 42′].

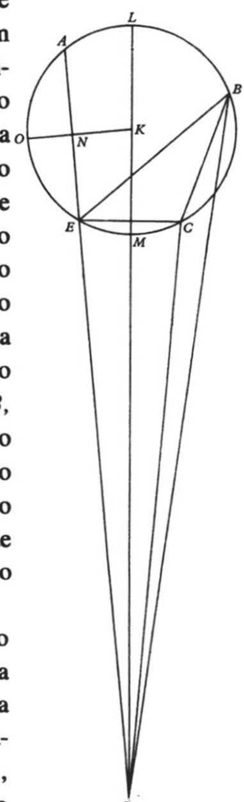
Mas uma vez que a ápside superior do epiciclo não está nos arcos *BC* e *CA*, dado que adicionam e são inferiores a um semicírculo, tem de se encontrar necessariamente em *AB*. Tomemos pois *D* como centro da Terra, à volta do qual o epiciclo se move uniformemente. A partir dele tracemos as linhas *DA*, *DB* e *DC* para os pontos dos eclipses. Unamos *BC*, *BE* e *CE*. Ora, visto que o arco *AB* corresponde a 7° 42′ da eclíptica, o ângulo *ADB* será 7° 42′ no sistema em que 180° equivalem a 2 ângulos rectos; mas no sistema em que 360° equivalem a 2 ângulos rectos, o ângulo terá 15° 24′[= 2× 7° 42′]. No primeiro sistema o ângulo *AEB*, inscrito na circunferência, e externo do triângulo *BDE*, mede 110° 21′. Por conseguinte, o ângulo *EBD* é igual a 94° 57′ [= 110° 21′ − 15° 24′]. Mas se são dados os ângulos de um triângulo também são dados os lados, e *DE* tem 147 396 unidades, *BE* 26 798, quando o diâmetro do círculo em que o triângulo está inscrito tem 200 000. Ora, visto que o arco *AEC* subentende a 6° 21′ da eclíptica, o ângulo *EDC* terá 6° 21′ no caso de 180° serem iguais a dois ângulos rectos. Pelo contrário se 360° forem iguais a dois ângulos rectos, o mesmo ângulo terá 12° 42′. De igual



modo o ângulo AEC mede 191° 57′ [= 111° 21′ + + 81° 36′]. Sendo este um ângulo externo ao triângulo CDE, deixa, depois da subtracção do ângulo D, o terceiro ângulo ECD, com 179° 15′ [= 197° 57′ − 12° 42′] no mesmo sistema de medida. Daqui resulta que os lados DE e CE são dados com 199 996 e 22 120 unidades, no sistema de unidades em que o diâmetro do círculo circunscrito tem 200 000. Mas no sistema de unidades em que DE é igual a 147 396 e BE *a* 26 798, CE tem 16 302. Portanto, visto que mais uma vez no triângulo BEC são dados os dois lados, BE e EC, e o ângulo E, com 81° 36′, é igual ao arco BC, teremos também o terceiro lado, BC, com 17 960, no mesmo sistema de unidades, segundo os teoremas sobre os triângulos planos. Mas, se o diâmetro do epiciclo tem 200 000 unidades, a corda BC, que subtende um arco de 81° 36′, terá 130 684 unidades. Na razão dada entre os lados restantes, ED terá 1 072 684 unidades, CE 118 637 e o arco CE 72° 46′ 10″.

Mas, de harmonia com a construção, o arco CEA é igual a 168° 3′. Por conseguinte, o arco EA, diferença entre CEA e CE, tem 95° 16′ 50″ [= 168° 3′ − 72° 46′ 10″]; e a sua corda, 147 786 unidades. Por isso, toda a linha AED tem 1 220 460 unidades [= 147786 + 1 072 684]. Dado porém que o segmento EA é menor do que um semicírculo, o centro do epiciclo não ficará dentro dele mas na parte complementar, $ABCE$. Seja então K o centro do epiciclo. Tracemos DM e KL passando pelas duas ápsides. Seja L a ápside superior e M a inferior. Ora é evidente que, pelo 30.° teorema do III livro de Euclides, o rectângulo formado por AD e DE é igual ao rectângulo formado por LD e DM. Mas como LM, o diâmetro do círculo, é cortado ao meio em K, sendo DM uma sua extensão em linha recta, o rectângulo formado por LD e DM mais $(KM)^2$ é igual a $(DK)^2$. Assim DK é dada numa extensão de 1 148 556 unidades, no sistema em que LK tem 100 000. Disto resulta que *LK* terá 8 706 unidades, como *DKL* tem 100 000. Este é o raio do epiciclo.

Tendo completado este cálculo, tracemos *KNO*, perpendicular a *AD*. Ora, como a razão entre *KD*, *DE* e *EA* é dada em unidades do sistema em que *LK* é igual a 100 000, sendo *NE*, metade de *AE* [= 147 786], tem 73 893 unidades; assim *DEN* = 1 147 577 = *DE* + *EN*. Mas, no triângulo *DKN*, são dados os dois lados *DK* e *ND*. O ângulo *N*, é um ângulo recto. Portanto, o ângulo ao centro *NKD* mede 86° 38$^1/_2$′ sendo igual ao arco *MEO*. Portanto *LAO*, o seu suplemento, mede 93° 21$^1/_2$′. Subtraindo-lhe *OA*, metade de *AOE* [*AOE* = 95° 16′ 50″] = 47° 38$^1/_2$′, o resto, *LA*, tem 45° 43′, a distância entre a Lua e a ápside superior do epiciclo ou a anomalia [no primeiro eclipse]. Ora todo o arco *AB* era igual a 110° 21′. Portanto o arco *LB*, a diferença entre *AB* e *LA*, mede 64° 38′ que é a anomalia do segundo eclipse. Por fim, todo o arco *LBC* mede 146° 13′. Lá teve lugar o terceiro eclipse. Será agora evidente que, partindo do princípio de que o ângulo *DKN* mede 86° 38′, sendo 360° iguais a quatro ângulos rectos, a parte restante do ângulo recto *KDN* mede 3° 22′. Esta é a prostaférese que a anomalia acrescenta ao primeiro eclipse. Ora, todo o ângulo *ADB* media 7° 42′. Por conseguinte, o ângulo *LDB*, a diferença entre *ADB* e *ADL*, mede 4° 20′. É isto o que o arco *LB* subtrai do movimento regular da Lua, no segundo eclipse. E porque o ângulo *BDC* media 1° 21′, o ângulo *CDM*, diferença entre o ângulo *LDB* e o ângulo *BDC*, mede 2° 59′. É esta a prostaférese a subtrair pelo arco *LBC*, no terceiro eclipse.



Portanto, a posição média da Lua, isto é, o centro *K*, no primeiro eclipse, era 9° 53′ em Escorpião, porque a sua posição aparente era em 13° 15′ de Escorpião, isto é, numa posição correspondente à ocupada pelo Sol, em Touro, diametralmente oposta. Do mesmo modo, no segundo eclipse, o movimento médio da Lua era de 29$^1/_2$°, em Áries e no terceiro, em 17º 4′ de Virgem. As distâncias uniformes entre a Lua e o Sol eram de 177° 33′ no primeiro eclipse; 182° 47′ no segundo e 185° 20′ no terceiro.

Assim procedeu Ptolomeu [*Almagesto*, IV, 6]. Seguindo o seu exemplo, passemos já a outro conjunto de três eclipses, cuidadosamente observados por nós. O primeiro foi no ano 1511 da era cristã, quando eram passados 6 dias do mês de Outubro, e a Lua começou a entrar em eclipse 1 $^1/_8$ hora igual, antes da meia-noite, retomando a visibilidade completa às 2 $^1/_3$ horas depois da meia-noite, a que se seguiu a manhã do dia 7 de Outubro, ou as Nonas. Este eclipse total da Lua ocorreu quando o Sol estava em 22º 25′ de Balança, ou em relação ao movimento uniforme, em 23º 13′ do mesmo signo.

Observámos o segundo eclipse no ano 1522 da era Cristã, passados que eram 5 dias de Setembro. Foi também um eclipse total que começou $^2/_5$ de horas iguais, antes da meia--noite, e o seu ponto médio foi 1 $^1/_3$ horas depois da meia-noite, a que se seguiu o dia 6 de Setembro, o oitavo antes dos Idos (1). O Sol estava então em 22$^1/_5$º da Virgem, mas em relação ao movimento uniforme, em 23º 49 de Virgem.

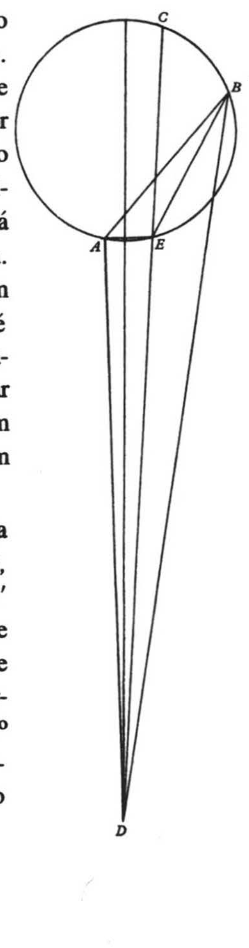
O terceiro eclipse foi no ano de 1523 da era Cristã, quando já eram passados 25 dias do mês de Agosto. Começou às 3 horas menos um quinto, antes da meia-noite. Foi também um eclipse total e o seu ponto médio às 4 $^5/_{12}$ horas depois da meia-noite, quando estava para romper o dia 26 de Agosto. O Sol estava em 11º 21′, de Virgem ou, em relação ao seu movimento regular, em 13º 2′ de Virgem. Também aqui é evidente que a distância entre as verdadeiras posições do Sol e da Lua, desde o primeiro até o segundo eclipse, foi 329º 47′; e do segundo até o terceiro, 349º 9′.

Ora, o tempo do primeiro ao segundo eclipse são 10 anos iguais, 377 dias, e, em relação ao tempo aparente, mais $^3/_4$ hora, mas $^4/_5$ hora segundo o tempo uniforme cor-

(1) Idos de Setembro: 13 de Setembro.

rigido. Do segundo ao terceiro, foram 354 dias, mais $3^{1}/_{12}$ horas, mas $3^{9}/_{60}$ horas pelo tempo uniforme. No primeiro intervalo, o movimento médio combinado do Sol e da Lua são 334° 47′, descontados os círculos completos, e o movimento uniforme [e o movimento da anomalia da Lua atingiu 250° 36′, subtraí 50 dos 5° (= 334° 47′ – 321° 47′) do movimento uniforme]. No segundo intervalo, o movimento médio do Sol e da Lua combinados 346° 10′, e o movimento de anomalia, 306° 43′, com 2° 59′ a juntar ao movimento médio.

Seja agora *ABC* o epiciclo, *A* a posição da Lua no ponto médio do primeiro eclipse, *B* no segundo e *C* no terceiro. Suponhamos que o movimento do epiciclo é de *C* para *B* e de *B* para *A*, isto é, no arco superior para Oeste e no inferior para Este. Seja também o arco *ACB* de 250° 36′ subtraindo 5° do movimento médio da Lua, como dissemos, no primeiro período de tempo. Além disto, o arco *BAC* terá 306° 43′, acrescentando 2° 59′ ao movimento médio da Lua. Por conseguinte o arco *AC*, diferença entre *ACB* e *CB*, tem 197° 43′, subtraindo os restantes 2° 1′. Ora, visto que *AC* é maior do que um semicírculo e é subtractivo, tem necessariamente de conter a ápside superior [Assim, não pode estar em *BA* ou *CBA*, cada um dos quais é menor do que um semicírculo e aditivo, pois a diminuição do movimento tem lugar próximo do apogeu].



Tomemos então *D*, no lado oposto, como centro da Terra, e juntemos *AD*, *DB*, DEC, *AB*, *AE* e *EB*. Ora *CEB*, o ângulo externo do triângulo *DBE*, é dado e igual a 53° 17′ que é o valor do arco *CB*, diferença entre a circunferência e o arco *BAC*; o ângulo *BDE*, como ângulo ao centro, mede 2° 59′ mas como ângulo na circunferência, 5° 59′ e, portanto, o ângulo *EBD*, diferença entre *CEB* e *BDE*, mede 47° 19′ [57° 17′ – 5° 58′]. Assim, o lado *BE* tem 1042 unidades e o lado *DE* tem 8 024, tendo o raio do círculo, no qual o triângulo está inscrito, 10 000 unidades.

De modo semelhante o ângulo *AEC* mede 197° 19′ pois determina no círculo o arco *AC*. O ângulo ao centro *ADC* é igual a 2° 1′ mas 4° 2′ se for na circunferência [1]. Assim, o último ângulo do triângulo, *DAE*, mede 193° 17′, no sistema em que 360° equivalem a 2 ângulos rectos. Portanto também os lados são dados e no sistema em que o raio do círculo, onde está inscrito o triângulo *ADE*, tem 10 000 unidades, *AE* tem 702, e *DE* 19 865, mas no sistema em que *DE* tem 8 024, *AE* tem 283 e *EB* 1 042.

Teremos então mais uma vez um triângulo *ABE*, no qual os dois lados *AE* e *EB* são dados. O ângulo *AEB* mede 250° 36′, equivalendo 360° a dois ângulos rectos. Daqui se segue, segundo os teoremas sobre os triângulos planos, que *AB* terá 1 227 unidades no mesmo sistema em que *EB* tem 1 042. Assim obtivemos a razão entre estas linhas *AB*, *EB* e *ED*. Por ela também se poderá conhecer que, no sistema em que o raio o epiciclo tem 10 000 unidades, *AB* tem 16 323, *ED* tem 106 751 e *EB* tem 13 583. Por isso igualmente se verifica que o arco *EB* = 87° 41′. Este forma com *BC* todo o arco *EBC* com 140° 58′. A corda correspondente *CE* tem 18 851 unidades e toda a linha *CED* = 125 602 [=*ED* + *CE* = 106 751 + 18 851].

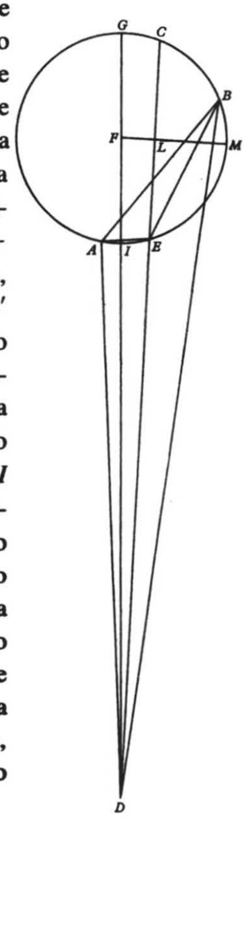
Marquemos agora o centro do epiciclo que necessariamente cairá no segmento *EAC*, pois é maior do que um semicírculo. Seja *F*. Prolonguemos *DIFG* numa linha recta pela ápside inferior *I* e pela superior *G*. Mais uma vez é evidente que o rectângulo formado por *CD* e *DE*, é igual ao rectângulo formado por *GD* e *DI*. Mas o rectângulo formado por *GD* e *DI*, mais o quadrado de *FI*, é igual ao quadrado de *DF*. Daqui resulta que *DIF* tem 116 226 unidades no sistema em que *FG* tem 10 000. Por conseguinte *FG* terá 8 604 unidades no sistema em que *DF* tem

---

(1) Ângulo no centro e ângulo na circunferência são expressões próprias da época de Copérnico. Mantivemo-las.

100 000. Isto condiz com o que verificámos ter sido afirmado por muitos astrónomos que nos precederam, desde Ptolomeu.

Do centro *F* tracemos agora a perpendicular *FL* a *EC*. Prolonguemos a linha recta *FLM* que bissectará *CE* no ponto *L*. Ora, dado que a linha recta *ED* tem 106 751 unidades e metade de *CE*, que é *LE*, tem 9 426, toda a recta *DEL* terá 116 177, no sistema em que *FG* tem 10 000 e *DF* 116 226. Ora, no triângulo *DFL*, os lados *DF* e *DL* são dados. O ângulo *DFL* com 88° 21′ é dado, e o ângulo *FDL*, com 1° 39′, é conhecido. O arco *IEM* tem igualmente 88° 21′ e *MC*, metade de *EBC*, 70° 29′, todo o arco *IMC* = 158° 50′ [= 88° 21′ + 79° 29′], e o suplemento de *GC*, 21° 10′ [= 180° − 158° 20]. Esta era a distância entre a Lua e o apogeu do epiciclo ou a posição da anomalia no terceiro eclipse. No segundo eclipse, *GBC* era igual a 74° 27′ [= *LGC* + *CB* = 21° 10′+ 53° 17′], e, no primeiro eclipse, todo o arco *GBA* = 183° 51 [= *GB* + + *BA* = 74° 27′+ (109° 24′= 360° − 256° 36′]. Ora, no terceiro eclipse, o ângulo ao centro, *IDE* media 1° 39′ que é a prostaférese subtractiva. No segundo eclipse, todo o ângulo *IDB* é igual a 4° 38′, sendo também uma prostaférese subtractiva. Este ângulo é definido por *GDC* igual a 1° 39′ e *CDB* igual a 2° 59′. Por conseguinte, subtraindo *IDB* de todo o ângulo *ADB* com 5°, o resto é o ângulo *ADI* com 22′ que se acrescentam ao movimento regular no primeiro eclipse. Segue-se que a posição uniforme da Lua no primeiro eclipse era de 22° 3′ em Áries, mas a sua posição aparente, 22° 25′, a mesma posição que o Sol ocupava no lado oposto de Balança. Assim também, no segundo eclipse, a posição média da Lua era de 26° 50′, de Peixes, e no terceiro, 13° no mesmo signo. O movimento médio da Lua que faz a separação do movimento anual da Terra, era, no primeiro eclipse, 117° 51′, no segundo, 182° 51′, e no terceiro, 179° 58′.



VERIFICAÇÃO DO QUE SE DISSE ACERCA DOS MOVIMENTOS UNIFORMES DA LUA EM LONGITUDE E DA ANOMALIA

A partir do que dissemos acerca dos eclipses da Lua, poder-se-á verificar se os movimentos uniformes da Lua, que acabamos de descrever, estão correctos. Com efeito mostrou-se que no segundo eclipse da primeira série, a distância entre a Lua e o Sol era 182° 47′ e a anomalia 64° 38′. Na última série de eclipses do nosso tempo, no segundo eclipse, o movimento da Lua em relação ao Sol, eram 182° 51′ e a anomalia 74° 27′. É claro que no período intermédio há 17 166 meses completos e quase 4 minutos anuais. Também o movimento de anomalia, descontando os círculos completos, era de 9° 49′ [= 74° 27′ − 64° 38′]. Desde o ano 19 do reinado de Adriano, no dia 2 do mês egípcio de Choiach, 2 horas antes da meia-noite que precedia o dia 3, até a 1 $^1/_3$ hora, depois da meia-noite, do dia 5 de Setembro do ano 1522 da era cristã, há 1 388 anos egípcios, 302 dias, mais 3 $^1/_3$ horas, segundo o tempo aparente, ou seja 3^h 34^m em tempo uniforme. Neste intervalo, além das revoluções completas, em 17 165 meses regulares, devia ter havido 359° 38′ de acordo com Hiparco e Ptolomeu. Por outro lado, a anomalia foi de 9° 39′ segundo Hiparco, mas 9° 11′ segundo Ptolomeu. Para ambos o movimento da Lua tem menos 26′ [= 360° 4′ − 359° 8′], enquanto a anomalia é inferior em 38′ [= 9° 49′ − 9° 11′], no caso de Ptolomeu, e 10′ [= 9° 49′ − 9° 39′] no caso de Hiparco. Quando se adicionam estas diferenças para menos, os resultados estão de acordo com os cálculos feitos atrás.

A POSIÇÃO DA LUA EM LONGITUDE E A ANOMALIA

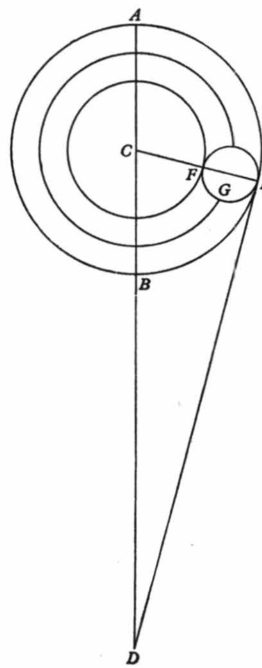
Aqui também, como atrás [III, 23], devemos determinar as posições da Lua em longitude e a anomalia nos inícios estabelecidos para as eras: as Olimpíadas, a era de Alexandre, a de César, a de Cristo e qualquer outra que se queira.

Assim, se considerarmos o segundo eclipse dos três antigos que ocorreu no ano 19 do reinado de Adriano, no dia 2 do mês egípcio de Choiach, 1 hora igual antes da meia-noite, em Alexandria, mas 2 horas antes da meia-noite para nós, no meridiano de Cracóvia, verificaremos que, desde o começo da era cristã até este momento, decorreram 133 anos egípcios, 325 dias e 22 horas em números redondos, mas 21 horas e 37 minutos exactamente. Neste tempo, o movimento da Lua segundo o nosso cálculo, é 332° 49′ e o movimento da anomalia 217° 3249. Quando se subtraírem estes números do número correspondente, verificado no eclipse, o resto, para a distância média entre a Lua e o Sol, é de 209° 58′, e de 207° 7′ para a anomalia, no começo da era cristã, à meia-noite que precede o 1.° de Janeiro. Antes desta era cristã, há 193 Olimpíadas, 2 anos, 194$^{1}/_{2}$ dias, equivalentes a 775 anos egípcios, 12$^{1}/_{2}$ dias ou, calculando com mais rigor, 12 horas e 11′. De modo semelhante, desde a morte de Alexandre até o nascimento de Cristo há 323 anos egípcios e 130$^{1}/_{2}$ dias pelo tempo aparente, mas 130 dias mais 12^{h} 16′ em tempo exacto. De César ao nascimento de Cristo, há 45 anos egípcios e 12 dias, condizendo aqui o tempo aparente com o tempo uniforme. Se, portanto, subtrairmos os movimentos correspondentes a estas diferenças de tempo, das posições da era cristã, cada uma na sua categoria, teremos para a meia-noite do dia 1 do mês de Hecatombéon, na primeira Olimpíada, a distância uniforme entre a Lua e o Sol, 39° 44′, e a anomalia, 46° 20′; para a era de Alexandre, ao meio-dia do dia 1 do mês de Tot, a distância da Lua ao Sol era 310° 44′ e a anomalia 85° 41′. Para a era de César, à meia-noite anterior ao dia 1 de Janeiro, a Lua estava a 350° 39′ do Sol e a anomalia era de 17° 58′. Todos estes números são referidos ao meridiano de Cracóvia, pois Frombork, na foz do Vístula, cidade onde geralmente fizemos as nossas observações, está neste meridiano, assim como Dirráchio na Macedónia, antigamente chamada Epidamo.

A SEGUNDA DESIGUALDADE DA LUA E A RAZÃO ENTRE O PRIMEIRO EPICICLO E O SEGUNDO

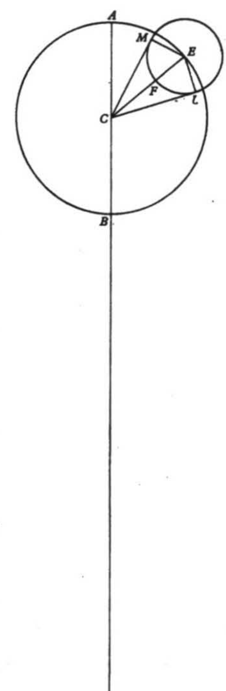
Expressámos assim os movimentos uniformes da Lua juntamente com a sua primeira desigualdade. Devemos agora procurar conhecer qual a razão entre o primeiro e o segundo epiciclos, e a distância de ambos ao centro da Terra. A maior desigualdade entre o movimento médio e o movimento aparente encontra-se, como dissemos, a meio caminho entre as ápsides superior e inferior, nas quadraturas, quando a Lua aumenta ou diminui, no quarto crescente ou minguante, e atinge $7^2/_3$°, também de acordo com os dados fornecidos pelos antigos [*Almagesto*, V, 3]. Com efeito, eles observaram o tempo em que a Lua, no quarto crescente ou minguante, atingia mais de perto a distância média do epiciclo. Isto ocorreu próximo da tangente traçada a partir do centro da Terra, como facilmente se podia perceber pelo cálculo acima exposto. Como a Lua estava então a cerca de 90° da eclíptica a partir do seu nascimento ou ocaso, evitaram o erro que podia aparecer no movimento em longitude, devido à paralaxe. Com efeito, neste tempo, o círculo que passa pelo zénite do horizonte, intersecta a eclíptica em ângulos rectos e não permite variação em longitude; a variação ocorre totalmente em latitude. Por conseguinte, determinaram a distância entre a Lua e o Sol com a ajuda de um instrumento, o astrolábio. Depois de se fazer a comparação, verificou-se que a Lua se afastava do seu movimento regular em $7^2/_3$°, como dissemos, em vez de 5°.

Tracemos agora o epiciclo *AB*, com o centro em *C*,e, do centro da Terra, *D*, prolonguemos a linha recta *DBCA*. Seja *A* o apogeu do epiciclo e *B* o perigeu. Tracemos uma tangente ao epiciclo, *DE*, e juntemos *CE*. Ora, uma vez que a prostaférese está no seu máximo no ponto de contacto, e, por hipótese, é 7º 40′, igual ao ângulo *BDE*, sendo o ângulo *CED* um ângulo recto, pois é definido pela tangente ao círculo *EB*, segue-se que *CE* tem 1 334 unidades,



no sistema em que o raio *CD* tem 10 000. Mas na Lua cheia e na Lua nova, era muito menor, tendo cerca de 861 unides. Com o mesmo centro [*C*], *F* [assinala] a circunferência des. Com o mesmo centro *F* [assinala] a circunferência que foi percorrida pela Lua nova e pela Lua cheia. Portanto, o resto da linha, *FE*, igual a 474 [= 1 334 − 860] unidades, pois é a diferença entre *CE* e *CF*, e será o diâmetro do segundo epiciclo. Bissectemos *FE*, e seja *C* o seu ponto médio. Toda a linha *CFG* [= *CF* + *FG*] = 1 097 unidades é o raio do círculo descrito pelo centro do segundo epiciclo. Daqui se conclui que *CG* está para *GE* assim como 1 097 está para 237, no sistema de unidades em que *CD* é igual a 10 000 unidades.

A RESTANTE VARIAÇÃO NA QUAL SE VÊ A LUA MOVER-SE NÃO UNIFORMEMENTE A PARTIR DA ÁPSIDE SUPERIOR DO PRIMEIRO EPICICLO



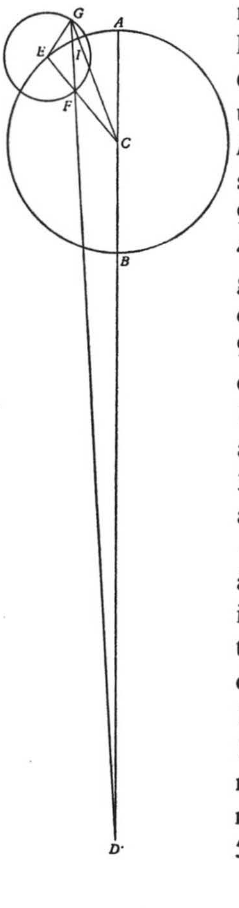
Também por esta demonstração se pode compreender como a Lua no seu primeiro epiciclo se move não uniformemente, ocorrendo a maior desigualdade quando está na sua fase crescente e com meio disco iluminado. Seja então *AB* este primeiro epiciclo descrito pelo movimento médio do centro do segundo epiciclo. Seja *C* o centro do primeiro epiciclo, a sua ápside superior *A*, e a inferior *B*. Tomemos o ponto *E* em qualquer parte da circunferência e unamos *CE*. A razão entre *CE* e *EF*, é igual à razão entre 1 097 e 237. Com *E* como centro e o raio *EF*, descrevamos um segundo epiciclo; tracemos as linhas rectas *CL* e *CM*, tangentes a ele, de um e outro lado. Suponha-se que o epiciclo se move de *A* para *E*, isto é, para Oeste, na parte superior [do primeiro epiciclo] e a Lua de *F* para *L*, também para Oeste. Ora, é claro que se o movimento *AE* é uniforme, o movimento do segundo epiciclo, por *FL*, evidentemente lhe acrescenta o arco *FL*, e lho subtrai quando passa por *MF*. Ora, no triângulo *CEL*, o ângulo em *L* é um ângulo recto, e *EL* tem 237 unidades, no sistema de unidades em que *CE* tem 1 097. Portanto, num sistema em que *CE* tenha 10 000 unidades, *EL* tem 2 160, que, segundo a Tabela, corresponde ao ângulo *ECL*, de 12° 28′, igual a *MEF*, dado que os triângulos *ECL* e *ECM* são semelhantes e iguais. E esta é a variação máxima da desigualdade da

Lua em relação à ápside superior do primeiro epiciclo. Isto acontece quando a Lua no seu movimento médio se desvia 38° 46′ para um e outro lado da linha do movimento médio da Terra. Assim, é claramente evidente que estas prostaféreses máximas ocorrem quando a Lua se encontra à distância média de 38° 46 do Sol e à mesma distância, para um e outro lado, da oposição média.

COMO O MOVIMENTO APARENTE DA LUA SE DEDUZ DOS MOVIMENTOS UNIFORMES DADOS

Tendo ao dispor de todos estes dados, queremos agora mostrar de que modo, partindo daqueles movimentos uniformes da Lua, tomados como base, podemos discutir o movimento regular, servindo-nos de um diagrama e indo buscar um exemplo às observações de Hiparco, de tal maneira que a teoria possa ser confirmada pela experiência [*Almagesto*, V, 5].

No ano 197 da era de Alexandre, no dia 7 de Pauni, o décimo mês egípcio, quando já tinham decorrido $9\ ^1/_3$ horas do dia, Hiparco observando o Sol e a Lua em Rodes, com um instrumento, o astrolábio, verificou que a distância entre um e outro era de $48^1/_{10}{}^\circ$, estando a Lua a Este do Sol. Como ele pensava que esta posição do Sol era em $10^9/_{10}{}^\circ$ de Câncer, segue-se que a Lua estava em 29° de Leão. Nesse tempo nascia em 29° de Escorpião e culminava em 10° de Virgem, em Rodes, onde a altura do pólo Norte é de 36°. A partir daqui, era evidente que a Lua se encontrava a cerca de 90° da eclíptica, em relação ao horizonte, não mostrando qualquer paralaxe em longitude, ou pelo menos ela tinha um valor imperceptível. Ora, esta observação foi feita no dia 17, às $3^1/_2$ horas da tarde correspondentes a 4 horas iguais [de Rodes], quando em Cracóvia deviam ser $3^1{}_6$ horas iguais, pois Rodes está $^1/_6$ hora mais próxima de nós do que Alexandria. Mas desde a morte de Alexandre tinham passado 196 anos, 286 dias mais $3^1/_6$ horas simples, equivalentes a $3^{1}/_{3}$ horas iguais. Nesta altura o Sol no seu movimento médio encontrava-se em 12° 3′ de Câncer, mas, no seu movimento aparente, 10° 40′ do mesmo signo. Daqui resulta que a Lua estava realmente em 28° 37′ de Leão. Contudo, o movimento uniforme da Lua, na sua revolução mensal, era 45° 5′, e o movimento de anomalia 333°, em relação à ápside superior, segundo o meu cálculo. Tomando este exemplo como base, descrevamos o primeiro epiciclo *AB*, com o centro em *C*, o diâmetro *ACB*. Prolonguemos este, numa linha recta, *ABD*, para o centro da Terra. Descrevamos no epiciclo um arco *AEB* de 333°, e juntemos *CE* que dividiremos em *F*. *EF* será assim igual a 237 unidades, e *EC* igual a 1 097. Com o centro em *E* e o raio *EF* descrevamos um epiciclo mais pequeno, *FG*. Suponha-se que a Lua está no ponto *G*, com o arco *FG* igual a 90° 10′, duas vezes o movimento uniforme do Sol, que era 45° 5′. Juntemos *CG*, *EG* e *DG*. Ora, dado que, no triângulo *CEG*, são dados dois lados, *CE* igual a 1 097 unidades, *EG* igual a 237 e a *EF*, com o ângulo *GEC* medindo 90° 10′; segundo os teoremas sobre os triângulos planos, o outro lado, *CG*, tem 1123 unidades, e o ângulo *ECG*, 12° 11′. A partir disto determina-se também o arco *EI* e a prostaférese aditiva da anomalia. Todo o arco *ABEI* tem 345° 1149 [*ABE* + *EI* = 333° + 12° 11′] e o ângulo *GCA*, a diferença entre 360° e *ABEI*, mede 14° 49′ [= 360° − − 345° 11′], que é a verdadeira distância entre a Lua e a ápside superior do epiciclo, *AB*. Também o ângulo *BCG* é igual a 165° 11′ [= 180° + 12° 11′]. Portanto, também no triângulo *GDC* são dados dois lados, *GC* com 1123 unidades e *CD* com 10 000 assim como o ângulo *GCD* igual a 165° 11′. A partir daqui, obtemos ainda o ângulo *CGD* com 1° 29′ e a prostaférese que foi adicionada ao movimento médio da Lua. Assim, a distância verdadeira da Lua em relação ao movimento médio do Sol é igual a 46° 34′[= 45° 5′ + 1° 29′] e a sua posição aparente em 28° 37′ de Leão,

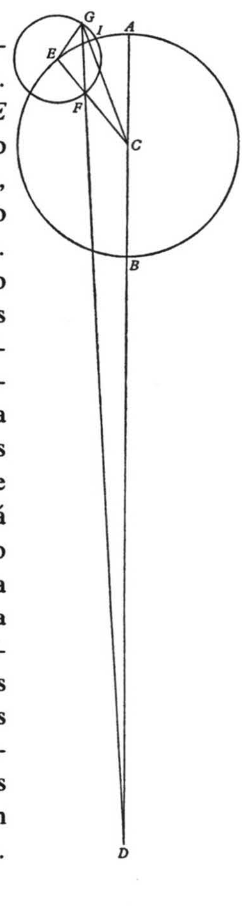


diferia da posição verdadeira do Sol, em 470° 57′, 9′ menos do que nas observações de Hiparco [48° 6′ − 47° 57′ = 9′].

Contudo, ninguém pode suspeitar que, por esta razão, a sua investigação ou o meu cálculo estão errados. Embora haja uma pequena discrepância, vamos mostrar que nem ele nem eu cometemos qualquer erro mas que este é o resultado correcto. Com efeito, se nos lembrarmos que o círculo atravessado pela Lua é oblíquo, teremos de admitir que isto provoca alguma desigualdade em longitude na eclíptica, especialmente próximo das regiões que estão a meio caminho entre ambos os limites, Norte e Sul, e os dois nodos; esta situação está próxima da obliquidade da eclíptica em relação ao equador, como explicámos, ao tratar da não uniformidade do dia natural [III, 26]. Assim também, se transferirmos estas razões para o círculo lunar, que Ptolomeu afirmou estar inclinado sobre a eclíptica [*Almagesto*, V, 5], verificaremos que, nestas posições, as razões mencionadas fazem na eclíptica uma diferença de 7′ em longitude que multiplicada por dois é igual a 14′. Isto ocorre, igualmente, na adição e na subtracção. Com efeito, se o Sol e a Lua estão num quadrante à parte, e o limite Norte ou Sul de latitude está a meio caminho entre eles, então o arco definido na eclíptica é maior 14′ do que o quadrante do círculo lunar. Pelo contrário, no outro quadrante em que os nodos estão nos pontos médios, os círculos que passam pelos pólos da eclíptica definem a mesma quantidade, menos do que um quadrante. É isto o que se passa no caso presente. Dado que a posição da Lua era, cerca do ponto médio entre o limite Sol e a sua intersecção, ascendente com a eclíptica, (intersecção a que os modernos chamam a Cabeça do Dragão), o Sol já tinha passado pela outra intersecção, a descendente, (a que os modernos chamam Cauda do Dragão). Não é nada surpreendente se essa distância lunar de 47° 57′ no seu círculo oblíquo cresceu, pelo menos 7′ quando referida à eclíptica, não contando com o facto de que o Sol, ao aproximar-se do seu ocaso, também tenha introduzido alguma paralaxe subtractiva. Este assunto será discutido mais amplamente ao tratar das paralaxes [IV, 16].

Assim, essa distância [de 48° 6′] entre os astros que Hiparco obtivera servindo-se do instrumento referido, está de acordo com o meu cálculo com notável rigor, quase como se fosse combinado.

EXPLICAÇÃO DA TABELA DAS PROSTAFÉRESES OU NORMALIZAÇÕES LUNARES



Espero, pois, que por meio deste exemplo se compreenda, em geral, o método de calcular o movimento da Lua. Com efeito, no triângulo *CEG*, os dois lados *GE* e *CE* permanecem sempre os mesmos. Mas, através do ângulo *CEG*, que varia constantemente, sendo contudo dado, conhecemos o lado restante *GC* juntamente com o ângulo *ECG*, que é prostaférese, para a normalização da anomalia. Em segundo lugar, quando os dois lados *DC* e *CG*, no triângulo *CDG*, bem como o ângulo *DCE*, são determinados numericamente, pelo mesmo processo o ângulo *D*, no centro da Terra, é conhecido como diferença entre os movimentos uniforme e verdadeiro. Para fazer com que isto seja ainda mais acessível, apresentaremos uma Tabela destas prostaféreses em seis colunas. Depois das duas colunas que contêm o número comum do deferente, a terceira mostrará as prostaféreses que são devidas à dupla rotação mensal do pequeno epiciclo e fazem variar a uniformidade da primeira anomalia. Depois, deixando temporariamente desocupada a coluna seguinte, para receber mais tarde os números, passaremos à quinta coluna onde escreveremos as prostaféreses do primeiro e maior epiciclo, que têm lugar nas conjunções e oposições médias do Sol e da Lua. A maior destas prostaféreses é de 4° 56'. Na última coluna estão colocados os números que indicam quanto as prostaféreses que ocorrem nos quartos da Lua excedem as prostaféreses da 4.ª coluna.

Destes números, o maior é 2º 44′ [=7º 40′ − 4º 56′]. Com a finalidade de fixar os outros excessos, inventaram-se os números proporcionais segundo a razão seguinte. O máximo valor em excesso 2º 44′ foi tomado como 60′ em relação a qualquer outro excesso que ocorre no ponto de contacto da linha conduzida pelo centro da Terra com o pequeno epiciclo. Assim, no mesmo exemplo [IV, 10] tínhamos a linha *CG* igual a 1123 unidades, no sistema em que *CD* é igual a dez mil unidades. Isto provoca a maior prostaférese no ponto de contacto do pequeno epiciclo, 6º 29′, excedendo aquele primeiro máximo, em 1º 33′ [+ 4º 56′ = 6º 29′]. Mas 2º 44′: 1º 33′ = 60º: 34′. Por conseguinte temos a razão entre o excesso existente no semicírculo de pequeno epiciclo e aquele que foi causado pelo arco dado, de 90º 10′. De acordo com isto, no lado oposto aos 90º da Tabela, escreverei 34′. Deste modo, para cada arco do mesmo círculo representado na Tabela, encontramos os minutos proporcionais, que deverão ser mencionados na quarta coluna vazia. Finalmente, na última coluna, juntámos os graus de latitude, Norte e Sul, que discutiremos depois [IV, 13-14]. Com efeito, a comodidade e a vantagem do processo neste caso convenceram-nos a mantermos esta ordenação.

TABELA DAS PROSTAFÉRESE DA LUA

Números comuns		Prostaférese do segundo epiciclo		Minutos proporcionais	Prostaférse do primeiro epiciclo		Acréscimos		Latitude Norte	
°	′	°	′		°	′	°	′	°	′
3	357	0	51	0	0	14	0	7	4	59
6	354	1	40	0	0	28	0	14	4	58
9	351	2	28	1	0	43	0	21	4	56
12	348	3	15	1	0	57	0	28	4	53
15	345	4	1	2	1	11	0	35	4	50
18	342	4	47	3	1	24	0	43	4	45
21	339	5	31	3	1	38	0	50	4	40
24	336	6	13	4	1	51	0	56	4	34
27	333	6	54	5	2	5	1	4	4	27
30	330	7	34	5	2	17	1	12	4	20
33	327	8	10	6	2	30	1	18	4	12
36	324	8	44	7	2	42	1	25	4	3
39	321	9	16	8	2	54	1	30	3	53
42	318	9	47	10	3	6	1	37	3	43
45	315	10	14	11	3	17	1	42	3	32
48	312	10	30	12	3	27	1	48	3	20
51	309	11	0	13	3	38	1	52	3	8
54	306	11	21	15	3	47	1	57	2	56
57	303	11	38	16	3	56	2	2	2	44
60	300	11	50	18	4	5	2	6	2	30
63	297	12	2	19	4	13	2	10	2	16
66	294	12	12	21	4	20	2	15	2	2
69	291	12	18	22	4	27	2	18	1	47
72	288	12	23	24	4	33	2	21	1	33
75	285	12	27	25	4	39	2	25	1	18
78	282	12	28	27	4	43	2	28	1	2
81	279	12	26	28	4	47	2	30	0	47
84	276	12	23	30	4	51	2	34	0	31
87	273	12	17	32	4	53	2	37	0	16
90	270	12	12	34	4	55	2	40	0	0

TABELA DAS PROSTAFÉRESE DA LUA

Números comuns		Prostaférese do segundo epiciclo		Minutos proporcionais	Prostaférse do primeiro epiciclo		Acréscimos		Latitude Norte	
°	′	°	′		°	′	°	′	°	′
93	267	12	3	35	4	56	2	42	0	16
96	264	11	53	37	4	56	2	42	0	31
99	261	11	41	38	4	55	2	43	0	47
102	258	11	27	39	4	54	2	43	1	2
105	255	11	10	41	4	51	2	44	1	18
108	252	10	52	42	4	48	2	44	1	33
111	249	10	35	43	4	44	2	43	1	47
114	246	10	17	45	4	39	2	41	2	2
117	243	9	57	46	4	34	2	38	2	16
120	240	9	35	47	4	27	2	35	2	30
123	237	9	13	48	4	20	2	31	2	44
126	234	8	50	49	4	11	2	27	2	56
129	231	8	25	50	4	2	2	22	3	9
132	228	7	59	51	3	53	2	18	3	21
135	225	7	33	52	3	42	2	13	3	32
138	222	7	7	53	3	31	2	8	3	43
141	219	6	38	54	3	19	2	1	3	53
144	216	6	9	55	3	7	1	53	4	3
147	213	5	40	56	2	53	1	46	4	12
150	210	5	11	57	2	40	1	37	4	20
153	207	4	42	57	2	25	1	28	4	27
156	204	4	11	58	2	10	1	20	4	34
159	201	3	41	58	1	55	1	12	4	40
162	198	3	10	59	1	39	1	4	4	45
165	195	2	39	59	1	23	0	53	4	50
168	192	2	7	59	1	7	0	43	4	53
171	189	1	36	60	0	51	0	33	4	56
174	186	1	4	60	0	34	0	22	4	58
177	183	0	32	60	0	17	0	11	4	59
180	180	0	0	60	0	0	0	0	5	0

CÁLCULO DO MOVIMENTO DA LUA

O método de calcular o movimento aparente da Lua torna-se claro, baseando-nos nas demonstrações anteriores. É o seguinte.

Reduzamos ao tempo uniforme o tempo proposto para o qual procuramos a posição da Lua. Deste, como fizemos para o Sol [III, 25], deduzimos os movimentos médios da Lua em longitude, da anomalia, e também em latitude, que brevemente exporemos [IV, 13], a partir da era cristã ou de qualquer outra época dada . A seguir, estabeleceremos as posições de cada um destes, no tempo dado. Depois, procuraremos na Tabela, a elongação uniforme da Lua ou a distância dupla entre ela e o Sol, e anotaremos a prostaférese apropriada na terceira coluna e os minutos proporcionais que se seguem. Se o número que procurávamos se encontrar na primeira coluna ou for inferior a 180º, acrescentaremos a prostaférese à anomalia da Lua. Mas, se esse número for maior do que 180º ou estiver na segunda coluna, subtrair-se-á a prostaférese da anomalia. Assim, encontramos a anomalia corrigida da Lua e a verdadeira distância entre ela e a ápside superior do primeiro epiciclo. Na posse destes dados, consultaremos de novo a Tabela, e tomaremos as prostaféreses na quinta coluna correspondente, assim como o excesso que vem a seguir, na sexta coluna. Este excesso é acrescentado pelo segundo epiciclo ao primeiro. A sua parte proporcional calculada a partir da razão entre os minutos encontrados e 60 minutos, é sempre acrescentada a esta prostaférese. A soma assim obtida subtrai-se do movimento médio em longitude e latitude, uma vez que a anomalia normalizada seja menor do que 180º ou um semicírculo, e adicionada se a anomalia for maior do que 180º. Assim conseguiremos a distância verdadeira entre a Lua e a posição média do Sol, bem como o seu movimento normalizado em latitude. Não haverá, portanto, qualquer dúvida acerca da verdadeira distância entre a Lua e a primeira estrela, em Áries, através do movimento simples do Sol, ou o equinócio da Primavera, através do seu movimento composto, influenciado pela precessão do equinócio. Finalmente, através do movimento normalizado em latitude na sétima e última coluna da Tabela, teremos os graus de latitude correspondentes a quanto a Lua se desviou da eclíptica. Esta latitude será latitude Norte, quando o movimento em longitude se encontra na primeira parte da Tabela, isto é, se for menor do que 90º, ou maior do que 270º. Caso contrário, será latitude Sul. Acima de 180º a Lua descerá do Norte e ascenderá do seu limite Sul até ter completado os graus restantes do círculo. Deste modo o movimento aparente da Lua, em certo sentido, tem tantas funções ligadas com o centro da Terra como o centro da Terra tem com o Sol.

COMO SE ANALISA E DEMONSTRA O MOVIMENTO EM LATITUDE DA LUA

Devemos agora fazer uma exposição acerca do movimento da Lua em latitude, que é mais difícil de encontrar, pois está rodeado de maiores obstáculos. Com efeito, como dissemos anteriormente [IV, 4], se dois eclipses da Lua forem semelhantes e iguais em todos os aspectos, isto é, se as partes obscurecidas ocuparem a mesma posição Norte e Sul, a Lua estará próxima do mesmo nodo ascendente ou descendente, e as distâncias entre ela e a Terra ou [entre ela e] a ápside superior são iguais. Se estes eclipses assim coincidem, conclui-se que a Lua completou círculos em latitude no seu movimento verdadeiro. Realmente, a sombra da Terra é cónica; se um cone recto é cortado por um plano paralelo à sua base, a secção é um círculo, mais pequeno se o plano está a uma distância maior da base, e maior se se encontra a uma distância menor; e, de modo semelhante, [um círculo] igual [se está] a uma distância igual. Assim, a distâncias iguais da Terra, a Lua passa por círculos iguais da sombra e apresenta os seus discos iguais à nossa vista. Daqui resulta que quando ela apresenta partes iguais, no mesmo lado, a distâncias iguais do centro da sombra, isso dá-nos a conhecer que as latitudes são iguais. Daqui se segue, necessariamente, que a Lua regressou à sua posição primitiva, em latitude; e que as distâncias, entre ela e o mesmo nodo, são também iguais nesses instantes, especialmente se a posição dos dois astros igualmente coincide. Com efeito, uma aproximação ou um desvio da Lua ou da Terra modifica toda a grandeza da sombra, embora numa quantidade tão pequena que é dificilmente detectável. Portanto, como dissemos no caso do Sol [III, 20], quanto maior for o intervalo que decorreu entre os dois eclipses, com mais rigor poderemos conhecer o movimento em latitude da Lua. Mas é raro encontrar dois eclipses nestas circunstâncias (e certamente por isso até agora não os encontrei).

Contudo, verificámos também que havia outro processo de conseguir este objectivo. Com efeito, se permanecessem as outras condições e houvesse eclipses, em lados opostos, e próximo de nodos opostos, isso significaria que no segundo eclipse a Lua tinha chegado a uma posição diametralmente oposta à posição do primeiro eclipse, e tinha descrito um semicírculo além dos círculos inteiros. Isto parecerá suficiente para a investigação deste ponto. Com efeito, encontrei dois eclipses relacionados quase desta maneira.

O primeiro foi no ano 7 do reinado de Ptolomeu Filometor, o ano 150 da era de Alexandre Magno, passados já 27 dias de Famenot, o sétimo mês egípcio, como diz Cláudio [Ptolomeu, *Almagesto,* VI, 5]. Era durante a noite a que se seguiu o dia 28. A Lua esteve em eclipse desde o início da hora oitava até o fim da hora décima, em horas naturais da noite, na cidade de Alexandria, numa extensão máxima de $^{7}/_{12}$ do diâmetro da Lua, próximo do nodo descendente, a partir do Norte. O tempo médio do eclipse foi, portanto, de 2 horas naturais, segundo Ptolomeu, depois da meia-noite, equivalentes a 2 $^{1}/_{2}$ horas iguais, uma vez que o Sol estava em 6° de Touro. Em Cracóvia deviam ter sido $1^{1}/_{3}$ horas iguais. Observámos o segundo eclipse, nesse mesmo meridiano de Cracóvia, em 1509 da era cristã, a 2 de Junho, com o Sol em 21° de Gémeos. O seu ponto médio eram $11^{3}/_{4}$ horas iguais, depois do meio-dia e cerca de $^{8}/_{12}$ do diâmetro da Lua, na sua parte Sul estavam na sombra, próximo do nodo ascendente.

Desde o início da era de Alexandre, por conseguinte, até ao primeiro eclipse, há 149 anos egípcios, 206 dias, mais $14^{1}/_{3}$ em Alexandria. Em Cracóvia, contudo, tinham sido

$13^1/_3$, tempo local, mas $13^1/_2$ horas, tempo uniforme. Nesse tempo, a posição regular da anomalia era de 163° 33′ segundo o nosso cálculo, que coincide quase com Ptolomeu [= 163° 40′], e a prostaférese era 1° 23′, equivalente a quanto a posição verdadeira da Lua era inferior à sua posição uniforme. Para o segundo eclipse, a partir do mesmo início estabelecido, são 1 832 anos egípcios, 295 dias, 11 horas, 45 minutos em tempo aparente, mas 11 horas 55′, em tempo uniforme. Por isso a posição uniforme da Lua era de 182° 18′, a posição da anomalia 159° 55′, mas a posição corrigida 161° 13′; e a prostaférese, igual à quantidade em que o movimento regular estava abaixo do movimento aparente, 1° 44′.

Por conseguinte, nos dois eclipses, a Lua encontra-se claramente a uma distância igual da Terra e o Sol estava nos dois casos quase no seu apogeu. Havia porém uma diferença de um dedo, entre as áreas obscurecidas. O diâmetro da Lua ocupa usualmente cerca de $^1/_2$°, como mostraremos mais tarde [IV, 18]. Um dedo do diâmetro equivale a $^1/_{12}$ de 2 $^1/_2$′, correspondendo a cerca $^1/_2$°, no círculo oblíquo da Lua, perto dos nodos. No segundo eclipse, a Lua estava $^1/_2$° mais afastada do nodo ascendente do que do nodo descendente, no primeiro eclipse. Daqui se conclui que o movimento verdadeiro da Lua em latitude, descontadas as revoluções completas, era evidentemente $179^1/_2$°. Mas entre o primeiro e o segundo eclipse, a anomalia lunar acrescentava 21′ ao movimento uniforme equivalente a quanto uma prostaférese excede outra [1° 44′ − 1° 23′]. Teremos, pois, o movimento regular da Lua em latitude, com 179° 51′ [= 179° 30′ + 21′], tirados os círculos completos. O intervalo entre os dois eclipses foi de 1 683 anos, 88 dias, 22 horas, 25 minutos, em tempo aparente, de acordo com o tempo uniforme. Neste tempo, depois de estarem completas 22 577 revoluções uniformes, há 179° 51′, em conformidade com o valor que mencionámos há pouco.

AS POSIÇÕES DA ANOMALIA DA LUA EM LATITUDE

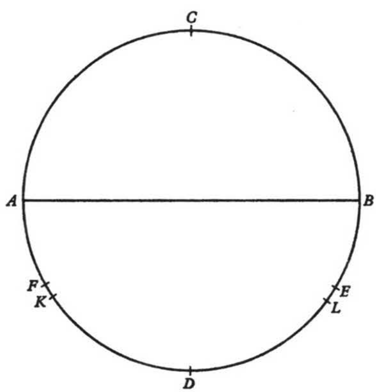
Para determinar as posições deste movimento, também nas épocas previamente estabelecidas, servimo-nos aqui igualmente de dois eclipses da Lua [IV, 13], não no mesmo nodo, nem nas regiões diametralmente opostas, como nos casos anteriores, mas na mesma região, Norte ou Sul, embora mantendo todas as outras condições como dissemos, segundo as regras de Ptolomeu [*Almagesto,* IV, 9]. Assim, conseguiremos alcançar o objectivo que nos propusemos sem qualquer erro.

Ora, o primeiro eclipse, também por nós utilizado para analisar os outros movimentos da Lua [IV, 5], foi aquele que apresentámos como observado por Cláudio Ptolomeu, no ano 19 do reinado de Adriano, passados já dois dias do mês de Choiach, uma hora igual antes da meia-noite, em Alexandria, mas em Cracóvia, duas horas antes da meia-noite, a que se seguia o dia três desse mês. No ponto médio do eclipse estavam encobertos $^5/_6$ do diâmetro, na parte Norte, isto é, dez dedos. O Sol estava em 25° 10′ de Balança. O lugar da anomalia lunar era de 64° 38′ e a sua prostaférese subtractiva de 4° 20′, próximo do nodo descendente.

Observámos o segundo eclipse também com grande cuidado, em Roma, a 6 de Novembro, no ano 1500 da era cristã, duas horas depois da meia-noite que findou com o dealbar do dia 6, mas em Cracóvia que fica 5° a Este, eram

2 $^1/_3$ horas depois da meia-noite. O Sol estava em 23° 16′ de Escorpião. Estavam de novo na sombra dez dedos, na parte Norte. Desde a morte de Alexandre, decorreram 1824 anos egípcios, 84 dias, 14 horas e 20′, em tempo aparente, mas 14 horas 16 minutos em tempo uniforme. Por conseguinte, o movimento médio da Lua era de 174° 14′, a anomalia lunar 294° 40′, ou, normalizada a correcção, 291° 35′; e a prostaférese a adicionar, 4° 28′. É portanto evidente que a Lua em ambos os eclipses se encontrava a distâncias quase iguais da ápside superior e que o Sol, em ambos os casos, estava a cerca de meio caminho da sua ápside. A grandeza da sombra era igual [dez dedos]. Disto resulta que a latitude da Lua era Sul e a mesma. Por conseguinte, as distâncias entre a Lua e os nodos eram iguais, no segundo caso ascendente, e no primeiro descendente. Entre os dois eclipses, há 1366 anos egípcios, 358 dias, mais quatro horas, 20 minutos, em tempo aparente, mas 4 horas, 24 minutos, em tempo uniforme, durante o qual o movimento médio em latitude é de 159° 55′.

Ora, seja *ABCD* o círculo oblíquo da Lua cujo diâmetro *AB* é, a linha de intersecção com a eclíptica. Seja *C* o limite Norte, *D* o limite Sul, *A* o nodo descendente e *B* o nodo ascendente. Na parte Sul, tomemos agora dois arcos iguais, *AF* e *BE*, colocando o primeiro eclipse no ponto *F* e o segundo em *E*. Além disso, a prostaférese *FK* é subtractiva no primeiro eclipse, e *EL*, aditiva, no segundo. Ora, dado que o arco *KL* mede 159° 55′, se lhe juntarmos *FK* com 4° 20′ e *EL* com 4° 28′, todo o arco *FKLE* medirá 168° 43′. A diferença entre este e o semicírculo são 11° 17′. Metade deste arco vale 5° 39′, e é igual a *AF* e *BE*, as distâncias verdadeiras entre os nodos *A* e *B*. Por conseguinte, *AFK* mede 9° 59′ [= 4° 20′ + 5° 39′]. Assim é também claro que *CAFK*, a distância da posição média da latitude ao limite Norte, vale 99° 59′ [= 90° + 9° 59′]. Desde a morte de Alexandre até o tempo desta observação feita neste lugar por Ptolomeu há 457 anos egípcios, 91 dias, mais dez horas, em tempo aparente, mas 9 horas, 54 minutos, em tempo uniforme. Neste intervalo, o movimento médio em latitude é 50° 59′. Quando se subtrai este número de 99° 59′, o resto são 49° para o meio-dia do primeiro mês de Tot, que é o primeiro mês do calendário egípcio, no começo da era de Alexandre Magno, mas no meridiano de Cracóvia. A partir daqui, as posições do movimento da Lua, em latitude, começando no limite Norte, que tomei como origem do movimento, são dadas para todas as outras eras, de acordo com as diferenças dos intervalos. Desde a primeira Olimpíada até a morte de Alexandre Magno, há 451 anos egípcios, 247 dias, dos quais se subtraiem 7 minutos para uniformizar o tempo. Neste



período, o movimento em latitude é igual a 136° 57′. Além disso, desde a primeira Olimpíada até César, há 730 anos egípcios, 12 horas, a que se juntam 10 minutos para uniformizar o tempo. Neste período, o movimento uniforme era igual a 206° 53′. Desde então até o início da era cristã, há 45 anos e 12 dias. Se, portanto, de 49° subtrairmos

136° 57′, depois de lhe adicionarmos 360°, o resto são 272° 3′, em relação ao meio-dia do 1.° do mês de Hecatombéon, na primeira Olimpíada. Finalmente, se a isto juntarmos 206° 52′, o total são 118° 56′ = [272° 3′ + 206° 53′ = 478° 56′ − 360°] para a meia-noite que precede o dia 1 de Janeiro da era de César. Se acrescentarmos 10° 49′, a soma é igual a 129° 45′, a posição para a era cristã, também à meia-noite que antecede o dia 1 de Janeiro.

CONSTRUÇÃO DO INSTRUMENTO PARALÁCTICO

A maior latitude da Lua, correspondente ao ângulo de intersecção, entre o seu círculo e a eclíptica, é igual a 5º, com o círculo de 360º. Porém, o destino não nos ofereceu, como a Cláudio Ptolomeu, a oportunidade de verificá-lo, por causa da dificuldade das paralaxes lunares. Com efeito, foi em Alexandria, em relação à qual o Pólo Norte tem uma elevação de 30º 58′, que Ptolomeu observou quão próxima a Lua ficava do zénite, isto é, quando ela estava no começo de Câncer e no seu limite Norte, que ele podia determinar, numericamente, com antecedência [*Almagesto,* V, 12]. Verificou, servindo-se de certo instrumento a que deu o nome de «Paraláctico», construído para marcar as paralaxes da Lua, que a sua distância mínima, em relação ao zénite, era apenas de $2^1/_8$º, e que, se nessa distância fosse afectada por alguma paralaxe, esta deveria ser necessariamente muito pequena, para uma distância tão pequena. Assim, subtraindo $2\ ^1/_8$º de 30º 58′ dá o resto 28º 50 $^1/_2$′. Isto excede a obliquidade máxima da eclíptica que era então de 23º 51′ 20″, em cerca de 5º inteiros. Esta latitude da Lua coincide exactamente com os outros pormenores.

Ora o instrumento chamado paraláctico é feito com três réguas. Duas delas são iguais em comprimento, pelo menos quatro côvados, enquanto a terceira é um pouco maior. Esta e uma das duas réguas mais pequenas estão ligadas às duas extremidades da terceira régua por cavilhas ou escápulas de tal modo colocadas em buracos cuidadosamente perfurados que, enquanto as réguas se podem mover no mesmo plano, não oscilam naquelas ligações. Do centro da ligação da régua mais comprida tracemos uma linha recta em toda a sua extensão. Nesta linha recta, meçamos um segmento tão rigorosamente quanto possível igual à distância entre as ligações. Dividamos este segmento em 100 unidades iguais ou mais, se possível. Com as mesmas unidades continuemos esta divisão, no resto da régua, até chegar a 1 414 unidades. Estes equivalem ao raio do quadrado inscrito num círculo cujo raio é igual a 1 000 unidades. O resto desta régua pode ser cortado, pois é desnecessário. Do centro da ligação, na outra régua, tracemos também uma linha igual a essas 1 000 unidades ou à distância entre os centros das juntas. A um lado desta régua adaptemos visores através dos quais possamos observar, como acontece na dioptra. Ajustemos estes visores de modo que as linhas de mira não se desviem nada da linha já traçada, ao longo da régua, mas estejam igualmente distantes dela. Certifiquemo-nos de que quando esta linha é prolongada em direcção à régua maior, a sua extremidade pode tocar a linha graduada. Deste modo as réguas formam um triângulo isósceles cuja base estará nas unidades da linha graduada. A seguir espeta-se, de maneira que fique firme, um ponteiro bem esquadrado e polido. A este ponteiro adaptemos a régua com as duas ligações servindo-nos de gonzos, nos quais o instrumento possa rodar como se fosse uma porta. Mas a linha recta que passa pelos centros das ligações da régua é sempre vertical e aponta para o zénite, como um eixo do horizonte. Por conseguinte, quando se procura a distância entre uma estrela e o zénite, observemos a estrela na linha recta, através dos visores da régua. Colocando a régua com a linha graduada por baixo, verificaremos quantas unidades, no sistema em que o diâmetro do círculo tem 20 000, correspondem ao ângulo definido pela linha de mira e pelo eixo do horizonte. Na Tabela [das linhas subtendidas] encontraremos o arco pedido do círculo máximo, entre a estrela e o zénite.

COMO AS PARALAXES DA LUA PODEM SER OBTIDAS

Com este instrumento, Ptolomeu determinou [IV, 15], como dissemos, que a latitude máxima da Lua era de 5°. Então, voltou a observar a sua paralaxe e verificou [*Almagesto,* V, 13] que, em Alexandria era igual a 1° 7′, quando o Sol se encontrava em 5° 28′, de Balança. A distância média entre a Lua e o Sol equivalia a 78° 13′, a anomalia uniforme a 262° 20′, o movimento em latitude a 354° 40′, a prostaférese aditiva a 7° 26′. Por conseguinte, a posição da Lua era em 3° 9′, de Capricórnio. O movimento normalizado da Lua era de 2° 6′, a sua latitude Norte 4° 59′, a sua declinação em relação ao equador 23° 49′ e a latitude de Alexandria 30° 58′. Perto do meridiano, diz ele, a Lua era vista através do instrumento em 50° 55′ do zénite, isto é, 1° 7′ mais do que o exigido pelo cálculo. Com esta informação, de acordo com a teoria lunar dos antigos, de um círculo excêntrico — epiciclo, mostrou que a distância entre o centro da Terra e a Lua era, neste tempo, 39 unidades, mais 45 minutos, sendo o raio da Terra a unidade. A seguir demonstrou o que resulta da razão entre os círculos. Por exemplo, a distância máxima entre a Lua e a Terra, que dizem ocorrer na Lua nova e na Lua cheia, no apogeu do epiciclo, equivale a 64 unidades, mais 10 minutos, que é igual a $^1/_6$ da unidade. Mas a distância mínima entre a Lua e a Terra, que ocorre nas quadraturas, quando a Lua nos seus quartos está no perigeu do epiciclo, cifra-se apenas em

33 unidades e 35 minutos. Tendo isto em conta, avaliou também as paralaxes que ocorrem a cerca 90° do zénite; a menor era igual a 53′ 34″, mas a maior era igual a 1° 43′, como se pode ver mais amplamente por aquilo que ele deduziu a partir disto.

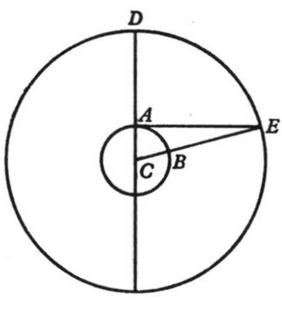
Mas agora é óbvio, para os que desejarem reflectir sobre o assunto, que a situação é muito diferente, como frequentemente temos verificado. Contudo, vamos rever duas observações que mais uma vez evidenciam que as nossas hipóteses acerca da Lua são mais rigorosas do que as deles, dado que coincidem melhor com os fenómenos e não deixam qualquer dúvida.

No ano 1522 da era cristã, precisamente no dia 27 de Setembro, às $5^2/_3$ horas iguais depois do meio-dia, pela volta do pôr do Sol, em Frombork, servindo-nos do instrumento paraláctico, marcámos o centro da Lua, no meridiano e verificámos que a sua distância do zénite era igual a 82° 50′. Havia, pois, desde o começo da era cristã até este momento 1522 anos egípcios, 284 dias, mais $17\,^2/_3$ horas, pelo tempo aparente, mas 17 horas, 24 minutos pelo tempo uniforme. Assim, a posição aparente do Sol foi calculada em 13° 29′ de Balança, a distância uniforme da Lua ao Sol, 87° 6′, a anomalia regular 358° 40′ e a prostaférese aditiva 7′. Deste modo, a posição verdadeira da Lua era de 12° 33′ em Capricórnio. O movimento médio em latitude em relação ao limite Norte era igual a 197° 1′; o movimento verdadeiro em latitude, 197° 8′ [= 197° 1′ + 7′]; a latitude Sul da Lua 4° 47′; a declinação em relação ao equador, 27° 41′; e a latitude do meu lugar de observação, 54° 19′. Quando se acrescenta isto à declinação da Lua, dá a distância verdadeira da Lua ao zénite, isto é, 82° [= 54° 19′ + + 27° 41′]. Portanto, a diferença de 50′ era a paralaxe que devia ter sido 1° 17′, segundo a teoria de Ptolomeu.

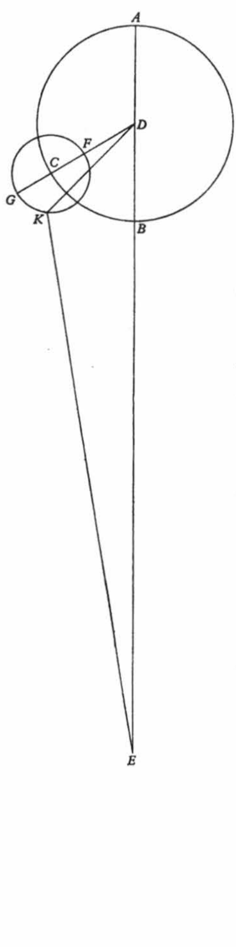
Além desta fizemos outra observação, no mesmo lugar, no dia 7 de Agosto do ano de 1524 da era cristã, às seis horas da tarde. Através do mesmo instrumento, vimos a Lua a 81° 55′ do zénite. Ora, desde o início da era cristã até esta hora havia 1524 anos egípcios, 234 dias e 18 horas de tempo aparente, mas também as mesmas 18 horas pelo tempo uniforme. A posição do Sol foi calculada em 24° 14′ de Leão; a distância média da Lua ao Sol 97° 5′; a anomalia regular 242° 10′; a anomalia corrigida 239° 40′, acrescentando cerca de 7° ao movimento médio. Portanto, a posição verdadeira da Lua era igual a 9° 39′ de Sagitário, o movimento médio em latitude, 193° 19′; o movimento verdadeiro em latitude 200° 17′; a latitude Sul da Lua 4° 41′, e a sua declinação Sul, 26° 36′. Quando se acrescenta isto à latitude do local de observação, 54° 19′, a soma é igual à distância da Lua ao pólo do horizonte, 80° 55′′ [= 26° 36′ + + 54° 19′]. Mas julga-se que eram 81° 55′. Por conseguinte, o excesso de 1° foi transferido para a paralaxe da Lua, que, de acordo com Ptolomeu e as ideias dos nossos predecessores, devia ter sido 1° 38′ como o exigia o cálculo em harmonia com a sua hipótese.

DEMONSTRAÇÃO DA DISTÂNCIA DA TERRA À LUA E DA RAZÃO ENTRE ELAS, EM UNIDADES IGUAIS AO RAIO DA TERRA

Do que acabamos de dizer, ficar-se-á a saber claramente a distância da Lua à Terra. Sem ela, não se pode atribuir um valor definido às paralaxes, pois estão interligadas. Determinaremos essa distância do modo seguinte.



Seja *AB* um círculo máximo da Terra e *C* o seu centro. Descrevamos com centro em *C* um outro círculo, comparado com o qual a grandeza do círculo da Terra é significativa. Seja *DE* este círculo, *D* o pólo do horizonte e *E* o centro da Lua, sendo *DE* a sua distância do zénite, que é conhecida. Na primeira observação, o ângulo *DAE* equivalia a 82° 50′; *ACE* foi calculado apenas em 82° e *AEC*, a diferença entre eles, igual a 50′, é a paralaxe. De acordo com isto, temos o triângulo *ACE* com os seus ângulos dados, assim como os seus lados. Com efeito, visto que o ângulo *CAE* é dado [= 97° 10′ = 180° − 82° 50′], o lado *CE* terá 99 219 unidades, no sistema de unidades em que o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo, *AEC*, tem 100 000, e *AC* = 1 454. Dividindo *CE* por *AC* dá o quociente de cerca de 68 unidades sendo, portanto, *AC* = 1 unidade. Esta era a distância da Lua ao centro da Terra na primeira observação, mas, na segunda [IV, 16], o ângulo aparente *DAC*, media 81° 55′, o ângulo calculado *ACE*, 80° 55′, e a diferença, o ângulo *AEC*, 60′. Portanto, o lado *EC* media 99 027 unidades e *AC* 1 891, no sistema em que o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo tem 100 000. Assim, a distância [*CE*] da Lua ao centro da Terra era de 56 unidades mais 41 minutos, no sistema em que *AC*, o raio da Terra, é a unidade. Ora, seja *ABC* o epiciclo máximo da Lua e o seu centro *D*. Tomando *E* como centro da Terra, tracemos, a partir dele, a linha recta *EBDA*, até o apogeu *A*, sendo o perigeu *B*. Tomemos um arco *ABC* com 242° 10′, de acordo com a anomalia uniforme da Lua, [já] calculada [IV, 16]. Com o centro em *C*, descrevamos o segundo epiciclo *FGK*, em que o arco *FGK* mede 194° 10′ ou duas vezes a distância da Lua ao Sol = 2 × 97° 5′. Juntemos *DK* que subtrai 2° 27′ da anomalia, deixando o ângulo *KBD*, que representa a anomalia corrigida [e igual a 59° 43′].



Dado que todo o ângulo *CDB* mede 62° 10′ [= 59° 43′ + 2° 27′], igual à diferença entre *ABC* e um semicírculo pois *ABC* = 242° 10′ = 62° 10′ + 180°, tendo 7° o ângulo *BEK*, no triângulo *KDE* são dados os ângulos, no sistema em que dois ângulos rectos valem 180°. A razão entre os lados também é dada: *DE* igual a 91 856 unidades e *EK* a 86 354, no sistema de unidades em que o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo *KDE* tem 100 000. Mostrámos atrás, também, que *DF* tem 8 600 unidades e toda a linha *DFG*, 13 340. Portanto, de acordo com a razão dada, se *EK*, como se mostrou, tem 56 $^{42}/_{60}$ unidades, sendo o raio da Terra a unidade, segue-se que *DE* tem 60 $^{18}/_{60}$ unidades, e *DF* 5 $^{11}/_{60}$ unidades, *DFG* $^{8}/_{60}$, e a linha completa *EDG*, se fosse prolongada numa linha recta, 68 $^{1}/_{3}$, a altura máxima da Lua nos seus quartos crescente e minguante. Subtraindo *DG* de *ED*, o resto é 52 $^{17}/_{60}$ unidades, a sua distância mínima. Além disso toda a linha *EDF*, a altura que ocorre na Lua cheia e na Lua nova, será 65 $^{1}/_{2}$ no seu máximo e, subtraindo *DF*, 55 $^{8}/_{60}$, no seu mínimo. Nem nos devemos preocupar com o facto de alguns considerarem que a distância máxima da Lua cheia e da Lua nova à Terra é de 64 $^{10}/_{60}$ unidades [IV, 16] especialmente aqueles por quem as paralaxes da Lua só parcialmente puderam ser observadas devido ao lugar em que residiam. Contudo, tivemos a possibilidade de observá-las mais amplamente, por causa da maior proximidade da Lua, em relação ao horizonte, perto do qual as paralaxes atingem o seu máximo. Não obstante verificámos que as paralaxes não variam mais do que 1′ devido a esta diferença.

O DIÂMETRO DA LUA E DA SOMBRA DA TERRA NA POSIÇÃO EM QUE A LUA PASSA POR ELA

Os diâmetros aparentes da Lua e da sombra também variam com a distância da Lua à Terra, de modo que a discussão deste ponto é igualmente relevante.

Os diâmetros do Sol e da Lua são correctamente determinados com a dioptra de Hiparco, mas pensa-se que, no caso da Lua, é mais seguro recorrer-se a alguns eclipses especiais da Lua, nos quais ela se encontra igualmente distante da sua ápside superior e inferior. Isto é particularmente correcto se, neste tempo, o Sol está situado de modo que o círculo da sombra, pelo qual a Lua passa em ambas as ocasiões, seja igual, exceptuando o facto de que as áreas na sombra ocupam regiões desiguais. Claro está que, quando as áreas encobertas pela sombra e as latitudes da Lua se comparam uma com a outra, a diferença mostra a extensão dum arco à volta do centro da Terra cuja corda é o diâmetro da Lua. Quando este é conhecido, obtém-se também rapidamente o raio da sombra. Isto ficará mais claro com um exemplo.

Assim, se no meio de um eclipse anterior estiverem na sombra três dedos em $^{3}/_{12}$ do diâmetro da Lua, enquanto a sua latitude é de 47′ 54″, e no eclipse a seguir a parte na sombra fosse de 10 dedos, sendo a latitude 29′ 37″, a diferença entre as partes na sombra será de 7 dedos e a diferença de latitudes 18′ 17″, comparada com a proporção entre 12 dedos e 31′ 20″, subtendendo o diâmetro da Lua.

É pois claro que no meio do primeiro eclipse, o centro da Lua estava fora da sombra um quarto do diâmetro, equivalente a 7′ 50″ de latitude [= 30′ 20″ + 4]. Se subtrairmos este número de 47′ 54″ da latitude total, o resto será igual a 40′ 4″ que é o raio da sombra. Assim também, no segundo eclipse, a sombra ocupava, além da latitude da Lua, $^1/_3$ do seu diâmetro, sendo a área obscurecida, 10′ 27″. Juntando-lhe 29′ 37″, o total serão novamente 40′ 4″, o raio da sombra. Ptolomeu julgou que quando o Sol está em conjunção com a Lua ou em oposição na sua máxima distância da Terra, o diâmetro da Lua é de a $31^1/_3$′. Ele afirma que, com a dioptra de Hiparco, verificou que o diâmetro do Sol era o mesmo, mas o diâmetro da sombra equivalia a 1° $21^1/_3$′. Pensava que a razão entre estes valores que era de 13 para 5, ou seja $2^3/_5$ para 1 [*Almagesto*, V, 14].

COMO SE CALCULAM AO MESMO TEMPO AS DISTÂNCIAS DO SOL E DA LUA À TERRA, OS SEUS DIÂMETROS, O DIÂMETRO DA SOMBRA QUE A LUA ATRAVESSA, E O EIXO DA SOMBRA

O Sol também tem alguma paralaxe, embora, por ser ligeira, não seja facilmente perceptível, excepto quando as distâncias da Terra ao Sol e à Lua, os seus diâmetros, o diâmetro da sombra que a Lua atravessa, e o eixo da sombra se inter-relacionam, e então se revelam umas às outras, em demonstrações analíticas. Em primeiro lugar, iremos rever as opiniões de Ptolomeu sobre esta matéria e o seu processo de demonstração [*Almagesto*, V, 15]. Disto seleccionaremos o que nos parecer completamente correcto.

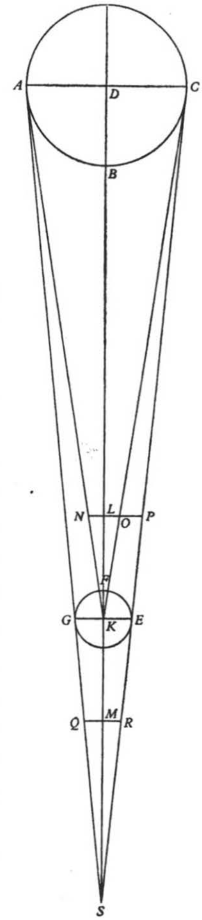
Ele toma o diâmetro aparente do Sol com o valor de $31\,{}^{1}/_{3}'$, valor de que se serve invariavelmente; e com o mesmo valor, o diâmetro da Lua cheia e da Lua nova, quando está no apogeu. É uma distância, diz ele, de $64^{10}/_{60}$ unidades, sendo o raio da Terra a unidade.

A partir daqui, demonstra o resto, do modo seguinte.

Seja *ABC* o círculo do globo solar com o centro em *D*, e *EFG* um círculo do globo terrestre, na sua máxima distância ao Sol, com o seu centro em *K*. Sejam *AG* e *CE* linhas rectas tangentes aos dois círculos; quando forem prolongadas, encontram-se em *S*, o vértice da sombra; trace-se *DKS* passando pelos centros do Sol e da Terra. Tracemos, também, *AK* e *KC*. Juntemos *AC* e *GE*, que nada diferem dos diâmetros dos dois círculos por causa da sua enorme distância. Em *DKS* tomemos *LK* igual a *KM*, na distância da Lua cheia e da Lua nova, no seu apogeu, que mede 64 $^{10}/_{60}$ unidades, sendo *EK* a unidade. Seja *QMR* o diâmetro da sombra no lugar em que a Lua a atravessa, nestas mesmas condições. Seja *NLO* o diâmetro da Lua perpendicular a *DK* e prolonguemo-lo até formar *LOP*. A primeira coisa que se pretende é encontrar a razão entre *DK* e *KE*. Ora, uma vez que o ângulo *NKO* mede 31 $^{1}/_{3}$′, no sistema em que 360° são quatro ângulos rectos, metade dele, *LKO* é igual a 15 $^{2}/_{3}$′, e o ângulo *L*, um ângulo recto, no triângulo *LKO*, os ângulos são lados assim como a razão entre *KL* e *LO*. O valor de *LO* é 17′ 33″, tendo *LK*= 64 $^{10}/_{60}$ unidades com *KE* = 1 unidade. Visto que *LO* está para *MR* assim como 5 está para 13, *MR* terá 45′ 38″ unidades. Mas, dado que *LOP* e *MR* são paralelas a *KE* a iguais distâncias dela, *MR* mais *LOP* é igual a duas vezes *KE*: Subtraindo *MR*, mais *LO* [=45′ 38‴ + 17′ 33″ = 1° 3′ 11″], de 2 vezes *KE*, o resto é *OP*, com 56′ 49″.

Mas, pela 2.ª proposição do livro VII de Euclides, *EC* está para *PC* assim como *KC* está para *OC*, assim como *KD* está para *LD*, assim como *KE* está para *OP*, assim como 60′ está para 56′ 49″. Do mesmo modo *LD* é dado como igual a 56′ 49″, sendo *DLK* uma unidade. Portanto *KL*, a diferença entre *DLK* e 56′ 49″, é igual a 3′ 11″ [= 1ᵖ − 56′ 49″]. Mas no sistema de unidades em que *KL* equivale a 64 unidades e 10′ e *FK* a 1 unidade, toda a *KD* é igual a 1 210 unidades. Já demonstrámos que neste sistema de unidades, *MR* tem 45′ 38″. Isto dá-nos a conhecer as razões entre *KE* e *MR*, e entre *KMS* e *MS*. Também em *KMS*, *KM* é igual a 14′ 22″ [= 60′ − 45′ 38″]. Reciprocamente, no sistema de unidades em que *KM* é igual a 64 unidades e 10′, *KMS* tem 268 unidades, equivalente ao eixo da sombra. Foi isto o que Ptolomeu fez.

Mas depois de Ptolomeu, outros verificaram que as conclusões referidas não estavam bem de acordo com os fenómenos e apresentaram outras descobertas sobre este assunto. Contudo, admitem que a distância máxima da Terra à Lua cheia e à Lua nova, é de 64 unidades e 10′; e o diâmetro aparente do Sol, no seu apogeu, 31 $^1/_3{}'$. Também concedem que o diâmetro da sombra, que a Lua atravessa, está para o diâmetro da Lua na razão de 13 para 5, de acordo com o próprio Ptolomeu. Não obstante, negam que o diâmetro aparente da Lua, nesse tempo, seja maior do que $29^1/_2{}'$. Assim, calculam o diâmetro da sombra em cerca de 1° $16^3/_4{}'$. Portanto, pensam que daqui se segue que a distância do Sol à Terra, no seu apogeu, é de 1146 unidades; e o eixo da sombra 254, sendo o eixo da Terra a unidade, atribuindo esta conclusão ao filósofo Albaténio de Raqqa, a que não pode, contudo, ligar-se de modo nenhum.



Nós pensámos que estes números deviam ser corrigidos e ajustados. Para isso, calculámos o diâmetro aparente do Sol, no apogeu, em 31′ 40″, pois que, de algum modo, ele devia ser maior agora do que antes de Ptolomeu; mas o [diâmetro aparente] da Lua cheia ou Lua nova, quando se encontra na sua ápside superior, em 30′; o diâmetro da sombra quando a Lua a atravessa, em 80 $^3/_5{}'$, porque a razão entre eles é considerada como sendo um pouco maior do que a razão entre 5 e 13, isto é, entre 150 e 403 [= 5: 13 $^2/_5$]. Digo também que o Sol, no apogeu, não é todo encoberto pela Lua, a não ser que a distância desta à Terra seja inferior a 62 unidades iguais ao eixo da Terra.

Assim, estes valores que apresentamos parecem estar rigorosamente de acordo não somente uns com os outros, mas também com outros fenómenos e de harmonia com os eclipses visíveis do Sol e da Lua. Portanto, segundo este cálculo, teremos, no sistema em que o raio da Terra *KE* é a unidade, *LO* igual a 17′ 8″, e daí *MR* igual a 46′ 1″, *OP* igual a 56′ 51″, tendo *LK* $65^1/_2$ unidades, toda a *DLM* correspondente à distância da Terra ao Sol, no apogeu, 1 179 unidades e *KMS*, o eixo da sombra, 265.

A GRANDEZA DOS TRÊS ASTROS: O SOL, A LUA E A TERRA. UMA COMPARAÇÃO ENTRE AS SUAS GRANDEZAS

É igualmente evidente que *KLD* é 18 vezes *KL*, e *DC* 18 vezes *LD*. Ora 18 vezes *LO* é igual a 5 unidades e 27′, sendo *KE* a unidade. Reciprocamente, uma vez que *SK* está para *KE* assim como 265 está para 1, também *SKD* está para *DC* assim como 1 444 está para 5 unidades e 27′, visto que estes lados estão entre si na mesma proporção. Esta será a razão entre os diâmetros do Sol e da Terra. As esferas estão uma para a outra assim como os cubos dos seus diâmetros. Assim, se elevarmos à potência três, 5 unidades e 27′, o produto são 162 unidades menos $^1/_8$, correspondente a quanto o Sol é maior do que o globo terrestre. Além disso, visto que o raio da Lua é igual a 17′ 9″, sendo *KE* uma unidade, o diâmetro da Terra está para o diâmetro da Lua assim como 7 está para 2 e assim como 3 $^1/_2$ está para 1′, em vez do valor correcto 3,498:1 . Elevando isto à terceira potência, vê-se que a Terra é $42^7/_8$ maior do que a Lua e, portanto, o Sol é 6 937 vezes maior do que a Lua.

O DIÂMETRO APARENTE E AS PARALAXES DO SOL

Dado que as mesmas grandezas, quando mais distantes, parecem mais pequenas do que quando estão mais próximas, o Sol, a Lua e a sombra da Terra, variam segundo as suas diferentes distâncias à Terra e o mesmo acontece com as suas paralaxes. Partindo dos números já apresentados, todas estas variações se podem determinar facilmente para qualquer distância. Antes do mais, isto é evidente em relação ao Sol. Com efeito, dado que mostrámos [III, 21] estar a Terra, na sua maior distância, a 10 322 unidades dele, o raio do círculo da revolução anual é de 10 000 unidades, e na sua menor distância ao Sol, está a 9 678 [= 10 000 − 322] unidades na outra parte do diâmetro [do círculo da revolução anual].

Por conseguinte, no sistema em que a ápside superior tem 1179 unidades [III, 19], sendo o raio da Terra a unidade, a ápside inferior terá 1105 e a ápside média 1142. Ora, se dividirmos 1 000 000 por 1179, teremos no triângulo rectângulo 848 unidades correspondentes à corda do ângulo menor, igual a 2′ 55″ da maior paralaxe que ocorre próximo do horizonte. De modo semelhante, dividindo 1 000 000 por 1105, equivalente à distância mínima, obteremos 905 unidades, correspondentes à corda de um ângulo de 3′ 7″, igual à maior paralaxe na ápside inferior. Mas já mostrámos que o diâmetro do Sol é igual a $5^{27}/_{60}$ unidades, no sistema em que o raio da Terra é a unidade; mas na ápside superior é igual a 31′ 48″. Com efeito 1 179 está para $5^{27}/_{60}$ assim como 2 000 000 está para 9 245 e assim como o diâmetro do círculo está para o lado correspondente ao ângulo de 31′ 48″. Daqui resulta que, à distância mínima de 1 105 unidades, correspondem 33′ 54″ do diâmetro do Sol. Portanto, a diferença entre estes dois ângulos iguais é de 2′ 6″; mas, entre as paralaxes, apenas 12″. Ptolomeu [*Almagesto*, V, 17] julgava que estas duas diferenças não eram de ter em conta devido à sua insignificância, considerando que os nossos sentidos não apreendem facilmente quantidades como 1′ ou 2′ e ainda isso é menos possível, tratando-se de segundos. Portanto, se tomarmos a paralaxe máxima do Sol como 3′, em todos os casos, parece que não incorreremos em qualquer erro.

Mas tomaremos os diâmetros médios aparentes do Sol, em relação às suas distâncias médias, ou, como fazem alguns, em relação ao seu movimento horário aparente, que julgam estar para o seu diâmetro assim como 5 está para 66 e como 1 está para $13^1/_5$. Com efeito, o movimento horário é aproximadamente proporcional à distância do Sol.

O DIÂMETRO APARENTE E VARIÁVEL DA LUA E AS SUAS PARALAXES

A maior variação deste diâmetro e das paralaxes é evidente na Lua, por ser o astro mais próximo [da Terra]. Com efeito, sendo a sua maior distância à Terra, 65 $^1/_2$ unidades, quando é Lua nova e Lua cheia, a sua menor distância, como atrás se demonstrou [IV, 17], será de 55 $^8/_{60}$ unidades, mas, sendo quarto crescente ou minguante, a sua maior distância é de 68$^{21}/_{60}$ unidades, e a menor 52 $^{17}/_{60}$. Por conseguinte, encontraremos as paralaxes do nascimento e do ocaso da Lua, nestes quatro limites, dividindo o raio da circunferência da Terra pela distância da Terra à Lua; 50′ 18″ para os quartos crescente e minguante, e 52′ 24″ para a Lua cheia e Lua nova quando está mais distante; e 65′ 45″, 62′ 21″, respectivamente, no momento em que se encontra nais próxima. Destas paralaxes resulta que os diâmetros aparentes da Lua também se tornam claros. Com efeito, como se mostrou [IV, 20], o diâmetro da Terra está para o diâmetro da Lua, assim como 7 está para 2. Do mesmo modo, o raio da Terra estará para o diâmetro da Lua assim como 7 está para 4. É esta também a razão entre as paralaxes e os diâmetros aparentes da Lua, dado que as linhas rectas que determinam os ângulos das paralaxes maiores e dos diâmetros aparentes, na mesma passagem da Lua, em nada diferem uns dos outros. Os ângulos são muito aproximadamente proporcionais às cordas correspondentes, não havendo diferença sensível entre eles. Daqui resulta ser evidente que, no primeiro limite das paralaxes referidas, o diâmetro aparente da Lua é de 28 $^3/_4$′, no segundo 30′, no terceiro 35′ 38″ e no último 27′ 33′. Este último valor teria sido quase 1°, segundo a teoria de Ptolomeu e outros. A Lua devia ter alumiado a Terra tanto no quarto crescente ou minguante como na Lua cheia.

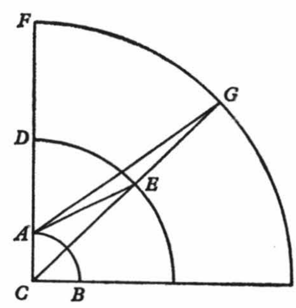
COMO VARIA A EXTENSÃO DA SOMBRA DA TERRA?

Já afirmámos [IV, 19] que o diâmetro da sombra está para o diâmetro da Lua assim como 403 está para 150. Consequentemente, na Lua cheia e na Lua nova, com o Sol no seu apogeu, o diâmetro da sombra no seu mínimo é igual a 80′ 36″, no seu máximo igual a 95′ 44″, e a diferença máxima são 15′ 8″ [= 95° 44′ − 80° 36′]. A sombra da Terra também varia, mesmo quando a Lua passa pelo mesmo lugar, por causa das distâncias variáveis entre a Terra e o Sol; e varia do modo seguinte.

Tracemos de novo, como na figura anterior, a linha recta *DKS* através dos centros do Sol e da Terra, assim como a tangente *CES*. Juntemos *DC* e *KE*. Como se mostrou, quando a distância *DK* era igual a 1 179 unidades, sendo *KE* igual a uma unidade, e *KM* tinha 62 unidades; *MR*, o raio da sombra, tinha $46^{1}/_{60}$ unidades, sendo a unidade o referido *KE*, e o ângulo *MKR*; juntando *K* e *R*, era igual ao ângulo do raio aparente da sombra da Terra e igual a 41′ 32″, e o eixo da sombra, *KMS*, é igual a 265 unidades referidas. Mas quando a Terra está mais próxima do Sol, com *DK* igual a 1105 unidades, avaliaremos a sombra da Terra no mesmo lugar da passagem da Lua, como se segue.

Tracemos *EZ* paralela a *DK*. *CZ* estará para *ZE* assim como *EK* está para *KS*. Mas *CZ* é igual a $4^{27}/_{60}$ unidades, tendo *ZE* de 1105 unidades, pois que *ZE* e *DZ*, sendo a diferença entre *CD* e *CZ*, são iguais a *DK* e *KE*, dado que *KZ* é um paralelogramo. Então *KS* terá $248^{19}/_{60}$ unidades, sendo *KE* igual a uma unidade. Mas *KM* tinha 62 unidades e, portanto *MS*, a diferença entre $248^{19}/_{60}$ e 62, será igual a $186\ ^{19}/_{60}$ unidades. Ora, sabendo-se que *SM* está para *MR* como *SK* está para *KE*, verifica-se que *MR* tem $45\ ^{1}/_{60}{}'$ unidades, sendo *KE* igual a uma unidade, e por isso *MKR* é equivalente ao ângulo do raio aparente da sombra da Terra, com 41′ 35″.

Assim, resulta que na mesma posição da passagem da Lua, a aproximação e o desvio do Sol e da Terra fazem com que o diâmetro da sombra varie quando muito, isto é, $^{2}/_{60}{}'$, com *KE* igual a uma unidade, o que é observado como 57″, quando 360º equivalem a 4 ângulos rectos. Além disto, a razão entre o diâmetro da sombra e o da Lua, no primeiro caso 46′ 1″, era maior, e no segundo caso menor 45′ 1″ do que na razão entre 13 e 5 que era como que um valor médio. Consequentemente cometerémos um pequeno erro se usarmos sempre o mesmo valor, poupando assim trabalho, e seguindo a opinião dos antigos.

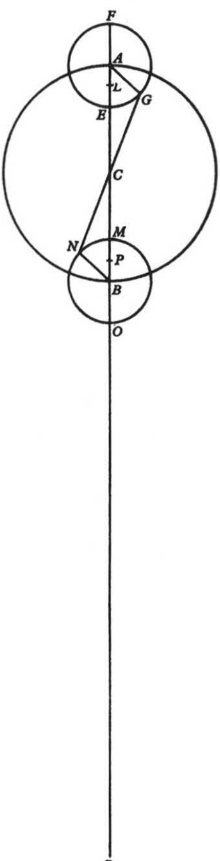


APRESENTAÇÃO TABULAR DAS PARALAXES PARTICULARES DO SOL E DA LUA, NO CÍRCULO QUE PASSA PELOS PÓLOS DO HORIZONTE

Agora não será incerto determinar, separadamente, as paralaxes do Sol e da Lua. Considere-se *AB* como um arco de circunferência da Terra que passa pelo seu centro *C* e pelo ponto abaixo do zénite. No mesmo plano, seja *DE* o círculo da Lua; *FG* o círculo do Sol, *CDF* a linha que passa pelo ponto abaixo do zénite; e *CEG* a linha em que são tomadas as posições verdadeiras do Sol e da Lua. Tracemos *AG* e *AE* como as linhas de mira para estes pontos. Portanto, a paralaxe do Sol é indicada pelo ângulo *AGC* e a paralaxe da Lua pelo ângulo *AEC*. Além disso, a diferença entre as paralaxes do Sol e da Lua são medidas pelo ângulo *GAE*, igual à diferença entre os ângulos *AGC* e *AEC*. Tomemos *ACG* como o ângulo com o qual queremos comparar aqueles outros ângulos, e seja ele de 30°, por exemplo. Segundo os teoremas sobre triângulos planos, é claro que, se pusermos a linha *CG* igual a 1 142 unidades, sendo *AC* uma unidade, o ângulo *AGC* será igual à diferença entre as alturas verdadeira e aparente do Sol, com $1^1/_2'$. Mas, se o ângulo *ACG* tiver 60°, *AGC* terá 2′ 36″. Similarmente as paralaxes do Sol serão evidentes para os outros valores do ângulo *AGC*.

Mas, no caso da Lua, consideramos os seus quatro limites. Com efeito, se tomarmos o ângulo *DCE* ou o arco *DE* com 30°, sendo 360° iguais a 4 ângulos rectos, quando a Lua está na sua distância máxima da Terra, com *CE* igual a

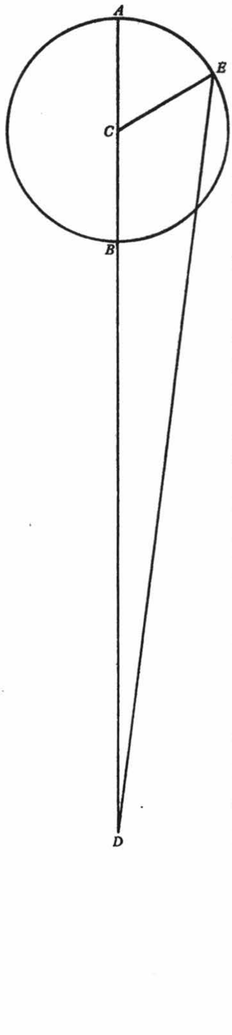
$68^{21}/_{60}$ unidades, sendo *CA* uma unidade, como dissemos [IV, 22], então teremos um triângulo *ACE*, no qual os dois lados *AC* e *CE* são dados, assim como o ângulo *ACE*. Assim, verificaremos que *AEC*, o ângulo da paralaxe, mede $25' 28''$. E se *CE* tem $65^1/_2$ unidades, o ângulo *AEC* medirá $26' 36''$. De igual modo, no terceiro limite, quando *CE* é igual a $55^8/_{60}$ unidades, o ângulo da paralaxe, *AEC*, medirá $31' 42''$. Finalmente, na distância mínima entre a Lua e a Terra, quando *CE* tem $52^{17}/_{60}$ unidades, o ângulo *AEC* medirá $33' 27''$. Ora, se o arco *DE* for igual a 60°, os ângulos da paralaxe serão iguais, pela mesma ordem, o primeiro a $43' 55''$; o segundo a $45' 51''$; o terceiro a $54^1/_2{}'$, e o quarto a $57^1/_2{}'$.



Escreveremos tudo isto seguindo a ordem da Tabela seguinte que para maior comodidade, à semelhança das outras, estenderemos até uma série de 30 linhas com intervalos de 6°. Estes graus devem considerar-se como duas vezes o número de graus contados desde o zénite até o máximo de 90°. Ordenámos a Tabela em 9 colunas. Na primeira e na segunda estarão os números comuns do círculo. Na terceira pomos as paralaxes do Sol. Depois, vêm as paralaxes da Lua [colunas 4-9]. A quarta coluna mostrará as diferenças, para menos, entre as paralaxes menores que ocorrem quando a Lua, no seu quarto minguante ou no seu quarto crescente, está no apogeu, se são menores do que as que estão na coluna seguinte que têm lugar na Lua cheia ou na Lua nova. Na sexta coluna estarão as paralaxes produzidas pela Lua cheia ou pela Lua nova no perigeu. Os minutos que se seguem na sétima coluna são as diferenças, para mais, entre as paralaxes da Lua, no seu quarto crescente ou minguante, quando está mais próxima de nós, e as que estão próximas delas. Finalmente, as duas colunas restantes são reservadas para os minutos proporcionais em que podem calcular-se as paralaxes entre esses quatro limites. Explicaremos também estes minutos, primeiro aqueles que estão próximos do apogeu e depois os que caiem entre os dois primeiros limites com a Lua no apogeu, na quadratura e nas sizígias . E a explicação será assim.

Seja o círculo *AB* o primeiro epiciclo da Lua, com o centro em *C*. Tomando *D* como centro da Terra, tracemos uma linha recta, *DBCA* e, com o centro no apogeu *A*, descrevamos o segundo epiciclo *EFG*. Tomemos um arco *EG* com 60º e juntemos *AG* e *CG*. Então, visto que, na exposição anterior, se demonstrou [IV, 17] que a linha recta *CE* tem $5^{11}/_{60}$ unidades, sendo o raio da Terra a unidade, e a linha recta *EF* tem $2^{51}/_{60}$ unidades; no triângulo *ACG*, os lados *GA* e *AC* têm $1\,^{25}/_{60}$ unidades e $6\,^{36}/_{60}$, respectivamente. O ângulo por eles definido também é dado. Assim, segundo os teoremas sobre triângulos planos, o terceiro lado *CG* terá $6^{7}/_{60}$ unidades. Portanto, toda a linha *DCG*, prolongada numa linha recta, ou a sua equivalente, *DCL*, terá $66\,^{25}/_{60}$ [= $60\,^{18}/_{60} + 6^{7}$] unidades. Mas *DCE* era igual a $65\,^{1}/_{2}$ [= $60^{18}/_{60} + 5^{11}/_{60}$] unidades, por conseguinte, a diferença entre *DCL* e *DCE*, *EL*, será igual a $55\,^{1}/_{2}'$ [= $66\,^{25}/_{60} - 65^{30}/_{60}$]. Através desta razão dada, quando *DCE* for igual a 60 unidades, *EF* será igual a $2\,^{37}/_{60}$ e *EL* a $^{46}/_{60}$, no mesmo sistema de unidades. De acordo com isto, se considerarmos *EF* com 60 minutos, o excesso será 18 minutos. Poremos isto na sétima coluna da Tabela, no lado oposto a 60º.

Mostraremos que o mesmo se aplica para o perigeu *B*. Tomando este como centro, reproduzamos o segundo epiciclo *MNO*, como o ângulo *MBN*, igual a 60º. O triângulo *BCN* tem, como anteriormente, os lados e os ângulos dados. De modo igual o excesso *MP* é de $55\,^{1}/_{2}$ unidades, sendo o raio da Terra uma unidade. Neste sistema de unidades, *DBM* terá $55\,^{8}/_{60}$ unidades. Se, porém, *DBM* tiver 60 unidades, nesse sistema *MBO* terá $3\,^{7}/_{60}$ unidades, e o excesso será *MP* igual a 55'. Mas $3\,^{7}/_{60}$ está para $^{55}/_{60}$ assim como 60 está para 18, e teremos os mesmos resultados que anteriormente [no caso do apogeu], embora haja uma diferença de poucos segundos. Usaremos este método nos outros casos com que preencheremos a oitava coluna da Tabela. Mas se em vez destes valores usarmos os mencionados na Tabela das prostaféreses, não cometeremos qualquer erro, pois são quase os mesmos, e trata-se de pequenas quantidades.



Resta considerar os minutos proporcionais para os limites médios, isto é, entre o segundo e o terceiro.

Consideremos então o primeiro epiciclo descrito pela Lua cheia e Lua nova. Seja este epiciclo *AB*, com o centro em *C*. Tomemos *D* como centro da Terra, e tracemos a linha recta, *DBCA*. Partindo do apogeu *A*, tomemos um arco, por exemplo *AE*, igual a 60°. Juntemos *DE* e *CE*. Teremos o triângulo *DCE*, do qual dois lados são dados: *CD* igual a $60^{19}/_{60}$ unidades e *CE* igual a $5\ ^{11}/_{60}$ unidades. Assim, o ângulo interno, *DCE*, é igual a 180° menos *ACE*. De acordo com os teoremas sobre os triângulos, *DE* é igual a $63\ ^{4}/_{60}$ unidades. Mas *DBA* é igual a $65\ ^{1}/_{2}$ unidades que são mais $2\ ^{28}/_{60}$ unidades do que *ED*. Além disso *AB*, com $10\ ^{22}/_{60}$ está para $2\ ^{27}/_{60}$ unidades assim como 60 está para 14. Deveremos escrever isto na Tabela, no lado oposto a 60°. Com este exemplo completámos o que faltava e terminámos a Tabela que se segue. Acrescentámos outra Tabela dos raios do Sol, da Lua e da sombra da Terra, de modo que nos possamos aproveitar o mais possível deles.

TABELA DAS PARALAXES DO SOL E DA LUA

Números comuns		Paralaxes solares		Diferenças a subtrair à paralaxe da Lua no 2.º limite para obter a paralaxe no 1.º limite		Paralaxe da Lua no 2.º limite		Paralaxe da Lua no 3.º limite		Diferença a juntar à paralaxe da Lua no 3.º limite para obter a paralaxe no 4.º limite		Minutos proporcionais do	
												Epiciclo mais pequeno	Epiciclo maior
°	°	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″		
6	354	0	10	0	7	2	46	3	18	0	12	0	0
12	348	0	19	0	14	5	33	6	36	0	23	1	0
18	342	0	29	0	21	8	19	9	53	0	34	3	1
24	336	0	38	0	28	11	4	13	10	0	45	4	2
30	330	0	47	0	35	13	49	16	26	0	56	5	3
36	324	0	56	0	42	16	32	19	40	1	6	7	5
42	318	1	5	0	48	19	5	22	47	1	16	10	7
48	312	1	13	0	55	21	39	25	47	1	26	12	9
54	306	1	22	1	1	24	9	28	49	1	35	15	12
60	300	1	31	1	8	26	36	31	42	1	45	18	14
66	294	1	39	1	14	28	57	34	31	1	54	21	17
72	288	1	46	1	19	31	14	37	14	2	3	24	20
78	282	1	53	1	24	33	25	39	50	2	11	27	23
84	276	2	0	1	29	35	31	42	19	2	19	30	26
90	270	2	7	1	34	37	31	44	40	2	26	34	29
96	264	2	13	1	39	39	24	46	54	2	33	37	32
102	258	2	20	1	44	41	10	49	0	2	40	39	35
108	252	2	26	1	48	42	50	50	59	2	46	42	38
114	246	2	31	1	52	44	24	52	49	2	53	45	41
120	240	2	36	1	56	45	51	54	30	3	0	47	44
126	234	2	40	2	0	47	8	56	2	3	6	49	47
132	228	2	44	2	2	48	15	57	23	3	11	51	49
138	222	2	49	2	3	49	15	58	36	3	14	53	52
144	216	2	52	2	4	50	10	59	39	3	17	55	54
150	210	2	54	2	4	50	55	60	31	3	20	57	56
156	204	2	56	2	5	51	29	61	12	3	22	58	57
162	198	2	58	2	5	51	56	61	47	3	23	59	58
168	192	2	59	2	6	52	13	62	9	3	23	59	59
174	186	3	0	2	6	52	22	62	19	3	24	60	60
180	180	3	0	2	6	52	24	62	21	3	24	60	60

TABELA DOS RAIOS DO SOL, DA LUA E DA SOMBRA DA TERRA

Números Comuns		Raio do Sol		Raio da Lua		Raio da Sombra		Variação da Sombra
°	°	′	″	′	″	′	″	
6	354	15	50	15	0	40	18	0
12	348	15	50	15	1	40	21	0
18	342	15	51	15	3	40	26	1
24	336	15	52	15	6	40	34	2
30	330	15	53	15	9	40	42	3
36	324	15	55	15	14	40	56	4
42	318	15	57	15	19	41	10	6
48	312	16	0	15	25	41	26	9
54	306	16	3	15	32	41	44	11
60	300	16	6	15	39	42	2	14
66	294	16	9	15	47	42	24	16
72	288	16	12	15	56	42	40	19
78	282	16	15	16	5	43	13	22
84	276	16	19	16	13	43	34	25
90	270	16	22	16	22	43	58	27
96	264	16	26	16	30	44	20	31
102	258	16	29	16	39	44	44	33
108	252	16	32	16	47	45	6	36
114	246	16	36	16	55	45	20	39
120	240	16	39	17	4	45	52	42
126	234	16	42	17	12	46	13	45
132	228	16	45	17	19	46	32	47
138	222	16	48	17	26	46	51	49
144	216	16	50	17	32	47	7	51
150	210	16	53	17	38	47	23	53
156	204	16	54	17	41	47	31	54
162	198	16	55	17	44	47	39	55
168	192	16	56	17	46	47	44	56
174	186	16	57	17	48	47	49	56
180	180	16	57	17	49	47	52	57

CÁLCULO DAS PARALAXES DO SOL E DA LUA

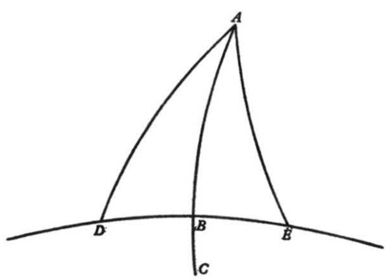
Faremos ainda uma breve exposição do método de calcular as paralaxes do Sol e da Lua, por meio da Tabela. Para a distância do Sol ao zénite ou duas vezes a da Lua, tomamos na Tabela as paralaxes correspondentes: a entrada única no caso do Sol, mas no caso da Lua as paralaxes nos seus quatro limites. Com duas vezes o movimento da Lua ou a distância do Sol, encontramos os minutos proporcionais na primeira coluna dos minutos proporcionais [isto é, a] oitava coluna. Com eles obtemos, como partes proporcionais de 60, o excesso, tanto para o primeiro como para o último limite. Subtraímos sempre a primeira destas partes proporcionais de 60, à paralaxe próxima, na sucessão, ou seja, a paralaxe do segundo limite; e acrescentamos igualmente sempre a segunda destas partes proporcionais de 60 à paralaxe, no penúltimo limite. Encontramos assim, dois valores corrigidos das duas paralaxes da Lua, no apogeu e no perigeu, que são aumentados ou diminuídos pelo epiciclo menor. Então, com a anomalia da Lua tomamos os minutos proporcionais na última coluna. Com estes minutos proporcionais, obtemos a seguir a parte proporcional da diferença entre as paralaxes acabadas de encontrar. Acrescentamos sempre esta parte proporcional [de 60] à primeira das paralaxes corrigidas, a do apogeu. O resultado é a paralaxe procurada para lugar e tempo dados, como no exemplo seguinte.

Seja de 54° a distância da Lua ao zénite, de 15° o movimento médio da Lua e de 100° o movimento normalizado em anomalia. Desejamos encontrar a paralaxe da Lua na Tabela. Multiplico por 2 os graus da distância da Lua ao zénite, obtendo 108°. Correspondendo a 108° da Tabela, como excesso do segundo limite sobre o primeiro, temos 1′ 48″; a paralaxe no segundo limite, 42′ 50″, a paralaxe no terceiro limite, 50′ 59″; o excesso da paralaxe do quarto limite sobre o terceiro, 2′ 46″. Notamos estes valores, um por um. O movimento da Lua multiplicado por 2 é igual a 30°. Para este número encontramos 5′ na primeira coluna dos minutos proporcionais. Com estes 5′ tomamos a parte proporcional de 60, igual a 9″ [$1' 48'' \times \times {}^{5}/_{60} = 9''$] do excesso do segundo limite sobre o primeiro. Subtraímos estes 9″ de 42′ 50″, a paralaxe do segundo limite. O resto são 42′ 41″. De igual modo, no segundo excesso, igual a 2′ 46″, a parte proporcional eram 14″ [$2' 46'' \times {}^{1}/_{12} \cong 14''$]. Estes 14″ são somados com 50′ 59″, a paralaxe no terceiro limite, perfazendo a total de 51′ 13″. A diferença entre estas paralaxes é igual a 8′ 32″. Depois disto, com os graus da anomalia corrigida, tomamos, na última coluna, os minutos proporcionais, 34. Com estes, encontramos a parte proporcional da diferença. Esta diferença é de 8′ 32″ e a parte proporcional 4′ 50″. Quando se juntam estes 4′ 50″ à primeira paralaxe corrigida, o total vale 47′ 31″. Esta é a paralaxe pedida da Lua, no círculo vertical.

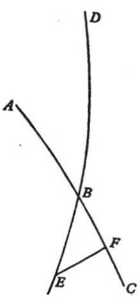
No entanto qualquer paralaxe da Lua difere um pouco da paralaxe na Lua cheia ou na Lua nova; mas basta tomar um valor entre as limites médios. Isto é em particular necessário para a predição dos eclipses.

COMO SÃO SEPARADAS UMA DA OUTRA AS PARALAXES EM LONGITUDE E LATITUDE

A paralaxe é facilmente separada em longitude e latitude, isto é, a distância entre o Sol e a Lua é medida por arcos e ângulos da eclíptica e do círculo vertical, que se intersectam mutuamente. Com efeito, quando o círculo vertical corta a elíptica em ângulos rectos, evidentemente não se produz qualquer paralaxe em longitude. Pelo contrário, toda a paralaxe passa para a latitude, desde que os círculos de latitude e altura sejam os mesmos. Mas, por outro lado, se acontece que a eclíptica intersecta o horizonte em ângulos rectos e se torna idêntica ao círculo de altura e a Lua neste tempo não tem latitude, apresenta apenas uma paralaxe em



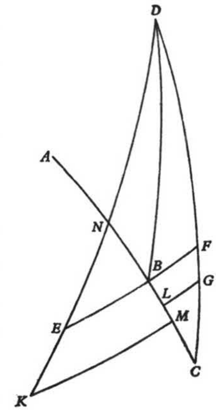
longitude. Mas se adquire alguma latitude, não se furtará a ter alguma paralaxe em longitude. Assim, se *ABC* é a eclíptica que intersecta o horizonte em ângulos rectos e *A* é o pólo do horizonte, então o círculo *ABC* será o mesmo que o círculo vertical da Lua, que não tem latitude. Se a sua posição for em *B*, toda a sua paralaxe, *BC*, será em longitude. Mas quando tiver latitude, sendo *DBE* o círculo descrito pelos pólos da eclíptica e a latitude da Lua *DB* ou *BE*, é evidente que o lado *AD* ou *AE* não são iguais a *AB*. O ângulo em *D* não será um ângulo recto, dado que *DA* e *AE* não são círculos que passem pelos pólos de *DBE*. Haverá uma certa paralaxe em latitude, tanto maior quanto mais perto do zénite estiver a Lua.



Com efeito, se *DE*, a base do triângulo *ADE*, permanece a mesma, quanto mais pequenos forem os lados *AD* e *AE*, mais agudos são os ângulos definidos por eles e pela base. Estes ângulos tornam-se tanto mais próximos de ângulos rectos quanto mais afastada estiver a Lua do zénite.

Seja agora *DBE* o círculo vertical da Lua, oblíquo à eclíptica, *ABC*, não tendo a Lua latitude, sendo a intersecção com a eclíptica em *B*. Seja *BE* a paralaxe no círculo vertical. Descrevamos um arco *EF*, num círculo que passe pelos pólos de *ABC*. Assim, no triângulo *BEF*, o ângulo *EBF* é dado, como mostrámos atrás; *F* é um ângulo recto, e o lado *BE* também é dado. De acordo com os teoremas sobre triângulos esféricos, *BF* e *FE*, os lados restantes, são dados, correspondendo à paralaxe *BE*, sendo a latitude *FE* e a longitude *BF*. Contudo, em virtude dos seus lados *BE*, *BF* e *FB* serem pequenos diferem ligeira e imperceptivelmente de linhas rectas. Se, portanto, considerarmos o triângulo rectângulo como rectilíneo, o cálculo será por isso mesmo mais fácil, e não cometeremos erros .

O cálculo é mais difícil quando a Lua tiver latitude. Reproduzamos a eclíptica *ABC*, intersectada obliquamente por *DB*, o círculo que passa pelos pólos do horizonte. Seja *B* a posição da Lua em longitude, *FB* a latitude Norte ou *BE* a latitude Sul. Do zénite *D*, descrevamos, passando pela Lua, os círculos verticais *DEK* e *DFC*, em que estão as paralaxes *EK* e *FG*. Com efeito, as posições verdadeiras da Lua em longitude e latitude serão os pontos *E* e *F*, e as posições aparentes *K* e *G*. Destes pontos descrevamos arcos, *KM* e *LG* perpendiculares à eclíptica, *ABC*. A longitude e latitude da Lua são conhecidas assim como a latitude da região. Assim, no triângulo *DEB*, serão conhecidos os lados *DB* e *BE* assim como *ABD*, o ângulo de intersecção da eclíptica com o círculo vertical. Acrescentando *ABD* ao ângulo recto *ABE*, obtém-se todo o ângulo *DBE* e consequentemente será dado o lado que falta *DE*, bem como o ângulo *DEB*.



De modo semelhante, no triângulo *DBF*, dois lados, *DB* e *BF*, são dados, assim como o ângulo *DBF* que é o resultado da subtracção do ângulo *ABD* ao ângulo recto [*ABF*]. Então *DF* também será dado, juntamente com o ângulo *DFB*. Por conseguinte, as paralaxes *EK* e *FG* dos dois arcos, *DE* e *DF* são dados pela Tabela. O mesmo acontece com a distância verdadeira da Lua *DE* ou *DF* até o zénite e com a distância aparente *DEK* ou *DFG*.

Mas *DE* intersecta a eclíptica no ponto *N*. No triângulo *EBN*, *NBE* é um ângulo recto; o ângulo *NEB* é dado, e bem assim a base *BE;* o ângulo *BNE*, diferença entre *NBE* e *NEB* também será conhecido, bem como os lados restantes *BN* e *NE*. Do mesmo modo, em todo o triângulo *NKM* será conhecida a base *KM*, tendo em conta os ângulos dados *M* e *N*, assim como todo o lado *KEN*. Este é a latitude Sul aparente da Lua. O seu excesso em relação a *EB* é a paralaxe em latitude. O lado restante *NBM* é dado. Subtraindo *NB* de *NBM*, o resto *BM* é a paralaxe em longitude.

De modo semelhante, no triângulo Norte *BFC*, *B* é um ângulo recto enquanto o lado *BF* é dado, assim como o ângulo *BFC*. Por conseguinte, os lados restantes *BLC* e *FGC* são dados, acontecendo o mesmo com o ângulo *C*, diferença entre *B* e *BFC*. Subtraindo *FG* de *FGC*, obtém-se *GC*, como um lado dado no triângulo *GLC*, no qual *CLG* é um ângulo recto e o ângulo *LCG* é dado. Consequentemente os outros lados *GL* e *LC* são dados. O mesmo acontece quando *LC* é subtraído de *BC;* é *BL*, a paralaxe em longitude. Também é dada a latitude aparente, *GL*, cuja paralaxe é o excesso da latitude verdadeira, *BF*.

Não obstante, como vedes, este cálculo dá mais trabalho do que fruto, pois se refere a quantidades muito pequenas. Com efeito, será suficiente usar o ângulo *ABD*, em vez de *DCB*, *DBF* em vez de *DEB*, e simplesmente, como atrás, o arco médio *DB* sempre em vez dos arcos *DE* e *EF*, ignorando a latitude da Lua. Assim, não parecerá haver qualquer erro, especialmente nas regiões da parte Norte da Terra. Por outro lado, nas áreas do extremo Sul, quando *B* toca o zénite na latitude [lunar] máxima de 5° e a Lua está mais próxima da Terra, a diferença é cerca de 6′. Mas durante os eclipses, quando a Lua está em conjunção com o Sol e a sua latitude não pode exceder $1^1/_2{}^\circ$, a diferença pode ser apenas $1\,^3/_4{}'$. Estas considerações tornam claro que, no quadrante oriental da eclíptica, a paralaxe em longitude se acrescenta sempre à posição verdadeira da Lua e no outro quadrante sempre se lhe subtrai, para se obter a longitude aparente. A sua latitude aparente é obtida por meio da paralaxe em latitude. Com efeito, se estão no mesmo lado da eclíptica, adicionam-se. Mas se estiverem em lados opostos [da eclíptica], a menor deve ser subtraída da maior e o resto será a latitude aparente do mesmo lado da maior.

CONFIRMAÇÃO DO QUE SE DISSE DAS PARALAXES DA LUA

Que o que dissemos das paralaxes da Lua [IV, 22, 24-26] está conforme com os fenómenos, podemos confirmá-lo com muitas outras observações, como a que fizemos em Bolonha, a 9 de Março de 1497 da era Cristã, depois do pôr do Sol. Com efeito, observámos a Lua prestes a ocultar a estrela brilhante das Híades [Aldebarã], a que os Romanos chamam Palilício. Depois de esperar, vimos a estrela tocar a parte obscurecida do globo lunar com a sua luz extinta, entre as pontas da Lua, no fim da 5.ª hora da (1) noite. Estava mais próxima da ponta Sul cerca de $^1/_3$ da largura ou diâmetro da Lua. E como a estrela, segundo o cálculo, estava em 2° 52′ de Gémeos e a 5 $^1/_6$° na latitude Sul, é evidente que o centro da Lua estava aparentemente metade do seu diâmetro a Oeste da estrela. Portanto, a sua posição aparente era de 2° 36′ [= 2° 52′ − $^1/_2$ (32′)] em longitude, e cerca de 5° 6′ em latitude. De acordo com isto, desde o começo da era Cristã, havia 1497 anos egípcios, 76 dias, 23 horas, em Bolonha, mas em Cracóvia, que fica mais a Este cerca de 9°, o tempo adicional seria de 23 horas, 36 minutos, mais 4 minutos acrescentados para o tempo uniforme, visto que o Sol estava em 28$^1/_2$° de Peixes. A distância uniforme da Lua em relação ao Sol era de então 74°; a anomalia corrigida 11° 10′ e a posição verdadeira da Lua 3° 24′ em Gémeos; a latitude Sul 4° 35′ e o movimento

(1) Portanto às 11 horas da noite ($6^h + 5^h = 11^h$).

verdadeiro em latitude, 203° 41′. Neste tempo, contudo, em Bolonha, nascia em 26° de Escorpião, num ângulo de $59^1/_2$°; a Lua estava a 84° do zénite; o ângulo de intersecção entre o círculo vertical e a eclíptica era cerca de 29°; a paralaxe da Lua, em longitude, 51′, e em latitude, 30′. Estes valores estão de tal modo de acordo com a observação que ninguém pode duvidar da justeza das nossas hipóteses e das conclusões nelas baseadas.

AS CONJUNÇÕES E OPOSIÇÕES MÉDIAS DO SOL E DA LUA

Do que se disse sobre o movimento da Lua e do Sol resulta o método de investigar as suas conjunções e oposições. Com efeito, em relação a qualquer tempo próximo daquele em que pensamos que ocorrerá uma oposição ou uma conjunção, procuramos o movimento uniforme da Lua. Se verificarmos que ele já completou um círculo, ficamos a saber que há uma conjunção; se um semicírculo, é a fase de Lua cheia, em oposição. Mas visto que raramente se encontra esta precisão, teremos de examinar a distância entre os dois astros. Quando dividirmos esta distância pelo movimento diário da Lua, conheceremos a quantidade de tempo desde ou até a ocorrência do outro, consoante o movimento for a mais ou a menos. Em relação a este tempo, procuraremos então os movimentos e as posições, por meio das quais calcularemos as Luas novas e as Luas cheias verdadeiras, e distinguiremos as conjunções nas quais os eclipses ocorrem, das outras, do modo indicado abaixo [IV, 30]. Quando tivermos estabelecido estas fases, podemos estendê-las a quaisquer outros meses e continuá-los para vários anos, servindo-nos duma Tabela de 12 meses. Esta contém os tempos parciais, os movimentos uniformes do Sol e da Lua em anomalia, e da Lua em latitude. Cada valor destes está ligado com os valores uniformes individuais, previamente encontrados. Mas em relação à anomalia do Sol, para obtê-la imediatamente, podemos apropriadamente observá-la na sua forma corrigida. Com efeito a sua não uniformidade não será perceptível num ano nem em vários anos, por causa da lentidão da sua origem, isto é, da sua ápside superior.

TABELA DA CONJUNÇÃO E OPOSIÇÃO DO SOL E DA LUA

Meses	Tempos parciais				Movimento da Lua em anomalia				Movimento da Lua em latitude			
	Dias	Min. de 1 dia	Seg. de 1 dia	$^1/_{60}$ seg. de 1 dia	60°	°	′	″	60°	°	′	″
1	29	31	50	9	0	25	49	0	0	30	40	14
2	59	3	40	18	0	51	38	0	1	1	20	28
3	88	35	30	27	1	17	27	1	1	32	0	42
4	118	7	20	36	1	43	16	1	2	2	40	56
5	147	39	10	45	2	9	5	2	2	33	21	10
6	177	11	0	54	2	34	54	2	3	4	1	24
7	206	42	51	3	3	0	43	2	3	34	41	38
8	236	14	41	12	3	26	32	3	4	5	21	52
9	265	46	31	21	3	52	21	3	4	36	2	6
10	295	18	21	30	4	18	10	3	5	6	42	20
11	324	50	11	39	4	43	59	4	5	37	22	34
12	354	22	1	48	5	9	48	4	0	8	2	48

PARA METADE DO PERÍODO ENTRE LUA CHEIA E LUA NOVA

	14	45	55	4½	3	12	54	30	3	15	20	7

MOVIMENTO DO SOL EM ANOMALIA

Meses	60°	°	′	″		Meses	60°	°	′	″
1	0	29	6	18		7	3	23	44	7
2	0	58	12	36		8	3	52	50	25
3	1	27	18	54		9	4	21	56	43
4	1	56	25	12		10	4	51	3	1
5	2	25	31	31		11	5	20	9	20
6	2	54	37	49		12	5	49	15	38

PARA METADE DO MÊS

½	0	14	33	9

INVESTIGAÇÃO SOBRE AS CONJUNÇÕES E OPOSIÇÕES VERDADEIRAS DO SOL E DA LUA

Dado que, como se disse, temos o tempo da conjunção média ou oposição destes astros e simultaneamente os seus movimentos, para encontrar os valores verdadeiros deles [sizígias], é necessário ter a distância verdadeira a que estão a Oeste ou a Este um do outro. Com efeito, se a Lua estiver a Oeste do Sol, numa conjunção média ou oposição, é evidente que ocorrerá uma conjunção verdadeira ou oposição. Se o Sol estiver a Oeste da Lua, a conjunção verdadeira ou oposição que procuramos já ocorreu. Estas sequências são postas a claro pelas prostaféreses dos dois astros. Com efeito, se as suas prostaféreses são nulas ou iguais e no mesmo sentido, isto é, ambas aditivas ou subtractivas, as conjunções verdadeiras ou oposições coincidem obviamente com as conjunções ou oposições médias, no mesmo instante. Mas se as prostaféreses são desiguais, no mesmo sentido, a diferença entre as prostaféreses indica a distância entre os astros. O astro que tem a maior prostaférese aditiva ou subtractiva está a Oeste ou Este do outro astro. Mas quando as prostaféreses são em sentidos opostos, o astro cuja prostaférese é subtractiva será o que fica mais a Oeste, dado que a soma das prostaféreses dá a distância entre os astros. Em referência a esta distância, veremos em quantas horas pode ser atravessada pela Lua, considerando 2 horas para cada grau de distância.

Assim, se a distância entre os astros for cerca de 6°, tomaremos 12 horas para esses graus. Então, para o intervalo de tempo assim determinado, procuraremos a distância verdadeira da Lua em relação ao Sol. Encontrá-la-emos facilmente se soubermos que o movimento médio da Lua é igual a 1° 1′ em 2 horas, enquanto o seu movimento horário verdadeiro, em anomalia, à volta da Lua cheia ou da Lua nova, é de quase 50′. Em 6 horas, o movimento uniforme eleva-se a 3° 3′ [= 3 × 1° 1′] e o movimento verdadeiro, em anomalia, a 5° [= 6 × 50′]. Com estes números, na Tabela das prostaféreses da Lua, procuraremos a diferença entre as prostaféreses. Esta diferença é adicionada ao movimento médio, se a anomalia estiver na parte inferior do círculo; se estiver na parte superior, a diferença será subtraída. O total ou o resto é o movimento verdadeiro da Lua nas horas referidas. Este movimento é suficiente se for igual à distância previamente determinada. Aliás, esta distância multiplicada pelo número mencionado de horas, é dividida por este movimento, ou dividimos a distância tal como ela é, pelo que obtivemos como movimento horário verdadeiro. O quociente será a diferença do tempo verdadeiro em horas e minutos entre a conjunção ou oposição média e verdadeira. Acrescentaremos esta diferença ao tempo da conjunção ou oposição média, se a Lua está a Oeste do Sol ou do lugar diametralmente oposto ao Sol. Se a Lua está a Este destas posições, subtrairemos esta diferença. Teremos, então, o tempo da conjunção verdadeira ou oposição.

Admito, contudo, que a não uniformidade do Sol também acrescenta ou subtrai alguma coisa. Mas esta quantidade pode ser com razão desprezada, visto não exceder 1′, em todo o tempo, mesmo na sua distância máxima, que ultrapassa 7°. Este método de determinar as lunações merece mais confiança. Com efeito, aqueles que se apoiam exclusivamente no movimento horário da Lua, a que chamam o «excedente horário», caem, por vezes, em erro, e são frequentemente forçados a repetir o seu cálculo, dado que o movimento da Lua muda, até de hora para hora, e não permanece constante. Por conseguinte, para o tempo de uma conjunção ou oposição verdadeira estabeleceremos o movimento verdadeiro em latitude, para obter a latitude da Lua, e também a distância do Sol, em relação ao equinócio da Primavera, isto é, nos signos do zodíaco, por meio do qual se consegue a posição da Lua, como sendo a mesma ou a diametralmente oposta.

Deste modo, o tempo médio e uniforme é obtido para o meridiano de Cracóvia, e reduzimo-lo ao tempo aparente pelo método atrás exposto. Mas, se quisermos determinar estes fenómenos para algum lugar diferente de Cracóvia, consideramos a sua longitude. Para cada grau dessa longitude, tomamos 4 minutos de uma hora e 4 segundos de uma hora, para cada minuto de longitude. Acrescentamos estes intervalos ao tempo de Cracóvia, se o outro lugar estiver mais a Este. Se estiver mais a Oeste, subtraímos os intervalos. O resultado será o tempo da conjunção ou oposição verdadeira do Sol e da Lua.

COMO AS CONJUNÇÕES E OPOSIÇÕES DO SOL E DA LUA EM QUE OS ECLIPSES OCORREM SE PODEM DISTINGUIR DAS OUTRAS

No caso da Lua vê-se bem se ocorrem eclipses ou não eclipses nestas conjunções e oposições [sizígias] do Sol e da Lua.

Com efeito, se a latitude é menor do que metade da soma dos diâmetros da Lua e da sombra, a Lua entra em eclipse, mas se a latitude é maior [do que tal soma] não entrará em eclipse. Contudo, o caso do Sol levanta bastantes problemas visto que envolve as duas paralaxes, pelas quais, em geral, uma conjunção aparente difere de uma verdadeira. Portanto, investigamos a diferença em longitude entre o Sol e a Lua, no tempo da conjunção verdadeira. Do mesmo modo, uma hora antes da conjunção verdadeira no quadrante Este da eclíptica ou no quadrante Oeste da eclíptica, 1 hora depois da conjunção verdadeira, procuramos a distância longitudional aparente da Lua em relação ao Sol para saber a que distância aparente a Lua se encontra do Sol numa hora. Dividindo essa diferença, em longitude, por este movimento horário, obtemos a diferença, em tempo, entre a conjunção verdadeira e aparente. Esta diferença em tempo é subtraída do tempo da conjunção verdadeira, na parte Este da eclíptica, ou é acrescentada na parte Oeste, uma vez que no primeiro caso a conjunção aparente precede, mas no segundo segue a conjunção verdadeira. O resultado será o tempo procurado da conjunção aparente. Para este tempo, calcularemos a distância aparente da Lua em latitude, com relação ao Sol, ou a distância entre os centros do Sol e da Lua, no instante da conjunção aparente, depois da paralaxe do Sol ter sido subtraída. Se esta latitude for maior do que metade da soma dos diâmetros do Sol e da Lua, o Sol não entrará em eclipse mas isso acontecerá, se esta latitude for menor do que metade da soma daqueles diâmetros. Estas conclusões mostram claramente que, se a Lua na altura de uma conjunção verdadeira não tem paralaxe em longitude, as conjunções verdadeira e aparente coincidirão. Isto diz-se em cerca de 90º da eclíptica, medida de Este ou de Oeste.

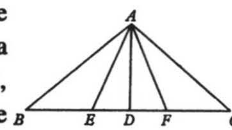
A GRANDEZA DE UM ECLIPSE DO SOL OU DA LUA

Depois de sabermos que o Sol ou a Lua entrarão em eclipse, também saberemos facilmente qual a grandeza dos eclipses. No caso do Sol, usamos a diferença aparente em latitude, entre o Sol e a Lua, na altura da conjunção aparente. Com efeito, se subtrairmos esta latitude de metade da soma dos diâmetros do Sol e da Lua, o resto é a porção eclipsada de Sol , medida ao longo do seu diâmetro. Quando multiplicarmos este resto por 12 e dividirmos o produto pelo diâmetro do Sol, teremos o número dos dedos eclipsados no Sol. Mas se não há latitude entre o Sol e a Lua, todo o Sol ficará eclipsado, ou pelo menos tudo o que a Lua possa encobrir.

No caso de um eclipse da Lua, procedemos quase do mesmo modo, excepto que, em vez da latitude aparente, usamos a latitude simples. Quando se subtrai esta de metade da soma dos diâmetros da Lua e da sombra, o resto é a porção eclipsada da Lua, desde que a latitude desta não seja menor do que metade da soma desses diâmetros, num diâmetro da Lua. Com efeito, então, se a latitude da Lua for um diâmetro deste planeta menos do que metade dessa soma, toda a Lua ficará eclipsada. Além disso, a latitude menor prolongará também alguma coisa o tempo passado pela Lua na obscuridade. Este tempo alcançará o seu máximo quando não houver latitude, como é perfeitamente evidente para aqueles que reflictam neste assunto, segundo creio. Num eclipse parcial da Lua, se multiplicarmos a parte eclipsada por 12, e dividirmos o produto pelo diâmetro da Lua, teremos o número de dedos eclipsados, exactamente como foi explicado no caso do Sol.

PREVISÃO DA DURAÇÃO DE UM ECLIPSE DO SOL OU DA LUA

Falta ver qual a duração de um eclipse. Em relação a isto, deve notar-se que nós consideramos os arcos situados entre o Sol, a Lua e a sombra, como linhas rectas, devido à sua pequena extensão, que os faz parecer não diferentes de linhas rectas. Assim, tomemos o centro do Sol ou da sombra no ponto A, e a linha BC como a passagem do globo da Lua. Seja B o seu centro quando toca o Sol ou a sombra, no início do contacto, e C o seu centro, na extremidade desse contacto, quando emerge totalmente da sombra. Juntemos AB e AC. Tracemos a linha perpendicular AD para BC. Quando o centro da Lua está em D, será evidentemente o meio do eclipse. Com efeito, AD é menor do que as outras linhas que descem de A para BC. BD é igual a DC, pois AB é igual a AC, cada uma das quais constitui, num eclipse do Sol, metade da soma dos diâmetros do Sol e da Lua; e da Lua e da sombra num eclipse lunar. AD é a latitude aparente ou verdadeira da Lua, no meio do eclipse. Daqui resulta que a extensão de BD será dada $(BD)^2 = (AB)^2 - (AD)^2$. Quando dividimos esta extensão pelo movimento horário verdadeiro da Lua, num eclipse lunar, ou pelo movimento horário aparente da Lua, num eclipse do Sol, teremos o tempo de metade da duração do eclipse.

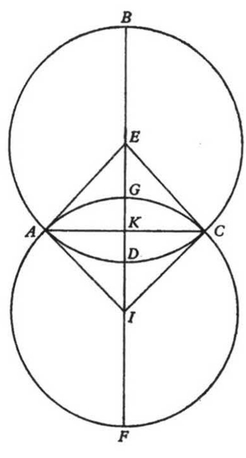


Contudo, a Lua muitas vezes faz uma pausa no meio da sombra. Isto acontece quando metade da soma dos diâmetros da Lua e da sombra excede a latitude da Lua em mais do que o seu diâmetro, como dissemos [IV, 31]. Ássim, tomemos *E* como o centro da Lua, no início da sua imersão total, quando a Lua toca a circunferência da sombra da parte de dentro e *F*, o centro da Lua, no seu segundo contacto, onde a Lua primeiro emerge da sombra. Juntemos *AE* e *AF*. Depois, do mesmo modo que antes, *ED* e *DF* serão evidentemente metade do tempo passado na sombra. Com efeito, sabe-se que *AD* é a latitude da Lua e *AE* ou *AF* o excesso de metade do diâmetro da sombra sobre metade do diâmetro da Lua. Por conseguinte determinar-se-ão *ED* ou *DF*. Quando um deles é mais uma vez dividido pelo movimento horário verdadeiro da Lua, temos metade do tempo passado na sombra, que era o que procurávamos.

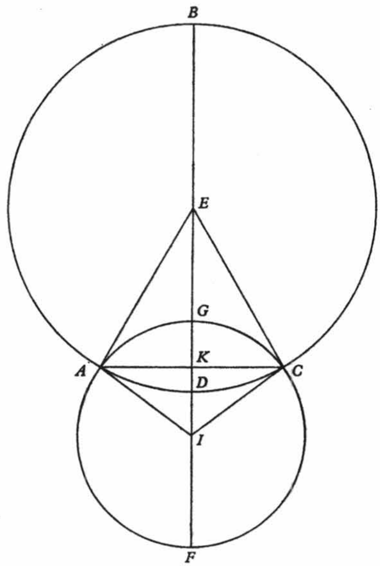
Contudo, deve-se observar aqui que, quando a Lua se move no seu próprio círculo, não marca os graus de longitude, na eclíptica, exactamente iguais aos graus do seu círculo, graus medidos pelos círculos que passam pelos pólos da eclíptica. Não obstante, a diferença é pequena. Na distância completa de 12°, da intersecção com a eclíptica, junto ao limite extremo dos eclipses do Sol e da Lua, os arcos desses círculos não diferem um do outro em 2′ que são $^1/_{15}$ da hora. Por esta razão, utilizámo-los muitas vezes, um em vez do outro, como se fossem idênticos. De igual modo também utilizámos a mesma latitude da Lua tanto nos limites de um eclipse como no meio do eclipse, embora a latitude da Lua esteja sempre a aumentar ou a diminuir, e, por conseguinte, as zonas de imersão e emersão não sejam absolutamente iguais. Por outro lado, a diferença entre elas é tão ligeira que pareceria ser um desperdício de tempo observar estes pormenores com maior rigor. Como anteriormente, os tempos, as durações e as grandezas dos eclipses são referidas aos diâmetros.

Mas, na opinião de muitos astrónomos as partes eclipsadas deviam ser indicadas em relação às superfícies e não aos diâmetros, uma vez que as superfícies é que estão eclipsadas e não as linhas. Assim, seja o círculo do Sol ou da sombra, *ABCD*, com o seu centro em *E*. Seja o círculo da Lua *AFCG*, com o seu centro em *I*. [Suponha-se] que estes dois círculos se intersectam nos pontos *A* e *C*. Por ambos os centros façamos passar a linha recta *BEIF*. Juntemos *AE*, *EC*, *AI* e *IC*. Tracemos *AKC* perpendicular a *BF*. Destes círculos desejamos determinar a grandeza da superfície eclipsada *ADCG*, ou o número [de partes] de todo o plano do círculo do Sol ou da Lua, que está eclipsado.

Ora, pelo que fica dito, *AE* e *AI*, os raios de ambos os círculos, são dados. O mesmo acontece com *EI*, a distância



entre os seus centros, que é igual à latitude da Lua. Assim, no triângulo *AEI*, temos os lados dados, assim como os ângulos, de acordo com o que atrás se demonstrou, *EIC* é semelhante e igual a *AEI*. Consequentemente, os arcos *ADC* e *AGC* serão dados em graus, no sistema em que a circunferência de um círculo tem 360°. De acordo com as *Medidas do Círculo* de Arquimedes de Siracusa, a razão entre a circunferência e o diâmetro é menor do que $3^1/_7$, mas maior do que $3\ ^{10}/_{71}$. Entre estes valores, Ptolomeu perfilha uma razão igual a 3 unidades, 8′ 30″: 1 unidade. Partindo desta razão, conhecer-se-ão os arcos *AGC* e *ADC*, no mesmo sistema de unidades que os seus diâmetros, também, ou como *AE* e *AI*. As áreas contidas em *EA* e *AD*, *IA* e *AG*, são iguais aos sectores *AEC* e *AIC*, respectivamente. Mas nos triângulos isósceles, *AEC* e *AIC*, a base comum, *AKC*, é dada, assim como as perpendiculares, *EK* e *KI*.



Assim, o rectângulo de *AK* por *KI* é igual à área do triângulo *ACI*. Subtraindo ambos os triângulos dos seus sectores [sector *AEDC*-△*AEC*; sector *AGCI*-△*ACI*], os restos são *AGC* e *ACD* como segmentos dos círculos. Estes segmentos dão-nos a conhecer todo o *ADCG*, que se queria encontrar, assim como a área circular inteira, definida por *BE* e *BAD*, num eclipse solar; ou por *FI* e *FAG*, num eclipse da Lua. Daqui resultará, claramente, quantos $^{1}/_{12}$ de todo o círculo, quer do Sol quer da Lua, serão ocupados por *ADCG*, a área eclipsada.

Em relação à Lua consideramos esta discussão suficiente por agora. É este um assunto que foi mais amplamente tratado por outros.

Por mim, estou ansioso por discutir as revoluções dos outros cinco astros. Esse será o tema dos livros seguintes.

LIVRO V

INTRODUÇÃO

Até aqui tratámos das revoluções da Terra à volta do Sol, Liv. III e da Lua à volta da Terra, Liv. IV. Agora, passamos aos movimentos dos cinco planetas. A ordem e grandeza das suas esferas estão relacionadas, com uma concordância maravilhosa e perfeita simetria, pelo movimento da Terra, como indicámos de uma maneira geral, no Livro I capítulo 9, quando mostrámos que os centros destas esferas não estão próximos da Terra mas antes, perto do Sol. Resta-nos provar todas estas afirmações, cada uma por sua vez e mais claramente, cumprindo o que prometemos, tanto quanto nos seja possível. Em particular, utilizaremos observações de fenómenos que fomos buscar não só à antiguidade mas também ao nosso próprio tempo, para assim a teoria dos movimentos se tornar mais certa.

[A versão inicial era a a seguinte:
Os planetas movem-se em latitude e longitude de vários modos, sendo as suas variações não uniformes e observáveis nos dois sentidos [dos seus movimentos uniformes]. Por isso valia a pena destorcer os seus movimentos uniforme e médio, de modo que a variação nas suas não uniformidades fosse precisada. Mas para determinar o movimento uniforme é importante, porém, conhecer os períodos das revoluções, dos quais se infere que uma não uniformidade retornou [a uma situação] semelhante a uma [situação] anterior, tal como aconteceu a respeito do Sol e da Lua [III, 13; IV, 3].
Versão impressa:]

Estes cinco planetas têm, cada um, o seu nome, no *Timeu* de Platão, de acordo com aspecto que apresentam.

A Saturno chama-se o «Fénon» para significar «brilhante» ou «visível», pois é menos invisível do que os outros e aparece mais cedo depois de estar ocultado pelo Sol. A Júpiter dá-se o nome de «Féton» por causa do seu brilho. Marte é chamado «Pírois» devido ao seu esplendor ígneo. Vénus é por vezes denominado «Phosphorus», outras vezes, «Héspero», isto é, «Estrela da manhã» e «Estrela da Tarde» segundo brilha de manhã ou à tarde. Finalmente, Mercúrio tem o nome de «Stílbon» por causa da sua luz cintilante. Estes movem-se em longitude e latitude, com maior irregularidade do que a Lua.

AS REVOLUÇÕES E OS MOVIMENTOS MÉDIOS DOS PLANETAS

Há dois movimentos em longitude nos planetas, completamente diferentes. Um é provocado pelo movimento da Terra atrás mencionado e o outro é o movimento próprio de cada um. Decidimos chamar, com toda a propriedade, ao primeiro, um movimento paraláctico, pois é ele que dá origem às estações, progressões e regressões em todos eles, não porque o planeta, que sempre se move para a frente, com o seu movimento próprio, assim ande errante, mas porque uma espécie de paralaxe é produzida pelo movimento da Terra, segundo difere em grandeza daquelas esferas. É pois claro que as posições verdadeiras de Saturno, Júpiter e Marte, só são visíveis para nós quando nascem ao pôr do Sol, o que geralmente acontece cerca do meio das suas retrogradações. Com efeito nesse momento estão exactamente em linha recta com a posição média do Sol e da Terra e não são afastados da paralaxe. Contudo, no caso de Vénus e Mercúrio, prevalece uma relação diferente. Com efeito, eles estão encobertos, quando se encontram no periélio, e são visíveis apenas quando executam as suas elongações para um e outro lado do Sol, de modo que nunca se encontram, sem a sua paralaxe. Consequentemente, cada planeta tem a sua própria revolução paraláctica, quer dizer, um movimento da Terra em relação com o planeta, que estes dois astros realizam mutuamente.

Dizemos que o movimento em paralaxe não é senão a diferença, para mais, entre o movimento da Terra, quando uniforme, e o movimento de Saturno, Júpiter e Marte, ou para menos, em relação ao movimento de Vénus e Mercúrio. Mas porque estes períodos paralácticos são não uniformes, com uma irregularidade manifesta, os antigos reconheceram que os movimentos destes planetas eram igualmente não uniformes e os seus círculos tinham ápsides às quais a sua não uniformidade regressava. Pensavam que as ápsides tinham posições permanentes na esfera das estrelas fixas. Esta consideração abria caminho à descoberta dos movimentos médios dos planetas e períodos uniformes. Com efeito, depois de terem verificado a posição de um planeta, a uma distância precisa do Sol, ou de uma estrela fixa e verificarem que, após um [certo] intervalo de tempo, o planeta tinha chegado ao mesmo lugar, a uma distância semelhante do Sol, viam que o planeta tinha passado pela sua irregularidade completa e regressava, em todos os seus aspectos, à sua primitiva relação com a Terra. Assim, por meio do tempo que mediava entre as duas situações, calculavam o número de todas as revoluções completas uniformes e consequentemente os movimentos pormenorizados do planeta.

Estas revoluções foram apresentadas por Ptolomeu [*Almagesto*, IX, 3], referidas a anos solares, que afirma tê-las recebido de Hiparco. Mas ele pretende que se entendam os anos solares como medidos em relação a um equinócio ou a um solstício. Contudo estes anos não são inteiramente uniformes, como se vê agora claramente. Por conseguinte, utilizaremos os que são medidos pelas estrelas fixas. Servindo-nos destes anos, redeterminámos também os movimentos destes cinco planetas com maior rigor, de acordo com as nossas verificações, que, no nosso tempo, tinham alguma coisa a menos ou a mais, como se verá a seguir.

Naquilo a que chamámos movimento paraláctico, a Terra volta a Saturno 57 vezes em 59 dos nossos anos solares, mais 1 dia, 6 minutos de um dia, e cerca de 48 segundos de um dia. Neste tempo, o planeta completa 2 revoluções, mais 1° 6′ 6″, no seu movimento próprio. Júpiter é ultrapassado pela Terra, 65 vezes em 71 anos solares, menos 5 dias, 45 minutos de um dia, 27 segundos de um dia. Neste tempo, o planeta faz 6 revoluções, menos 5° 41′ 2 $^{1}/_{2}$″, no seu movimento próprio. Quanto a Marte, as revoluções paralácticas são 37, em 79 anos solares, 2 dias, 27 minutos de um dia, 3 segundos de um dia. Neste tempo, o planeta completa 42 períodos, mais 2° 24′ 56″, no seu movimento próprio. Vénus passa pela Terra, em movimento 5 vezes em 8 anos solares, menos 2 dias, 26 minutos de um dia, 46 segundos de um dia. Neste período realiza 13 revoluções à volta do Sol, menos 2° 24′ 40″. Finalmente em 46 anos solares, mais 34 minutos de um dia, 23 segundos de um dia, Mercúrio completa 145 revoluções paralácticas, em que ultrapassa a Terra em movimento, e com as quais faz revoluções, à volta do Sol, 191 vezes mais 31′ e cerca de 23″. Por conseguinte, as durações das revoluções paralácticas para os vários planetas são:

Saturno, 378 dias, 5 minutos de um dia, 32 segundos de um dia e $^{11}/_{60}$ segundos de um dia. Júpiter, 398 dias, 23 minutos de um dia, 2 segundos de um dia e $^{56}/_{60}$ segundos de um dia. Marte, 779 dias, 56 minutos, 19 segundos de um dia, e $^{7}/_{60}$ segundos de um dia. Vénus, 583 dias, 55 minutos, 17 segundos de um dia, $^{24}/_{60}$ segundos de um dia. Mercúrio, 115 dias, 52 minutos, 42 segundos de um dia, e $^{12}/_{60}$ segundos de um dia.

Se reduzirmos estes números a graus de círculos [360], multiplicados por 365, e dividirmos este produto pelo número dado de dias e fracções de dias, teremos o movimento anual para [os planetas assim]:

Saturno: 347° 32′ 12″ 54‴ 12⁗; Júpiter: 329° 25′ 8″15‴ 6⁗; Marte: 168° 28′ 29″ 13‴ 12⁗; Vénus: 225° 1′ 48″ 54‴ 30⁗; Mercúrio: 3 revoluções e 53° 56′ 46″ 54‴ 40⁗.

Se dividirmos estes números por 365, obtemos o movimento diário, para Saturno: $57'\ 7''\ 44'''\ 0''''$; Júpiter: $54'\ 9''\ 3'''\ 49''''$; Marte: $27'\ 41''\ 40'''\ 0''''$; Vénus: $36'\ 59''\ 28'''\ 35''''$; Mercúrio: $3^{o}\ 6'\ 24''\ 7'''\ 43''''$, como está nas Tabelas que se seguem, na parte dedicada aos movimentos médios do Sol e da Lua. Contudo, julgamos supérfluo designar assim, nas Tabelas, os movimentos próprios dos planetas. Com efeito, obtemos estes movimentos subtraindo os movimentos inscritos nas Tabelas, do movimento médio do Sol, em que entram como componente, de harmonia com o que dissemos. Não obstante, se alguém não ficar satisfeito com este processo, pode fazer a outra Tabela, se o desejar. Com efeito, o movimento anual próprio, em referência à esfera das estrelas fixas, é para Saturno: $12^{o}\ 12'\ 46''\ 12'''\ 52''''$; para Júpiter: $30^{o}\ 19'\ 40''\ 51'''\ 58''''$; Marte: $191^{o}\ 16'\ 19''\ 53'''\ 52''''$.

Mas quanto a Vénus e Mercúrio, dado que não podemos observar o seu movimento anual próprio, usa-se o movimento do Sol, que fornece um método de determinar e demonstrar os seus fenómenos, como se vê a seguir.

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE SATURNO, EM ANOS E PERÍODOS DE 60 ANOS

Era Cristã 205° 49′

Anos egípcios	Movimento					Anos egípcios	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	5	47	32	3	9	31	5	33	33	37	59
2	5	35	4	6	19	32	5	21	5	41	9
3	5	22	36	9	29	33	5	8	37	44	19
4	5	10	8	12	38	34	4	56	9	47	28
5	4	57	40	15	48	35	4	43	41	50	38
6	4	45	12	18	58	36	4	31	13	53	48
7	4	32	44	22	7	37	4	18	45	56	57
8	4	20	16	25	17	38	4	6	18	0	7
9	4	7	48	28	27	39	3	53	50	3	17
10	3	55	20	31	36	40	3	41	22	6	26
11	3	42	52	34	46	41	3	28	54	9	36
12	3	30	24	37	56	42	3	16	26	12	46
13	3	17	56	41	5	43	3	3	58	15	55
14	3	5	28	44	15	44	2	51	30	19	5
15	2	53	0	47	25	45	2	39	2	22	15
16	2	40	32	50	34	46	2	26	34	25	24
17	2	28	4	53	44	47	2	14	6	28	34
18	2	15	36	56	54	48	2	1	38	31	44
19	2	3	9	0	3	49	1	49	10	34	53
20	1	50	41	3	13	50	1	36	42	38	3
21	1	38	13	6	23	51	1	24	14	41	13
22	1	25	45	9	32	52	1	11	46	44	22
23	1	13	17	12	42	53	0	59	18	47	32
24	1	0	49	15	52	54	0	46	50	50	42
25	0	48	21	19	1	55	0	34	22	53	51
26	0	35	53	22	11	56	0	21	54	57	1
27	0	23	25	25	21	57	0	9	27	0	11
28	0	10	57	28	30	58	5	56	59	3	20
29	5	58	29	31	40	59	5	44	31	6	30
30	5	46	1	34	50	60	5	32	3	9	40

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE SATURNO,
EM DIAS, PERÍODOS DE 60 DIAS E FRACÇÕES DE DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	57	7	44	31	0	29	30	59	46
2	0	1	54	15	28	32	0	30	28	7	30
3	0	2	51	23	12	33	0	31	25	15	14
4	0	3	48	30	56	34	0	32	22	22	58
5	0	4	45	38	40	35	0	33	19	30	42
6	0	5	42	46	24	36	0	34	16	38	26
7	0	6	39	54	8	37	0	35	13	46	1
8	0	7	37	1	52	38	0	36	10	53	55
9	0	8	34	9	36	39	0	37	8	1	39
10	0	9	31	17	20	40	0	38	5	9	23
11	0	10	28	25	4	41	0	39	2	17	7
12	0	11	25	32	49	42	0	39	59	24	51
13	0	12	22	40	33	43	0	40	56	32	35
14	0	13	19	48	17	44	0	41	53	40	19
15	0	14	16	56	1	45	0	42	50	48	3
16	0	15	14	3	45	46	0	43	47	55	47
17	0	16	11	11	29	47	0	44	45	3	31
18	0	17	8	19	13	48	0	45	42	11	16
19	0	18	5	26	57	49	0	46	39	19	0
20	0	19	2	34	41	50	0	47	36	26	44
21	0	19	59	42	25	51	0	48	33	34	28
22	0	20	56	50	9	52	0	49	30	42	12
23	0	21	53	57	53	53	0	50	27	49	56
24	0	22	51	5	38	54	0	51	24	57	40
25	0	23	48	13	22	55	0	52	22	5	24
26	0	24	45	21	6	56	0	53	19	13	8
27	0	25	42	28	50	57	0	54	16	20	52
28	0	26	39	36	34	58	0	55	13	28	36
29	0	27	36	44	18	59	0	56	10	36	20
30	0	28	33	52	2	60	0	57	7	44	5

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE JÚPITER, EM ANOS E PERÍODOS DE 60 ANOS

Anos egíp-cios	Movimento					Anos egíp-cios	Movimento				
	60°	°	′	″	″		60°	°	′	″	″
1	5	29	25	8	15	31	2	11	59	15	48
2	4	58	50	16	30	32	1	41	24	24	3
3	4	28	15	24	45	33	1	10	49	32	18
4	3	57	40	33	0	34	0	40	14	40	33
5	3	27	5	41	15	35	0	9	39	48	48
6	2	56	30	49	30	36	5	39	4	57	3
7	2	25	55	57	45	37	5	8	30	5	18
8	1	55	21	6	0	38	4	37	55	13	33
9	1	24	46	14	15	39	4	7	20	21	48
10	0	54	11	22	31	40	3	36	45	30	4
11	0	23	36	30	46	41	3	6	10	38	19
12	5	53	1	39	1	42	2	35	35	46	34
13	5	22	26	47	16	43	2	5	0	54	49
14	4	51	51	55	31	44	1	34	26	3	4
15	4	21	17	3	46	45	1	3	51	11	19
16	3	50	42	12	1	46	0	33	16	19	34
17	3	20	7	20	16	47	0	2	41	27	49
18	2	49	32	28	31	48	5	32	5	36	4
19	2	18	57	36	46	49	5	1	31	44	19
20	1	48	22	45	2	50	4	30	56	52	34
21	1	17	47	53	17	51	4	0	22	0	50
22	0	47	13	1	32	52	3	29	47	9	5
23	0	16	38	9	47	53	2	59	12	17	20
24	5	46	3	18	2	54	2	28	37	25	35
25	5	15	28	26	17	55	1	58	2	33	50
26	4	44	53	34	32	56	1	27	27	42	5
27	4	14	18	42	47	57	0	56	52	50	20
28	3	43	43	51	2	58	0	26	17	58	35
29	3	13	8	59	17	59	5	55	43	6	50
30	2	42	34	7	33	60	5	25	8	15	6

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE JÚPITER, EM DIAS, PERÍODOS DE 60 DIAS E FRACÇÕES DE DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	54	9	3	31	0	27	58	40	58
2	0	1	48	18	7	32	0	28	52	50	2
3	0	2	42	27	11	33	0	29	46	59	5
4	0	3	36	36	15	34	0	30	41	8	9
5	0	4	30	45	19	35	0	31	35	17	13
6	0	5	24	54	22	36	0	32	29	26	17
7	0	6	19	3	26	37	0	33	23	35	21
8	0	7	13	12	30	38	0	34	17	44	25
9	0	8	7	21	34	39	0	35	11	53	29
10	0	9	1	30	38	40	0	36	6	2	32
11	0	9	55	39	41	41	0	37	0	11	36
12	0	10	49	48	45	42	0	37	54	20	40
13	0	11	43	57	49	43	0	38	48	29	44
14	0	12	38	6	53	44	0	39	42	38	47
15	0	13	32	15	57	45	0	40	36	47	51
16	0	14	26	25	1	46	0	41	30	56	55
17	0	15	20	34	4	47	0	42	25	5	59
18	0	16	14	43	8	48	0	43	19	15	3
19	0	17	8	52	12	49	0	44	13	24	6
20	0	18	3	1	16	50	0	45	7	33	10
21	0	18	57	10	20	51	0	46	1	42	14
22	0	19	51	19	23	52	0	46	55	51	18
23	0	20	45	28	27	53	0	47	50	0	22
24	0	21	39	37	31	54	0	48	44	9	26
25	0	22	33	46	35	55	0	49	38	18	29
26	0	23	27	55	39	56	0	50	32	27	33
27	0	24	22	4	43	57	0	51	26	36	37
28	0	25	16	13	46	58	0	52	20	45	41
29	0	26	10	22	50	59	0	53	14	54	45
30	0	27	4	31	54	60	0	54	9	3	49

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE MARTE, EM ANOS E PERÍODOS DE 60 ANOS

Anos egípcios	Movimento					Anos egípcios	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	2	48	28	30	36	31	3	2	43	48	38
2	5	36	57	1	12	32	5	51	12	19	14
3	2	25	25	31	48	33	2	39	40	49	50
4	5	13	54	2	24	34	5	28	9	20	26
5	2	2	22	33	0	35	2	16	37	51	2
6	4	50	51	3	36	36	5	5	6	21	38
7	1	39	19	34	12	37	1	53	34	52	14
8	4	27	48	4	48	38	4	42	3	22	50
9	1	16	16	35	24	39	1	30	31	53	26
10	4	4	45	6	0	40	4	19	0	24	2
11	0	53	13	36	36	41	1	7	28	54	38
12	3	41	42	7	12	42	3	55	57	25	14
13	0	30	10	37	48	43	0	44	25	55	50
14	3	18	39	8	24	44	3	32	54	26	26
15	0	7	7	39	1	45	0	21	22	57	3
16	2	55	36	9	37	46	3	9	51	27	39
17	5	44	4	40	13	47	5	58	19	58	15
18	2	32	33	10	49	48	2	46	48	28	51
19	5	21	1	41	25	49	5	35	16	59	27
20	2	9	30	12	1	50	2	23	45	30	3
21	4	57	58	42	37	51	5	12	14	0	39
22	1	46	27	13	13	52	2	0	42	31	15
23	4	34	55	43	49	53	4	49	11	1	51
24	1	23	24	14	25	54	1	37	39	32	27
25	4	11	52	45	1	55	4	26	8	3	3
26	1	0	21	15	37	56	1	14	36	33	39
27	3	48	49	46	13	57	4	3	5	4	15
28	0	37	18	16	49	58	0	51	33	34	51
29	3	25	46	47	25	59	3	40	2	5	27
30	0	14	15	18	2	60	0	28	30	36	4

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE MARTE, EM DIAS, PERÍODOS DE 60 DIAS E FRACÇÕES DE DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	27	41	40	31	0	14	18	31	51
2	0	0	55	23	20	32	0	14	46	13	31
3	0	1	23	5	1	33	0	15	14	55	12
4	0	1	50	46	41	34	0	15	41	36	52
5	0	2	18	28	21	35	0	16	9	18	32
6	0	2	46	10	2	36	0	16	37	0	13
7	0	3	13	51	42	37	0	17	4	41	53
8	0	3	41	33	22	38	0	17	32	23	33
9	0	4	9	15	3	39	0	18	0	5	14
10	0	4	36	56	43	40	0	18	27	46	54
11	0	5	4	38	24	41	0	18	55	28	35
12	0	5	32	20	4	42	0	19	23	10	15
13	0	6	0	1	44	43	0	19	50	51	55
14	0	6	27	43	25	44	0	20	18	33	36
15	0	6	55	25	5	45	0	20	46	15	16
16	0	7	23	6	45	46	0	21	13	56	56
17	0	7	50	48	26	47	0	21	41	38	37
18	0	8	18	30	6	48	0	22	9	20	17
19	0	8	46	11	47	49	0	22	37	1	57
20	0	9	13	53	27	50	0	23	4	43	38
21	0	9	41	35	7	51	0	23	32	25	18
22	0	10	9	16	48	52	0	24	0	6	59
23	0	10	36	58	28	53	0	24	27	48	39
24	0	11	4	40	8	54	0	24	55	30	19
25	0	11	32	21	49	55	0	25	23	12	0
26	0	12	0	3	29	56	0	25	50	53	40
27	0	12	27	45	9	57	0	26	18	35	20
28	0	12	55	26	49	58	0	26	46	17	1
29	0	13	23	8	30	59	0	27	13	58	41
30	0	13	50	50	11	60	0	27	41	40	22

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE VÉNUS, EM ANOS E PERÍODOS DE 60 ANOS

Anos egíp-cios	Movimento					Anos egíp-cios	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	3	45	1	45	3	31	2	15	54	16	53
2	1	30	3	30	7	32	0	0	56	1	57
3	5	15	5	15	11	33	3	45	57	47	1
4	3	0	7	0	14	34	1	30	59	32	4
5	0	45	8	45	18	35	5	16	1	17	8
6	4	30	10	30	22	36	3	1	3	2	12
7	2	15	12	15	25	37	0	46	4	47	15
8	0	0	14	0	29	38	4	31	6	32	19
9	3	45	15	45	33	39	2	16	8	17	23
10	1	30	17	30	36	40	0	1	10	2	26
11	5	15	19	15	40	41	3	46	11	47	30
12	3	0	21	0	44	42	1	31	13	32	34
13	0	45	22	45	47	43	5	16	15	17	37
14	4	30	24	30	51	44	3	1	17	2	41
15	2	15	26	15	55	45	0	46	18	47	45
16	0	0	28	0	58	46	4	31	20	32	48
17	3	45	29	46	2	47	2	16	22	17	52
18	1	30	31	31	6	48	0	1	24	2	56
19	5	15	33	16	9	49	3	46	25	47	59
20	3	0	35	1	13	50	1	31	27	33	3
21	0	45	36	46	17	51	5	16	29	18	7
22	4	30	38	31	20	52	3	1	31	3	10
23	2	15	40	16	24	53	0	46	32	48	14
24	0	0	42	1	28	54	4	31	34	33	18
25	3	45	43	46	31	55	2	16	36	18	21
26	1	30	45	31	35	56	0	1	38	3	25
27	5	15	47	16	39	57	3	46	39	48	29
28	3	0	49	1	42	58	1	31	41	33	32
29	0	45	50	46	46	59	5	16	43	18	36
30	4	30	52	31	50	60	3	1	45	3	40

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE VÉNUS, EM DIAS, PERÍODOS DE 60 DIAS E FRACÇÕES DE DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	0	36	59	28	31	0	19	6	43	46
2	0	1	13	58	57	32	0	19	43	43	14
3	0	1	50	58	25	33	0	20	20	42	43
4	0	2	27	57	54	34	0	20	57	42	11
5	0	3	4	57	22	35	0	21	34	41	40
6	0	3	41	56	51	36	0	22	11	41	9
7	0	4	18	56	20	37	0	22	48	40	37
8	0	4	55	55	48	38	0	23	25	40	6
9	0	5	32	55	17	39	0	24	2	39	34
10	0	6	9	54	45	40	0	24	39	39	3
11	0	6	46	54	14	41	0	25	16	38	31
12	0	7	23	53	43	42	0	25	53	38	0
13	0	8	0	53	11	43	0	26	30	37	29
14	0	8	37	52	40	44	0	27	7	36	57
15	0	9	14	52	8	45	0	27	44	36	26
16	0	9	51	51	37	46	0	28	21	35	54
17	0	10	28	51	5	47	0	28	58	35	23
18	0	11	5	50	34	48	0	29	35	34	52
19	0	11	42	50	2	49	0	30	12	34	20
20	0	12	19	49	31	50	0	30	49	33	49
21	0	12	56	48	59	51	0	31	26	33	17
22	0	13	33	48	28	52	0	32	3	32	46
23	0	14	10	47	57	53	0	32	40	32	14
24	0	14	47	47	26	54	0	33	17	31	43
25	0	15	24	46	54	55	0	33	54	31	12
26	0	16	1	46	23	56	0	34	31	30	40
27	0	16	38	45	51	57	0	35	8	30	9
28	0	17	15	45	20	58	0	35	45	29	37
29	0	17	52	44	48	59	0	36	22	29	6
30	0	18	29	44	17	60	0	36	59	28	35

O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE MERCÚRIO, EM ANOS E PERÍODOS DE 60 ANOS

Anos egíp-cios	Movimento					Anos egíp-cios	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	53	57	23	6	31	3	52	38	56	21
2	1	47	54	46	13	32	4	46	36	19	28
3	2	41	52	9	19	33	5	40	33	42	34
4	3	35	49	32	26	34	0	34	31	5	41
5	4	29	46	55	32	35	1	28	28	28	47
6	5	23	44	18	39	36	2	22	25	51	54
7	0	17	41	41	45	37	3	16	23	15	0
8	1	11	39	4	52	38	4	10	20	38	7
9	2	5	36	27	58	39	5	4	18	1	13
10	2	59	33	51	5	40	5	58	15	24	20
11	3	53	31	14	11	41	0	52	12	47	26
12	4	47	28	37	18	42	1	46	10	10	33
13	5	41	26	0	24	43	2	40	7	33	39
14	0	35	23	23	31	44	3	34	4	56	46
15	1	29	20	46	37	45	4	28	2	19	52
16	2	23	18	9	44	46	5	21	59	42	59
17	3	17	15	32	50	47	0	15	57	6	5
18	4	11	12	55	57	48	1	9	54	29	12
19	5	5	10	19	3	49	2	3	51	52	18
20	5	59	7	42	10	50	2	57	49	15	25
21	0	53	5	5	16	51	3	51	46	38	31
22	1	47	2	28	23	52	4	45	44	1	38
23	2	40	59	51	29	53	5	39	41	24	44
24	3	34	57	14	36	54	0	33	38	47	51
25	4	28	54	37	42	55	1	27	36	10	57
26	5	22	52	0	49	56	2	21	33	34	4
27	0	16	49	23	55	57	3	15	30	57	10
28	1	10	46	47	2	58	4	9	28	20	17
29	2	4	44	10	8	59	5	3	25	43	23
30	2	58	41	33	15	60	5	57	23	6	30

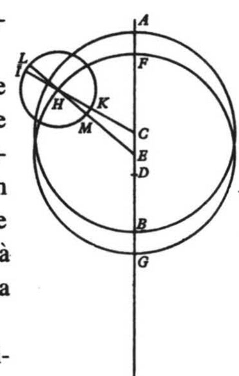
O MOVIMENTO PARALÁCTICO DE MERCÚRIO, EM DIAS, PERÍODOS DE 60 DIAS E FRACÇÕES DE DIAS

Dias	Movimento					Dias	Movimento				
	60°	°	′	″	‴		60°	°	′	″	‴
1	0	3	6	24	13	31	1	36	18	31	3
2	0	6	12	48	27	32	1	39	24	55	17
3	0	9	19	12	41	33	1	42	31	19	31
4	0	12	25	36	54	34	1	45	37	43	44
5	0	15	32	1	8	35	1	48	44	7	58
6	0	18	38	25	22	36	1	51	50	32	12
7	0	21	44	49	35	37	1	54	56	56	25
8	0	24	51	13	49	38	1	58	3	20	39
9	0	27	57	38	3	39	2	1	9	44	53
10	0	31	4	2	16	40	2	4	16	9	6
11	0	34	10	26	30	41	2	7	22	33	20
12	0	37	16	50	44	42	2	10	28	57	34
13	0	40	23	14	57	43	2	13	35	21	47
14	0	43	29	39	11	44	2	16	41	46	1
15	0	46	36	3	25	45	2	19	48	10	15
16	0	49	42	27	38	46	2	22	54	34	28
17	0	52	48	51	52	47	2	26	0	58	42
18	0	55	55	16	6	48	2	29	7	22	56
19	0	59	1	40	19	49	2	32	13	47	9
20	1	2	8	4	33	50	2	35	20	11	23
21	1	5	14	28	47	51	2	38	26	35	37
22	1	8	20	53	0	52	2	41	32	59	50
23	1	11	27	17	14	53	2	44	39	24	4
24	1	14	33	41	28	54	2	47	45	48	18
25	1	17	40	5	41	55	2	50	52	12	31
26	1	20	46	29	55	56	2	53	58	36	45
27	1	23	52	54	9	57	2	57	5	0	59
28	1	26	59	18	22	58	3	0	11	25	12
29	1	30	5	42	36	59	3	3	17	49	26
30	1	33	12	6	50	60	3	6	24	13	40

O MOVIMENTO UNIFORME E APARENTE DOS PLANETAS, SEGUNDO A TEORIA DOS ANTIGOS

Os movimentos médios ocorrem do modo que mostrámos atrás. Passemos agora ao movimento aparente não uniforme.

Os astrónomos antigos [Ptolomeu, *Almagesto,* IX, 5], defensores da teoria de que a Terra se não movia, imaginaram epiciclos excêntricos para Saturno, Júpiter, Marte, e Vénus. Imaginaram mais outro círculo excêntrico, em relação ao qual o epiciclo se movia não uniformemente, acontecendo o mesmo com o planeta no epiciclo.



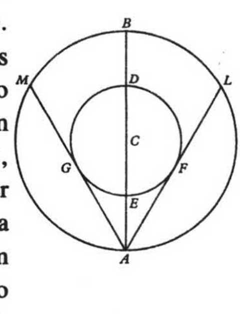
Assim, seja *AB* um círculo excêntrico, *C* o seu centro, e *ACB* o diâmetro em que se situa o centro da Terra *D*, de modo que o apogeu esteja em *A*, e o perigeu em *B*. Bissectemos *DC* em *E*. Tendo *E* como centro, descrevamos um segundo círculo excêntrico, *FG*, igual ao outro [AB], e marcando nele um ponto, *H*, como centro, descrevamos à sua volta um epiciclo, *IK*. Pelo seu centro, tracemos uma linha recta *IHKC*, e do mesmo modo, *LHME*.

Seja entendido que os círculos excêntricos estão inclinados em relação ao plano da eclíptica e o epiciclo em relação ao plano do círculo excêntrico, por causa da latitude do planeta. Aqui, porém, admitamos que estão num plano, para simplificar a demonstração. Ora, os antigos dizem que todo este plano, juntamente com os pontos *E* e *C*, se move à volta do ponto *D*, centro da eclíptica com o movimento das estrelas fixas. Com isto querem significar que estes pontos se situam na esfera das estrelas fixas, enquanto o epiciclo se move, também, para Este no círculo *FHG*, mas é regulado pela linha *IHC*, com referência à qual o planeta também gira uniformemente, no epiciclo *IK*. No entanto, aceitam que o movimento no epiciclo deve ser uniforme em relação a *E*, o centro do seu deferente, e que a revolução do planeta também o deve ser com respeito à linha *LME*. Concedem também, neste caso, que um movimento circular pode ser uniforme em relação a um centro que não seja o seu. O mesmo se aplica a Mercúrio, mas mais ainda. Mas tudo isto já nos refutámos suficientemente em referência à Lua [IV, 2]. Esta conclusão e outras considerações semelhantes deram-nos a oportunidade de pensar na mobilidade da Terra e noutros processos de preservar o movimento uniforme e os princípios da ciência, assim como de fazer o cálculo do movimento aparente não uniforme, com mais segurança.

EXPOSIÇÃO GERAL DA NÃO UNIFORMIDADE APARENTE DEVIDA AO MOVIMENTO DA TERRA

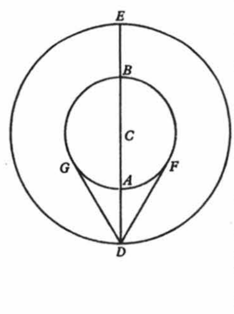
Há, pois, duas causas pelas quais o movimento uniforme de um planeta se apresenta como não uniforme: o movimento da Terra e o movimento próprio do planeta; vamos explicar cada uma das não uniformidades, em geral e separadamente com uma demonstração visual, para que melhor os distingamos um do outro. Começaremos pela não uniformidade que está ligada a todos eles, por causa do movimento da Terra, e consideraremos em primeiro lugar Vénus e Mercúrio, que estão no interior do círculo da Terra.

Seja, então, *AB* um círculo que é excêntrico ao Sol e que o centro da Terra descreve na sua revolução anual, como se disse atrás [III, 15]. Seja *C* o centro de *AB*. Suponhamos, agora, que o planeta não tem outra irregularidade senão a que teria se o considerássemos concêntrico com *AB*. Seja esse círculo concêntrico, *DE,* em relação a Vénus ou a Mercúrio. Tendo em conta a sua latitude, *DE* deve ser inclinado sobre o plano de *AB;* mas, para uma exposição mais fácil, consideremo-lo no mesmo plano. Suponhamos a Terra no ponto *A*. Deste ponto, tracemos linhas de pontaria, *AFL* e *AGM,* tangentes ao círculo do planeta, nos pontos *F* e *G*. Seja *ACB* um diâmetro comum aos dois círculos. Suponha-se que ambos os autores, isto é, a Terra e o planeta, se movem na mesma direcção, quer dizer, para Este, mas o planeta mais rapidamente do que a Terra. Assim *C* e a linha *ACB* darão a impressão a um observador que se desloque com *A* de que se movem com o movimento médio do Sol. Por outro lado, no círculo *DFG,*



como se fosse um epiciclo, o planeta atravessará o arco *FDG*, para Este, em mais tempo do que o arco restante *GEF* para Oeste. No arco *FDG* acrescentará o ângulo inteiro *FAG* ao movimento médio do Sol, enquanto no arco *GEF* subtrairá o mesmo ângulo. Por conseguinte, onde o movimento subtractivo do planeta, especialmente próximo do perigeu *E*, excede o movimento aditivo de *C*, na extensão deste excesso, parece ao observador que está em *A*, retroceder, como acontece nestes planetas. Nos casos deles, a razão entre a linha *CE* e a linha *AE*, é maior do que a razão entre o movimento de *A* e o movimento do planeta, de acordo com os teoremas de Apolónio de Perga, como se dirá a seguir [V, 35]. Mas onde o movimento aditivo é igual ao subtractivo, de modo que se anulam mutuamente, o planeta parecerá estacionário, e tudo isto condiz com os fenómenos.

Assim, se não houvesse outra irregularidade, no movimento do planeta, como julgava Apolónio, o que acabamos de dizer seria suficiente. Mas os maiores desvios destes planetas, em relação à posição média do Sol, de manhã e à tarde, como são indicados pelos ângulos *FAE* e *GAE*, não se verifica que sejam iguais em todos os casos; nem uma destas maiores elongações é igual à outra nem as suas somas são iguais a outras. A conclusão é evidente: os planetas não se movem em círculos concêntricos com o da Terra, mas em certos outros círculos em que produzem uma segunda desigualdade.



A mesma conclusão confirma-se, igualmente, em relação aos três planetas superiores, Saturno, Júpiter e Marte que descrevem círculos completos em redor da Terra. Reproduzamos o círculo da Terra, traçado na figura anterior. Tomemos *DE*, como exterior mas concêntrico com ele, no mesmo plano. Em *DE* coloquemos o planeta num qualquer ponto *D*. Daqui tracemos as linhas rectas *DF* e *DG*, tangentes ao círculo da Terra, nos pontos *F* e *G*, e, do mesmo ponto, tracemos também *DACBE*, o diâmetro comum [a ambos os círculos]. Em *DE*, a linha do movimento do Sol, a posição verdadeira do planeta quando ele nasce, ao pôr do Sol, e está mais próximo da Terra, será evidentemente visível (somente para um observador em *A*). Com efeito, quando a Terra está no ponto oposto, *B*, embora o planeta esteja na mesma linha, ele não será visível, pois ficou oculto devido ao Sol se ter aproximado de *C*. Mas o movimento da Terra é superior ao do planeta e assim, através do arco *FBC*, no apogeu, parecerá acrescentar todo o ângulo *GDF* ao movimento do planeta e subtraí-lo ao arco restante, *FAG*, mas durante um tempo mais curto, pois *FAG* é um arco mais pequeno. Onde o movimento subtractivo da Terra excede o movimento aditivo do planeta, especialmente à volta de *A*, o planeta parecerá ter sido deixado para trás pela Terra e mover-se para Oeste, e ficar estacionário na posição em que o observador vê a diferença mínima entre os movimentos opostos. Assim, é mais uma vez evidente que todos estes fenómenos acontecem só por causa do movimento da Terra, que os antigos procuravam explicar com um epiciclo para cada planeta. Mas porque o movimento do planeta não é uniforme, contrariamente à opinião de Apolónio e dos antigos, como o proclama a revolução irregular da Terra em relação ao planeta, os planetas não se movem num círculo concêntrico, mas doutro modo, que exporemos a seguir.

DE QUE MODO OS MOVIMENTOS PRÓPRIOS DOS PLANETAS SE APRESENTAM COMO NÃO UNIFORMES?

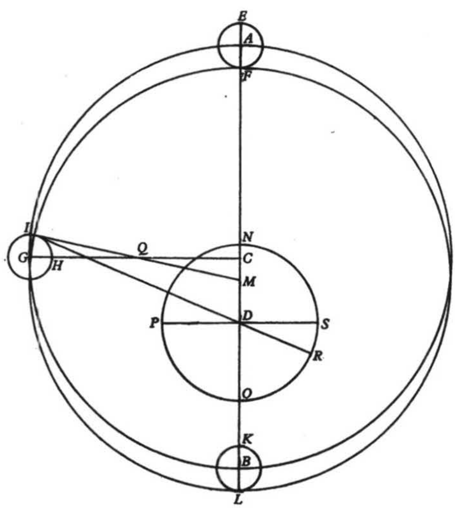
Ora, visto que os movimentos dos planetas em longitude têm, quase sempre, o mesmo esquema, com excepção de Mercúrio que parece diferir deles, tratar-se-á dos quatro em conjunto. Para Mercúrio reservou-se um lugar à parte.

Embora os antigos defendessem que havia um movimento em dois círculos excêntricos, como se disse [V, 2], consideramos que há dois movimentos uniformes, dos quais se compõe o movimento não uniforme aparente: um círculo excêntrico num excêntrico, ou um epiciclo num epiciclo, ou então um círculo excêntrico num epiciclo, que possam produzir a mesma irregularidade, como demonstrámos em relação ao Sol e à Lua [III, 20; IV, 3]. Assim, seja *AB* um círculo excêntrico, com o centro em *C*. Seja o diâmetro *ACB*, traçado pelas ápsides superior e inferior do planeta, a linha da posição média do Sol. Em *ACB*, seja *D* o centro do círculo da Terra. Tomando a ápside superior, *A*, como centro, e um raio igual a $^1/_3$ da distância *CD*, descrevamos o epiciclo *EF* em cujo perigeu, *F*, se coloca o planeta. Agora, considere-se o movimento do epiciclo, no círculo excêntrico, *AB*, na direcção Este, o do planeta na ápside superior da circunferência do epiciclo, igualmente para Este, e no resto da circunferência, para Oeste, isto é, com as revoluções do epiciclo e do planeta iguais. Daí resulta que, quando o epiciclo está na ápside superior do círculo excêntrico e o planeta, pelo contrário, no perigeu do epiciclo, mudarão de direcção, em sentidos opostos, quando cada um tiver completado o seu semicírculo. Mas, nas duas quadraturas, a meio caminho entre a ápside superior e inferior, cada um estará na sua ápside média. Só nos dois primeiros casos [ápsides superior e inferior], o diâmetro do epiciclo fica na linha *AB*. Além disso, a meio caminho entre as ápsides superior e inferior, o diâmetro do epiciclo será perpendicular a *AB*. Em qualquer outra parte, oscila sempre para *AB*. Todos estes fenómenos se compreendem facilmente pela sequência dos movimentos.

Assim também ficará demonstrado que o planeta com este movimento composto não descreve um círculo perfeito, segundo a opinião dos antigos astrónomos, embora a diferença não seja perceptível. Com efeito, reproduzamos o mesmo epiciclo *Kl*, com o centro em *B*. Tomando *AG* como um quadrante do círculo excêntrico, seja *HI* o epiciclo cujo centro é *G*. Dividindo *CD* em três [partes iguais], seja *CM* o seu terço e igual a *GI*. Juntemos *GC* e *IM*, de modo que se intersectem em *Q*. Ora, desde que o arco *AG* é semelhante, por construção, ao arco *HI*, o ângulo *ACG* é um ângulo recto assim como *HGI*. Além disso, os ângulos verticais em *Q* são do mesmo modo iguais. Portanto, os triângulos *GIQ* e *QCM* são equiângulos. Mas os seus lados correspondentes são também iguais. Com efeito a base *GI* é considerada igual à base *CM*. O lado *QI* é maior do que *GQ*, precisamente como *QM* também é maior do que *QC*. Assim, todo o *IQM* é maior do que todo o *GQC*. Mas *FM* é igual a *ML*, a *AC* e a *CG*. Deste modo, o círculo descrito à volta do centro *M*, pelos pontos *F* e *L*, é igual ao círculo *AB* e intersectará a linha *IM*. A demonstração continuará do mesmo modo no outro quadrante oposto *AG*. Portanto, os movimentos uniformes do epiciclo no círculo excêntrico e do planeta no epiciclo, fazem com que o planeta descreva não um círculo perfeito mas quase. *Q. E. D.*

Descrevamos agora o círculo anual da Terra *NO*, com o centro em *D*. Prolonguemos *IDR* e também *PDS*, paralelo a

CG. Assim, *IDR* será a linha recta do movimento verdadeiro do planeta e *CG* do seu movimento médio e uniforme. Em *R* a Terra estará à sua maior distância verdadeira do planeta, e em *S* à sua maior distância média. Por conseguinte, o ângulo *RDS*, ou *IDP*, é a diferença entre estes movimentos uniforme e aparente, isto é, entre os ângulos



ACG e *CDI*. Mas suponhamos que em vez do círculo excêntrico *AB*, tomamos um concêntrico tendo *D* como centro. Este círculo concêntrico serviria como deferente para um epiciclo, de raio igual a *CD*. Neste também haveria um outro epiciclo, cujo raio é igual a *CD*. Neste também haveria um outro epiciclo cujo diâmetro é igual a metade de *CD*. Admita-se que o primeiro epiciclo se move para Este, e o segundo na direcção oposta, com igual velocidade. Finalmente, no segundo epiciclo, o planeta deslocar-se-á com o dobro desta velocidade e o resultado será o mesmo que já descrevemos, nem se apresentará muito diferente dos fenómenos da Lua, ou até dos que se obtiveram por quaisquer dos outros processos.

Mas aqui escolhemos um epiciclo num círculo excêntrico. Com efeito, embora a distância entre o Sol e *C* permaneça sempre a mesma, verifica-se, entretanto, que *D* se desviou, como mostrámos nos fenómenos do Sol [III, 20]. Este desvio não foi acompanhado pelos outros. Daqui resulta que estes devem ter alguma irregularidade que, embora ligeira, é contudo perceptível em Marte e Vénus [como veremos oportunamente; V, 16 e 22]. Ora, como estas hipóteses bastam para os fenómenos, vamos demonstrá-las com observações. Procederemos assim, em primeiro lugar com Saturno, Júpiter e Marte. Neste ponto, a tarefa principal e mais difícil é encontrar a posição do apogeu e a distância *CD*, pois que por meio destas se demonstrará facilmente o resto. Para estes três planetas empregaremos quase o mesmo processo que para a Lua [IV, 5], designadamente uma comparação de três oposições antigas ao Sol com o mesmo número de oposições modernas. Estas chamam-se, segundo os Gregos, «nascimentos acrónicos», mas nós chamamos-lhes nascimentos e ocasos «nas extremidades da noite». Nestes tempos o planeta está em oposição com o Sol e encontra a linha recta do movimento médio do Sol, onde ele se liberta de toda a desigualdade que lhe acarreta o movimento da Terra. Estas posições são conseguidas observando com um instrumento, o astrolábio, como descrevemos atrás [II, 14], e também aplicando os cálculos relacionados com o Sol, até que o planeta se veja claramente chegar a um lugar oposto a ele.

DEMONSTRAÇÕES DO MOVIMENTO DE SATURNO

Comecemos então por Saturno, tomando as três oposições, outrora observadas por Ptolomeu [*Almagesto*, XI, 5]. A primeira destas foi no ano 11 do reinado de Adriano, a sete do mês de Pachon, na primeira hora da noite, ou no ano 127 da era de Cristo, a 26 de Março, passadas que eram 17 horas iguais, depois da meia-noite, calculadas pelo meridiano de Cracóvia, que verificámos estar a 1 hora de Alexandria. Ora verificámos que a posição do planeta era em 174° 40′, mais ou menos, na esfera das estrelas fixas, à qual referimos todos os dados relacionados com a origem do movimento uniforme. Com efeito, nesta ocasião, o Sol, no seu movimento simples estava em oposição a Saturno, em 354° 40′ [− 180° = 174° 40′], considerando o corno de Áries no ponto zero.

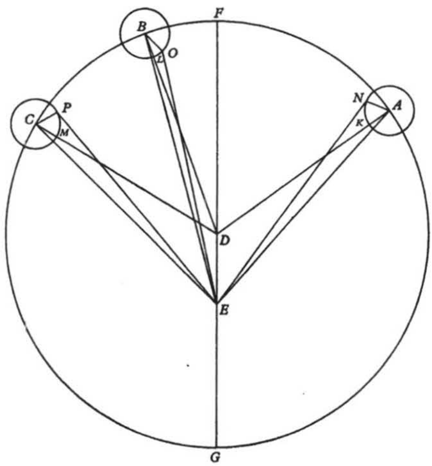
A segunda foi no ano 17 do reinado de Adriano, a 18 de Epifi, o segundo mês dos Egípcios, 15 horas uniformes depois da meia-noite. De acordo, porém, com os Romanos, foi no ano 133 da era cristã, a 3 de Junho. Ptolomeu encontrou o planeta a 243° 3′, enquanto o Sol no seu movimento médio estava em 63° 3′ [+ 180° = 243° 5′] às 15 horas depois da meia-noite.

A seguir, descreveu-nos a terceira, no ano 20 do reinado de Adriano, já referido, a 24 do mês egípcio de Mesori, em 136 da era cristã, a 8 de Julho, 11 horas depois da meia-noite, do mesmo modo reduzidos ao meridiano de Cracóvia. O planeta estava então a 277° 37′, enquanto o Sol se encontrava na sua posição média, em 97° 37′ [+ 180° = 277° 37′].

Ora, no primeiro intervalo, havia 6 anos, 70 dias, 55 minutos de um dia, durante os quais o planeta aparentemente se movia 68° 23′ [= 243° 3′ − 174° 40′], enquanto o movimento médio da Terra, em relação ao planeta, era de 352° 44′. Este era o movimento em paralaxe. Por conseguinte, os 7° 16′, que eram a diferença entre este movimento e o círculo completo [360° − 352° 44′], são adicionados para perfazer o movimento médio do planeta, 75° 39′ [= 7° 6′ + 68° 23′]. No segundo intervalo há 3 anos egípcios, 35 dias, 50 minutos de um dia. O movimento aparente do planeta são 34° 34′ [= 277° 37′ − 243° 3′], e o movimento em paralaxe 356° 43′. A diferença entre este valor e um círculo completo, 3° 17′ [= 360° − 356° 43′], é acrescentada ao movimento aparente do planeta, de modo que há 37° 51′ [= 3° 17′ + 34° 34′], no seu movimento médio.

Tendo examinado estas observações, descrevamos o círculo excêntrico do planeta, *ABC*, com o centro em *D*, o diâmetro, *FDG*, no qual *E* é o centro do círculo máximo da Terra. Seja *A* o centro do epiciclo, na primeira oposição, *B* na segunda, e *C* na terceira. Tomando estes três pontos como centros, escrevamos um mesmo epiciclo, com o raio $^1/_3$ *DE*. Juntemos os centros *A*, *B* e *C* com *D* e *E* por meio de linhas rectas, que intersectem a circunferência do epiciclo, nos pontos *K*, *L* e *M*. Tomemos o arco *KN* semelhante a *AF*, *LO* a *BF*, e *MP* a *FBC*. Juntemos *EN*, *EO* e *EP*. Então, de acordo com o cálculo anterior, *AB* é igual a 75° 39′, *BC* igual a 37° 51′, *NEO* igual ao ângulo do movimento aparente, equivalente a 68° 23′, e o ângulo *OEP* com 34° 34′.

O problema consiste, em primeiro lugar, em investigar as posições das ápsides superior e inferior, isto é, de *F* e *G*, assim como *DE*, a distância entre os centros, [do círculo máximo da Terra e do excêntrico do planeta], sem o que não há maneira de distinguir o movimento regular do movimento aparente. Mas também aqui aparece uma dificuldade não menor do que a de Ptolomeu, em relação a este ponto. Com efeito, se o ângulo dado *NEO* definia o arco dado, *AB*, e *OEP* incluía *BC*, estaria agora aberto o caminho para deduzir o que procuramos. Mas o arco conhecido, *AB*,



corresponde ao ângulo desconhecido *AEB*, e de modo semelhante, o ângulo *BEC* é desconhecido, sendo correspondente do arco conhecido *BC*. Era, porém, necessário conhecer os dois [*AEB* e *BEC*]. Mas os ângulos *AEN*, *BEO* e *CEP*, que indicam as diferenças [entre os movimentos médio e aparente], não podem ser conhecidos antes da determinação dos arcos *AF*, *FB* e *FBC* que são semelhantes aos arcos do epiciclo. Estes valores estão de tal modo interdependentes que são conhecidos ou desconhecidos ao mesmo tempo. Deste modo, os antigos, privados dos meios de os deduzir, confiaram em argumentos «a posteriori» e rodeios, para conseguir aquilo que não podia ser alcançado directamente e «a priori». Assim, Ptolomeu, nesta investigação, elaborou um amontoado enorme de cálculos, numa linguagem prolixa que julgo cansativo e desnecessário referir, principalmente porque na nossa exposição, [que vem] a seguir, havemos de acompanhar praticamente o mesmo método.

Ao rever os seus cálculos, no fim [*Almagesto*, XI, 5], encontrou o arco *AF*, igual a 57° 149, *FB* com 18° 37′, *FBC* com 56 $^1/_2$°, e *DE* igual à distância entre os centros, com 6 unidades e 50′, sendo *DF* igual a 60 unidades. Mas com *DF* igual a 10 000, na nossa escala numérica, *DE* é igual a 1139. Deste total, aceitámos $^3/_4$ para *DE*, com 854 e atribuímos o restante $^1/_4$, igual a 285, ao epiciclo. Aceitando estes valores e aproveitando-nos deles para as nossas hipóteses, vamos mostrar que estão de acordo com os fenómenos observados.

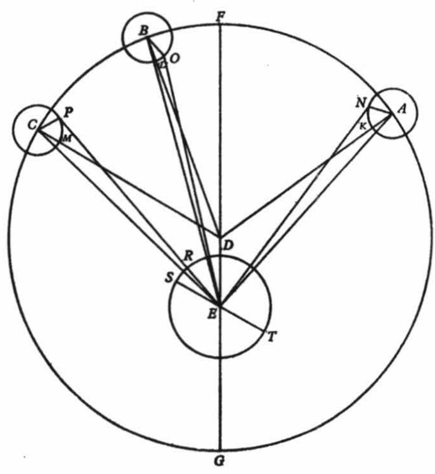
Assim na primeira oposição, é dado o lado *AD* do triângulo *ADE*, com 10 000 unidades, e *DE* com 864, assim como o ângulo *ADE*, ângulo suplementar de *ADF*. Daí resulta que, de acordo com os teoremas sobre os triângulos planos, *AE* é igual a 10 489, no mesmo sistema de unidades, enquanto os ângulos restantes, *DEA* tem 53° 6′ e *DAE* tem 3° 55′, sendo 4 ângulos rectos iguais a 360°. Mas o ângulo *KAN* é igual a *ADF* com 57° 1′. Por conseguinte, todo o ângulo *NAE* mede 60° 56′ [= 57° 1′ + 3° 55′]. Consequentemente, no triângulo *NAE* são dados dois lados: *AE* igual a 10 489 unidades, *NA* com 285, assim como *AD* igual a 10 000 unidades, e também *NAE*. O ângulo *AEN* também será dado igual a 1° 22′ e o ângulo *NED*, diferença entre *AED* e *AEN*, com 51° 44′, sendo 4 ângulos rectos iguais a 360°.

O mesmo se dá na segunda oposição. Com efeito, o lado *DE* do triângulo *BED*, é dado com 854 unidades, sendo *BD* igual a 10 000 unidades. O ângulo *BDE*, ângulo suplementar de *BDF*, mede 161° 22′ [= 180° − 18° 38′]. Os ângulos e os lados deste triângulo também serão dados: o lado *BE* igual a 10 812, sendo *BD* igual a 10 000 unidades; o ângulo *BDE* igual a 1° 27′; e o ângulo restante

BED, diferença entre 180° e a soma de 161° 22′ mais 1° 27′, é igual a 17° 11′. Mas o ângulo *OBL* mede 18° 38′, sendo igual a *BDF*. Por conseguinte, todo o ângulo *EBO* [= *DBE* + *OBL*] é igual a 20° 5′ [= 18° 38′ + + 1° 27′]. No triângulo *EBO*, portanto, além do ângulo *EBO*, são dados dois lados: *BE* com 10 812 unidades e *BO* com 285. De acordo com os teoremas sobre triângulos planos, é dado o ângulo *BEO*, diferença entre *BED* e *OED*, com 32′. Daqui se conclui que *OED*, diferença entre *BED* e *BEO*, é igual a 16° 39′.

O mesmo acontece na terceira oposição. São dados dois lados, *CD* e *DE*, do triângulo *CDE*, assim como o ângulo *CDE*, suplemento de 56° 29′ [= 123° 31′]. De acordo com o IV teorema sobre os triângulos planos, a base *CE* é dada com 10 512 unidades, sendo *CE* igual a 10 000 unidades; o ângulo *DCE* com 3° 53′; e o ângulo *CED* = 52° 36′, pois é a diferença entre 180° e a soma de 3° 53′ com 123° 31′. Por conseguinte, todo o ângulo *ECP* é igual a 60° 22′ [= 3° 53′ + 56° 29′], no sistema em que 4 ângulos rectos são iguais a 360°. Assim também são dados dois lados do triângulo *ECP*, assim como o ângulo *ECP*. O ângulo *CEP* é também dado com 1° 22′. Daqui resulta que o ângulo *PED*, diferença entre *CED* e *CEP*, é igual a 51° 14′. Assim, todo o ângulo *OEN* [= *NED*+*BED* − *BEO*], do movimento aparente eleva-se a 68° 23′ [= 51° 44′ + 17° 11′ − 32′] e *OEP* a 34° 35′ [= *PED* − *OED* = 51° 44′ − 16° 39′], de acordo com as observações. *F*, a posição da ápside superior do círculo excêntrico, tem 226° 20′, em relação à cabeça de Áries. Se a estes números juntamos 6° 40′ da precessão do equinócio da Primavera, a precessão em que devia encontrar-se nesse tempo e a ápside estaria em 23° de Escorpião, em conformidade com a conclusão de Ptolomeu [*Almagesto*, XI, 5]. Com efeito, a posição aparente do planeta na terceira oposição, como foi explicado, era de 277° 37′. Se deste número subtrairmos 51° 14′, equivalentes ao ângulo *PEF*, o ângulo do movimento aparente, como se mostrou, o resto é a posição da ápside superior do círculo excêntrico, em 226° 23′.

Ora, descrevamos também o círculo anual da Terra, *RST*, que intersectará a linha *PE*, no ponto *R*, e tracemos um diâmetro *SET*, paralelo a *CD*, linha do movimento médio do planeta. Assim, os ângulos *SED* e *CDF* são iguais, e o ângulo *SER* será a diferença entre o movimento aparente e o movimento médio, com 5° 16′, isto é, a diferença entre os

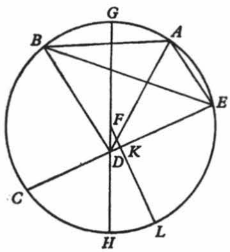


ângulos *CDF* e *PED*. Entre o movimento médio e o verdadeiro em paralaxe, a diferença é a mesma. Subtraindo isto de um semicírculo verificamos que o resto, o arco *RT*, mede 174° 44′ [= 180° − 5° 16′] que é o movimento uniforme em paralaxe a partir do ponto *T*, tomado como posição da origem, isto é, a distância entre a conjunção média do Sol e do planeta e a terceira oposição, ou a oposição verdadeira da Terra e do planeta. Por conseguinte, temos agora que na hora desta terceira observação, designadamente no ano 20 do reinado de Adriano, equivalente ao ano 136 da era de Cristo, a 8 de Julho, às 11 horas depois da meia-noite, a movimento de anomalia de Saturno em relação à ápside superior do círculo excêntrico, é igual a $56\,^{1}/_{2}{}^{\circ}$, e o movimento médio em paralaxe, a 174° 44′. O cálculo que acaba de ser feito será vantajoso para o que se segue.

TRÊS OUTRAS OPOSIÇÕES DE SATURNO, MAIS RECENTEMENTE OBSERVADAS

Entretanto, como o cálculo do movimento de Saturno descrito por Ptolomeu mostra não pequena diferença do do nosso tempo, não se podendo distinguir agora em que parte está o erro, fomos compelidos a realizar novas observações, nas quais aproveitámos três oposições de Saturno. A primeira ocorreu à $1^1/_5$ horas, antes da meia-noite do dia 5 de Maio de 1514 da era cristã, com Saturno em 205° 24′. A segunda foi ao meio-dia de 13 de Julho de 1520, da era cristã, [com Saturno] em 273° 25′. A terceira teve lugar às $6\ ^2/_5$ horas, depois da meia-noite de 10 de Outubro de 1527, da era cristã, quando Saturno aparecia a 7′, a Este do corno de Áries. Então, entre a primeira e a segunda oposição, há 6 anos egípcios, 70 dias, 33 minutos de um dia, durante os quais o movimento aparente de Saturno tem o valor de 68° 1′ [= 273° 25′ − 205° 24′]. Da segunda para a terceira oposição, há 7 anos egípcios, 89 dias, 46 minutos de um dia e o movimento aparente do planeta vale 86° 42′ [= 306° 7′ − 273° 25′. No primeiro intervalo, o seu movimento médio é de 75° 39′; e no segundo intervalo, 88° 29′. Por conseguinte, ao procurar a ápside superior e o círculo excêntrico, devemos operar primeiramente segundo o método de Ptolomeu [*Almagesto,* X, 7], como se o planeta se movesse num círculo excêntrico simples. Embora este processo não seja adequado, contudo alcançaremos mais facilmente a verdade, conformando-nos com ele.

Assim, tomemos o círculo *ABC* como aquele em que o planeta se move uniformemente. Seja a primeira oposição



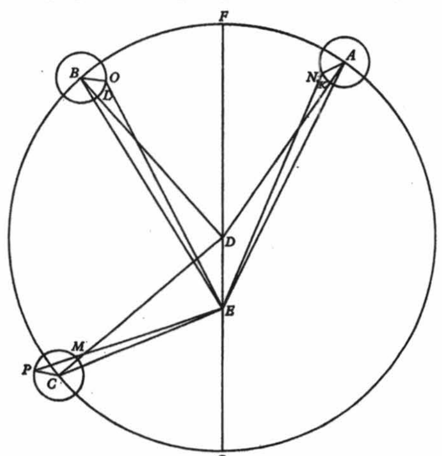
no ponto *A*, a segunda em *B* e a terceira em *C*. Considere-se o centro do círculo da Terra, *D*, interior a *ABC*. Juntemos *AD*, *BD*, *CD*, e prolonguemos uma destas linhas em linha recta para o lado oposto da circunferência, por exemplo, *CDE*. Juntemos *AE* e *BE*. Ora o ângulo *BDC* é dado e vale 86° 42′. Deste modo, no sistema em que dois ângulos rectos equivalem a 180°, o ângulo suplementar *BDE* mede 93° 18′ [= 186° − 86° 42′], mas ele medirá 186° 36′; no sistema em que 2 ângulos rectos valem 360°; o ângulo *BED*, que define o arco *BC*, é igual a 88° 29′. Assim, no triângulo *BDE*, o ângulo *DBE*, diferença entre 360° e a soma de 186° 36′ com 88° 29′, será igual a 84° 55′. Por conseguinte, no triângulo *BDE*, como os ângulos são dados, conhecem-se os lados pela Tabela das linhas subtendidas num círculo : *BE* igual a 19 953 unidades e *DE* igual a 13 501 unidades, sendo o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo igual a 20 000 unidades. Assim também, no triângulo *ADE*, visto que *ADC* é dado, e tem 154° 43′, [= 68° 1′ + 86° 42′], sendo dois ângulos rectos iguais a 360°, *ADE* é igual a 50° 34′. Nesse sistema de unidades, o ângulo *AED*, que define o arco *ABC*, tem 164° 8′ [= 360° − (50° 34′ + 88° 29′)]. Por conseguinte, são também dados os lados: *DE* igual a 19 090 unidades, e *AE* com 8 542 unidades, sendo o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo *ADE* igual a 20 000 unidades. Mas, neste sistema de unidades, em que *DE* foi dado com 13 501 unidades e *BE* com 19 953, *AE* terá 6041. Ora, no triângulo *ABE* também estes dois lados, *BE* e *EA*, são dados, assim como o ângulo *AEB*, que define o arco *AB*, com 75° 39′. Daqui resulta, segundo os teoremas sobre os triângulos planos, que *AB* é igual a 15 647 unidades, sendo *BE* igual a 19 968. Mas se *AB*, a corda que subtende um dado arco, é igual a 12 266 unidades, tendo o diâmetro do círculo excêntrico 20 000 unidades, *EB* equivale a 15 664 e *DE* a 10 599. Assim, por meio da corda *BE* é dado o arco *BAE*, com 103° 7′. Por conseguinte todo o arco *EABC* tem 191° 36′[= 103° 7′ + 88° 29′]. *CE*, a diferença [para o círculo completo] mede 168° 4′; a sua corda, *CDE*, é igual a 19 898, e *CD*, igual à diferença entre *CDE* e *DE*, mede 9 9299 unidades.

Agora, se *CDE* fosse o diâmetro do círculo excêntrico, é evidente que as posições da ápside superior e inferior ficariam situadas nele e a distância entre os centros [do excêntrico e do círculo da Terra] seria facilmente encontrada. Mas se o segmento *EABC* é maior do que um semicírculo, o centro do excêntrico ficará dentro dele. Suponha-se que esse centro é *F*. Através dele e de *D* tracemos o diâmetro *GFDH*, e *FKL* perpendicular a *CDE*.

Ora, é evidente que o rectângulo formado por *CD* e *DE*, é igual ao formado por *GD* e *DH*. Mas o rectângulo formado por *GD* e *DH*, é igual ao formado por *GD* e *DH*. Mas o rectângulo formado por *GD* e *DH* mais o quadrado de *FD* é igual ao quadrado da metade de *GDH*, isto é, igual a $(FDH)^2$. Por conseguinte, subtraindo do quadrado de metade do diâmetro, o rectângulo formado por *GD* e *DH*, ou o rectângulo formado por *CD* e *DE*, que é igual, o resto será o quadrado de *FD*. Portanto, a extensão de *FD* será dada e terá 1200 unidades, sendo o raio igual a 10 000 unidades. Mas no sistema de unidades em que *FG* é igual a 60 unidades, *FD* terá 7 unidades e 12′, ligeiramente diferente de Ptolomeu [*Almagesto*, XI, 6: 6 unidades 50′].

Mas como *CDK* é igual a metade de toda a linha *CDE*, isto é, 9949 unidades, como mostrámos, *CD* tem 9299 unidades e *DK*, diferença entre 9949 e 9299, medirá 650 unidades, se considerarmos *GF* igual a 10 000 e *FD* a 1200. Ora, se *FD* é igual a 10 000 unidades, *DK* terá 5411. Mas como esta equivale a metade da corda correspondente ao dobro do ângulo *DFK*, este ângulo mede 32° 45′, no sistema em que quatro ângulos rectos valem 360°. Como ângulo ao centro do círculo, corresponde a uma quantidade semelhante no arco HL, todo o CHL é igual a metade de CLE [168° 24′]≅ 84° 13′. Portanto, CH, a parte restante [quando HL = 32° 45′ é subtraído de CHL = 84° 13′] que vai da terceira oposição ao perigeu, é igual a 51° 28′. Se subtrairmos este número a um semicírculo, o resto será o arco CBF com 128° 32′, que vai desde a ápside superior até a terceira oposição. Dado que o arco CB é igual 88° 29′, o resto BG, [quando CB é subtraído de CBG = 128° 43′], é igual a 40° 3′, que vai desde a ápside superior até a segunda oposição. Então, o arco seguinte BGA, igual a 75° 39′ inclui AF , que vai desde a primeira oposição, até o apogeu F, com 35° 36′[= 75° 39′ − 40° 3′].

Seja agora ABC um círculo, $FDEG$ o seu diâmetro, D o centro, F o apogeu, G o perigeu, o arco AF igual a 35° 36′,



FB igual a 40° 3′ e FBC igual a 128° 32′. Da distância entre os centros, já estabelecida, tomemos $^3/_4$ para DE, com 900 unidades. Com o restante quarto, igual a 300 unidades, sendo o raio FD de 10 000 unidades, descrevemos epiciclos tendo A, B e C, como centros. Completemos a figura de acordo com as condições estabelecidas.

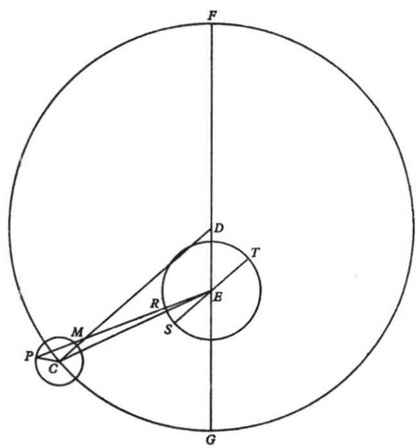
Se pretendermos deduzir as posições de Saturno observadas do que fica exposto, pelo método atrás referido, e que vamos em breve repetir, encontraremos algumas discrepâncias. E, para resumir, não sobrecarregando demasiadamente o leitor e para não parecer termo-nos esforçado mais por apontar os atalhos do que o caminho direito, os dados anteriores deverão conduzir, por meio das demonstrações dos triângulos, ao ângulo *NEO* com 67° 35′ e ao outro ângulo *OEM* com 87° 12′. Este é $^1/_2$° maior do que o ângulo aparente e o outro 26′ menor. Verificamos um acordo mútuo, avançando o apogeu só um pouco [3° 14′] e determinando *AF* com 38° 50′, e depois o arco *FB* com 36° 49′ [= 40° 3′ − 3° 14′]; *FBC* terá 125° 18′ [= 128° 32′ − 3° 14′]; *DE*, a distância entre os centros com 854 unidades, o raio do epiciclo com 285 unidades, sendo *FD* igual a 10 000 unidades. Estes números estão quase de acordo com Ptolomeu cujos valores foram determinados atrás [V, 5].

Que estes dados estão de harmonia com os fenómenos e as três oposições, é uma conclusão clara. Com efeito, na primeira oposição, o lado *DE* do triângulo *ADE*, tem 854 unidades, sendo *AD* igual a 10 000 unidades e o ângulo *ADE* é igual a 141° 10′. Este, somado com *ADF* [= 38° 50′] perfaz dois ângulos rectos ao centro. Disto resulta que o lado restante *AE* tem 10 679 unidades, medindo o raio *FD*, 10 000 unidades. Os ângulos restantes *DAE* equivalem a 2° 52′ e *DEA* a 35° 58′. Do mesmo modo, no triângulo *AEN*, dado que *KAN* é igual a *ADF* todo o ângulo *EAN* será igual a 41° 42′ [= *DAE* + *KAN* = 2° 52′ + 38° 50′] e o lado *AN* a 285 unidades, sendo *AE* igual a 10 679 unidades. Demonstrar-se-á que o ângulo *AEN* tem 1° 3′. Mas todo o ângulo *DEA* mede 35° 58′. Daqui resulta que *DEN*, diferença entre *DEA* e *AEN*, medirá 34° 55′ [= 35° 58′ − 1° 3′]. Do mesmo modo, na segunda oposição há dois lados dados no triângulo *BED*, pois *DE* tem 854 unidades, sendo *BD* igual a 10 000 unidades, assim como o ângulo *BDE*, que é igual a 143° 11′ [= 180° − (*BDF* − 36° 49′]. Por conseguinte *BE* tem 10 697 unidades, o ângulo *DBE* 2° 45′ e o ângulo *BED*, diferença entre 180° e a soma de *BDE* com *DBE*, mede 34° 4′. Mas *LBO* = *BDF* [= 36° 49′]. Assim *EBO* é igual a 39° 34′ [= *DBD* + *DBE* = 36° 49′ + 2° 45′]. Os seus lados são dados: *BO* com 285 unidades e *BE* com 10 697. Disto resulta que se demonstrará ser *BEO* igual a 59′. Se subtrairmos este valor do ângulo *BED*, o resto, o ângulo *OED*, terá 33° 55′. Mas já se mostrou que na primeira oposição, o ângulo *DEN* [= *DEN* + *OED*] é igual a 68°; e dá-nos a distância entre a primeira oposição e a segunda, de acordo com as observações [= 68° 1′].

Podemos seguir idêntico caminho relativamente à terceira oposição. Visto que no triângulo *CDE*, é dado o ângulo *CDE*, com 54° 42′ [= 180° − (*FDC* = 125° 18′)], assim como os lados *CD* e *DE* anteriormente estabelecidos, resulta daqui, que o terceiro lado, *EG*, mede 9532 unidades, e os ângulos restantes *CED* e *DCE*, medem respectivamente 121° 5′ e 4° 13′. Portanto, todo o ângulo *PCE* mede 129° 31′ [= 4° 13′ + 125° 18′]. Assim, mais uma vez no triângulo *EPC*, os dois lados, *PC* e *CE* são dados, assim como o ângulo *PCE* [= 129° 31′]. A partir daqui se demonstrará que o ângulo *PEC* é igual a 1° 18′. Se subtrairmos este número de *CED*, o resto será o ângulo *PED*, igual a 119° 47′, que é a distância entre a ápside superior do círculo excêntrico e a posição do planeta na terceira oposição. Já se mostrou, contudo, que na segunda oposição havia 33° 5′ [da ápice superior do excêntrico ao lugar do planeta]. Portanto, entre a segunda e a terceira oposição de Saturno, ficam 86° 42′ [= 119° 47′ − 33° 5′]. Este número é considerado como estando de acordo com as observações. A posição de Saturno, como se verificou pela observação, estava nesse tempo em 8′ a Este da primeira estrela do Áries, considerada como o ponto zero. A distância da posição de Saturno para a ápside inferior do círculo excêntrico, como se demonstrou, é de 60° 13′ [= 180° − −119°

47′]. Por conseguinte, a ápside inferior estava em cerca de $60\,^1/_3{}^o$ [$\cong 60^o\ 13' + 8'$] e a posição da ápside superior, diametralmente oposta, em $240\,^1/_3{}^o$.

Descrevamos agora o círculo máximo da Terra, *RST*, tendo *E* como centro e com o diâmetro *SET*, paralelo a *CD*, a linha do movimento médio do planeta, definindo o ângulo *FDC*, igual a *DES*. Assim a Terra e a nossa posição de observação estarão na linha *PE*, por exemplo, no ponto *R*.



Ora o ângulo *PES* ou o arco *RS*, igual à diferença entre os ângulos *FDC* e *DEP*, é a diferença entre os movimentos uniforme e aparente equivalente a 5° 31′ [=(*CES* = *DCE*)+ + *PEC* = 4° 13′ + 1° 18′]. Se subtrairmos este número do semicírculo, o resto, o arco *RT*, é igual a 174° 29′, distância entre o planeta e o apogeu do círculo máximo *T*, igual à posição média do Sol. Assim demonstrámos que às $6\,^2/_5$ horas, depois da meia-noite, no dia 10 de Outubro de 1527 da era cristã, o movimento, em anomalia, de Saturno, em relação à ápside superior do círculo excêntrico, é igual a 125° 18′; o movimento em paralaxe, 174° 29′, e a posição da ápside superior, 240° 21′, em relação à primeira estrela do Áries, na esfera das estrelas fixas.

ANÁLISE DO MOVIMENTO DE SATURNO

Demonstrou-se, portanto [V, 5], que Saturno, no tempo da última das três observações de Ptolomeu, estava em 174° 44′, no seu movimento em paralaxe, enquanto a posição da ápside superior do seu círculo excêntrico estava em 226° 23′, em relação ao começo da constelação do Áries. Por conseguinte, é claro que no tempo decorrido entre as duas observação [a última de Ptolomeu e a última de Copérnico], no seu movimento uniforme em paralaxe, Saturno completou 1344 revoluções, menos $^1/_4$°. Ora, desde o ano 20 do reinado de Adriano, a 24 do mês egípcio de Mesori, 1 hora antes da meia-noite, até 1527 da era Cristã, às 6 horas do dia 10 de Outubro, decorreram 1392 anos egípcios, 75 dias, 48 minutos de um dia. Em relação a este tempo, querendo nós obter o movimento na Tabela [do movimento de Saturno em paralaxe], encontraremos, do mesmo modo, 5 vezes 60°, mais 59° 48′, além de 1 323 revoluções da paralaxe. Portanto, o que se afirmou [em V, 1] acerca dos movimentos médios de Saturno, está correcto.

Nesse mesmo intervalo, contudo, o movimento simples do Sol vale 82° 30′. Subtraindo 359° 45′ ficam 82° 45′, equivalentes ao movimento médio de Saturno que já cresceu na sua 47.ª revolução [sideral] de acordo com o cálculo. Entretanto a posição da ápside superior do círculo excêntrico avançou também 13° 58′ [= 240° 21′ − 226° 23′], na esfera das estrelas fixas. Ptolomeu estava convencido de que a ápside era fixa como as estrelas, mas agora é evidente que a ápside se move cerca de 1° em 100 anos.

DETERMINAÇÃO DAS POSIÇÕES DE SATURNO

Desde o começo da era cristã até o ano 20 do reinado de Adriano, no dia 23 do mês de Mesori, uma hora antes do meio-dia, em que teve lugar a observação de Ptolomeu, há 135 anos egípcios, 222 dias e 27 minutos de um dia, durante os quais o movimento de Saturno em paralaxe é 328° 55′. Se subtrairmos este número de 174° 44′, o resto, 205° 49′ [= (360° + 174° 44′) − 328° 55′] dá a distância da posição média do Sol à posição média de Saturno, e este é o movimento em paralaxe do segundo, à meia-noite que precede o dia 1 de Janeiro [ano I da era cristã]. Desde a primeira Olimpíada até esta posição, 775 anos egípcios e 12 $^1/_2$ dias, o movimento inclui 70° 55′, para além das revoluções completas. Subtraindo este número de 205° 49′, restam 134° 54′, que marcam o começo das Olimpíadas, ao meio-dia, do primeiro dia do mês de Hecatombéon.

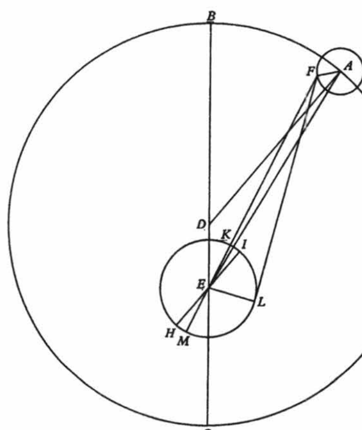
Desta posição, passados 451 anos, 247 dias, há, para além das revoluções completas, 13° 7′. Juntando este valor ao valor anterior [134° 54′], dá o total, de 148° 1′, para a posição referente ao lugar de Alexandre Magno, ao meio-dia do primeiro mês egípcio de Tot. Em relação à era de César, em 278 anos 118 $^1/_2$ dias, o movimento equivale a 247° 20′, fazendo com que a posição seja de 35° 21′, à meia-noite que precede o dia 1 de Janeiro [45 A.C.].

AS PARALAXES DE SATURNO, RESULTANTES DA REVOLUÇÃO ANUAL DA TERRA, E A DISTÂNCIA DE SATURNO À TERRA

Os movimentos uniformes e aparentes de Saturno em longitude explicam-se tal como se disse atrás. Com efeito, os outros fenómenos aos quais está sujeito, são paralaxes; [V, 1]; por isso, também a órbita na qual ele gira anualmente, tem de produzir paralaxes nos cinco planetas, mas muito mais evidentes por causa da grandeza da órbita. Contudo, tais paralaxes não podem ser determinadas, a não ser que a altura do planeta seja previamente conhecida. É possível, não obstante, obter a altura a partir de qualquer observação da paralaxe.

Fizemos esta observação de Saturno, em 1514 da era cristã, a 24 de Fevereiro, pelas 5 horas iguais, depois da meia-noite. Saturno foi efectivamente visto, numa linha recta com as estrelas situadas na fronte do Escorpião, isto é, a segunda e a terceira estrelas [dessa constelação] que têm a mesma longitude, 209° na esfera das estrelas fixas. Por intermédio delas, portanto, era conhecida a posição de Saturno. Desde o começo da era cristã até esta hora, há 1514 anos egípcios, 67 dias, 13 minutos de um dia. Assim, a posição média do Sol foi calculada em 315° 41′; a anomalia paraláctica de Saturno, 116° 31′, e, por conseguinte, a posição média de Saturno era de 199° 10′, e a posição da ápside superior do círculo excêntrico, cerca de 240 $^1/_3$°.

Agora, de acordo com o modelo apresentado, seja *ABC* o círculo excêntrico, com o seu centro em *D*. No seu diâmetro *BDC*, seja *B* o apogeu, *C* o perigeu e *E* o centro da órbita da Terra. Juntemos *AD* e *AE*. Com o centro em *A*, e o raio igual a $^1/_3$ de *DE*, descrevamos o epiciclo [menor]. Nele, seja *F* a posição do planeta, sendo o ângulo *DAF* igual a *ABD*. Tracemos *HI*, como se estivesse no mesmo plano do círculo *ABC*, passando por *E*, centro da órbita, seja *HI* paralelo a *AD*, de modo que *H* seja considerado como o ponto da órbita da Terra mais afastado do planeta e *I* como o mais próximo. Na órbita, tomemos o arco *HL*, com 116° 31′, de acordo com o cálculo da anomalia paraláctica. Juntemos *FL* e *EL*. Prolonguemos *FKEM* para intersectar os dois lados da circunferência da órbita. O ângulo *ADB* é igual a 41° 10′ e a *DAF*, por hipótese. O ângulo suplementar, *ADE*, é igual a 138° 50′. *DE* é igual a 854



unidades, sendo *AD* igual a 10 000 unidades. Estes dados mostram que no triângulo *ADE*, o terceiro lado *AE* é igual a 10 667 unidades, o ângulo *DEA* é igual a 38° 9′, e o ângulo que falta *EAD* é igual a 3° 1′. Por conseguinte, todo o ângulo *EAF* [= *EAD* + *DAF*] equivale a 44° 11′ [= 3° 1′ + 41° 10′]. Assim, e de novo, no triângulo *FAE*, é dado o lado *FA*, com 285 unidades, sendo *AE* também dado [= 10 667 unidades]. Demonstrar-se-á que o lado restante

FKE tem 10 465 unidades, e o ângulo $AEF = 1^o\ 5'$. Por conseguinte, a diferença inteira ou prostaférese, entre as posições média e verdadeira do planeta é evidentemente igual a $4^o .6'$, equivalente ao ângulo *DAE* mais o ângulo *AEF* [$= 3^o\ 1' + 1^o\ 5'$]. Por esta razão, se a posição da Terra tivesse sido *K* ou *M*, a posição de Saturno seria em $203^o\ 16'$, em relação à constelação do Áries, como se tivesse sido observado do centro *E*. Mas, como neste caso a Terra estava em *L*, Saturno era visto em 209^o. A diferença de $5^o\ 44'$ [$= 209^o - 203^o\ 16'$] é a paralaxe representada pelo ângulo *KFL*.

Mas o arco *HL* foi calculado em $116^o\ 33'$, no movimento uniforme da Terra. Subtraindo-lhe a prostaférese *HM*, o resto será *ML* com $112^o\ 25'$ [$= 116^o\ 31' - 4^o\ 6'$] e *LIK*, o resto do semicírculo, igual a $67^o\ 35'$ [$= 180^o - 112^o\ 25'$]. A partir daqui também se obtém o ângulo *KEL* com $67^o\ 35'$. Por conseguinte, no triângulo *FEL*, sendo dados os ângulos, também é dada a razão entre os lados, no sistema de unidades em que *EF* é igual a 10 465 unidades. Nestas unidades *EL* é igual a 1 090 unidades, sendo *AD* ou *BD* equivalentes a 10 000. Mas se *BD* é igual a 60 unidades, de acordo com o processo dos antigos, *EL* terá 6 unidades, e $32'$, o que difere também muito pouco da conclusão de Ptolomeu. Por conseguinte, todo o *BDE* é igual a 10 854 unidades, e *CE* o resto do diâmetro, a 9 146 [= 20 000 − 10 854]. Mas dado que o epiciclo, quando está em *B*, tira sempre 285 unidades à altura do planeta, e em *C* adiciona a mesma quantidade, isto é, metade do seu diâmetro, e além disso a maior distância de Saturno ao centro *E*, será de 10 569 [= 10 854 − 285] e a menor 9 431 unidades [= 9146 + 285], sendo *BD* igual a 10 000, conclui-se que Saturno, no seu apogeu, tem uma altura de 9 unidades e $42'$, no sistema em que o raio da órbita da Terra é uma unidade. No perigeu, esta altura é 8 unidades e $39'$. A partir disto, as maiores paralaxes de Saturno podem obter-se claramente pelo processo exposto em conexão com pequenas paralaxes da Lua. As paralaxes maiores de Saturno têm 5 unidades, com o planeta no apogeu, e 6 unidades e 39′ com o planeta no perigeu. Estes valores diferem em 44′. Tal diferença ocorre quando as linhas que vêm do planeta são tangentes à órbita da Terra. Com este exemplo se encontram as variações individuais do movimento de Saturno. Estas, vamos expô-las adiante, ao mesmo tempo [que] para os cinco planetas em conjunto.

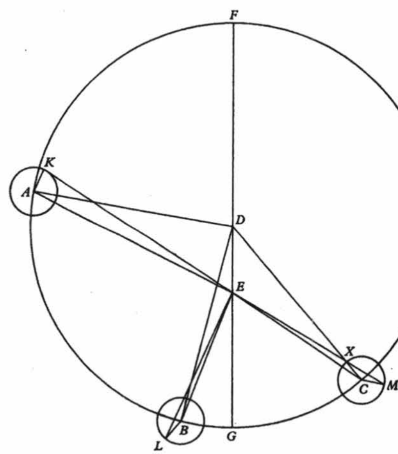
O MOVIMENTO DE JÚPITER

Depois de tratar de Saturno, usaremos do mesmo processo e [da mesma] ordem para expor o movimento de Júpiter, repetindo primeiramente as três posições referidas e analisadas por Ptolomeu [*Almagesto* XI, 1], que reconstituiremos pela transformação dos círculos anteriormente apresentados, que são os mesmos ou não muito diferentes.

A primeira destas oposições ocorreu 1 hora antes da meia-noite que se seguiu ao primeiro dia do mês egípcio de Epifi, no ano 17 do reinado de Adriano, em 23° 11′ de Escorpião [= 223° 11′], de acordo com Ptolomeu, mas em 226° 33′, depois que a precessão dos equinócios [= 6° 38′] lhe é subtraída. A segunda, referiu ele que foi no ano 21 do reinado de Adriano, no dia treze do mês egípcio de Faofi, duas horas antes da meia-noite, que se seguiu a este dia, em 6° 54′ de Peixes, mas, na esfera das estrelas fixas, em 331° 16′ [= 337° 54′ − 6° 38′]. A terceira foi no primeiro ano do reinado de Antonino, na noite a seguir ao dia 20 de Atir, cinco horas depois da meia-noite, em 7° 54′ [= 14° 23′ − 6° 38′] de Peixes mas, na esfera das estrelas fixas em 331° 16′[= 337° 54′ − 6° 38′] na esfera das estrelas fixas. Portanto, desde a primeira até a segunda houve 3 anos egípcios, 106 dias, 23 horas e o movimento aparente do planeta foi de 104° 43′ [= 331° 16′ − 226° 33′]. Da segunda à terceira foi um ano, 37 dias, 7 horas; e o movimento aparente do planeta foi de 36° 29′ [=360° + 7° 45′ − 331° 16′]. No primeiro intervalo, o movimento médio [do planeta] foi de 99° 55′, no segundo 33° 26′. Ora Ptolomeu verificou que o arco do círculo excêntrico, desde a ápside superior até a primeira oposição, foi de 770° 15′, e o arco seguinte, desde a segunda oposição, até à ápside inferior 2° 50′, e, desta até à terceira oposição, 30° 36′. Toda a excentricidade é igual a $5\ ^{1}/_{2}$ unidades, sendo o raio 60 unidades. Mas se o raio for igual a 10 000 unidades, a excentricidade será 917 unidades, correspondendo tudo isto, rigorosamente, às observações.

Seja, então, *ABC* um círculo, cujo arco *AB*, desde a primeira oposição até a segunda, mede os referidos 99° 55′, e *BCF* 33° 26′. Sendo *D* o centro, tracemos um diâmetro *FDG*, de modo que, desde a ápside superior *FA* tenha 77° 15′, *FAB* 177° 10′ [= 180° − 2° 50′], e *GC* = 30° 36′. Tomemos *E* para centro do círculo da Terra, e seja a distância *DE* igual a 687 unidades, equivalentes a $^{3}/_{4}$ de 917 unidades [excentricidade de Ptolomeu].

Com $^{1}/_{4}$ de 917 unidades, isto é, 229 unidades de raio, descrevamos um epiciclo à volta dos pontos *A*, *B* e *C*.

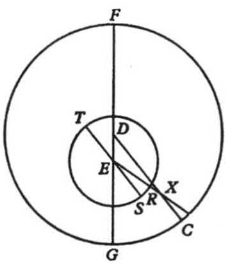


Juntemos *AD*, *BD*, *CD*, *AE*, *BE* e *CE*. Nos epiciclos, juntemos *AK*, *BL* e *CM*, de modo que os ângulos *DAK*, *DBL*, *DCM* sejam iguais a *ADF*, *FDB*, *FDC*. Finalmente, juntemos também *K*, *L* e *M*, por meio de linhas rectas, a *E*.

No triângulo *ADE*, é dado o ângulo *ADE*, com 102° 45′, pois que *ADF* é dado [e é o seu suplemento]; o lado *DE* é igual a 687 unidades, sendo *AD* igual a 10 000 unidades; o terceiro lado *AE* será calculado em 10 174, o ângulo *EAD* é igual a 3° 48′; o ângulo restante, *DEA*, 73° 27′; e todo o ângulo *EAK* mede 81° 3′ [= *EDA* + *(DAK* = *ADF)* = 3° 48′ + 77° 15′]. Sendo, pois, dados dois lados do triângulo *AEK*, e sendo *EA* = 10 174 unidades, *AK* = 229, e sendo dado igualmente o ângulo *EAK*, facilmente se verifica que o ângulo *AEK* e mede 1° 17′. Daqui resulta que também o ângulo *KED*, diferença entre *DEA* e *AEK*, tem 72° 10′. Semelhante demonstração se aplicará ao triângulo *BED*. Com efeito, os lados *BD* e *DE* continuam ainda iguais aos anteriores, mas o ângulo *BDE* é dado com 2° 50′ [= 180° − (*FDB* = 177° 10′)]. Por conseguinte, a base *BE* terá 9 314 unidades, sendo *DB* igual a 10 000 unidades e o ângulo *DBE* a 12′. Assim, uma vez mais, são dados dois lados do triângulo *ELB*. Todo o ângulo *EBL* mede 177° 22′ [= 177° 10′ + 12′] e o ângulo *LEB* é dado com 4′. Ao mesmo tempo, se se subtrai o total de 16′ [= 12′ + 4′] ao ângulo *FDB*, o resto são 176° 55′, valor do ângulo *FEL*. Se a este valor deduzirmos o ângulo *KED*, com 72° 10′, a diferença é 104° 44′, equivalente ao ângulo *KEL*, quase coincidente com o ângulo do movimento aparente, entre o primeiro e o segundo dos pontos terminais observados [= 104° 43′].

De igual modo para a terceira posição: são dados dois lados, *CD* e *DE* no triângulo *CDE*, assim como o ângulo *CDE*, com 30° 36′. Demonstrar-se-á pela mesma via que a base *EC* tem 9 410 unidades e o ângulo *DCE* mede 2° 8′. Assim, todo o ângulo *ECM*, no triângulo *ECM*, mede 147° 44′. Deste modo demonstra-se que *CEM* é igual a 39′. O ângulo externo, *DXE*, é igual ao ângulo interno, *ECX*, mais o ângulo interno oposto, *CEX*, que mede 2° 47′ [= 2° 8′ + 39′]. Assim o ângulo *GEM* é igual a 180° menos o ângulo *DEM*, isto é, 33° 23′. Todo o ângulo *LEM*, que estava entre a segunda e terceira oposição, mede 36° 29′, também de acordo com as observações. Mas esta terceira oposição, 33° 23′ a Este da ápside inferior, foi calculada em 7° 45′. Assim a posição da ápside superior, como o resto do semicírculo, é calculada em 154° 22′ [= 180° − (33° 23′ − 7° 43′)], na esfera das estrelas fixas.

Descrevamos agora à volta de *E*, a órbita anual da Terra, *RST*, com o diâmetro *SET*, paralelo à linha *DC*. Está claramente demonstrado que o ângulo *GDC* mede 30° 36′ e é igual a *GES*. O ângulo *DXE*, igual a *RS*, e o arco *RS* mede 2° 47′, que é a distância entre o planeta e o perigeu médio da órbita. Por conseguinte, todo o *RST* é igual à distância do planeta à ápside superior emergente da órbita, e é igual a 182° 47′.

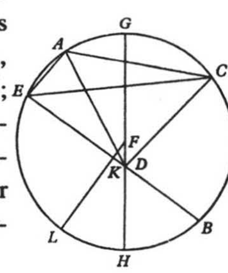


A partir daqui, temos a confirmação de que na altura da terceira oposição de Júpiter, no primeiro ano do reinado de Antonino, a 20 do mês egípcio de Atir, cinco horas depois da meia-noite seguinte, o planeta Júpiter, na sua anomalia de paralaxe, estava em 182° 47′; a sua posição uniforme, em longitude, era igual a 4° 58′ [= 7° 45′ − 2° 47′]; e a posição da ápside superior do círculo excêntrico igual a 154° 22′. Todos estes resultados correspondem exactamente à nossa hipótese da mobilidade da Terra e do movimento uniforme.

TRÊS OUTRAS OPOSIÇÕES DE JÚPITER OBSERVADAS MAIS RECENTEMENTE

Às três oposições do planeta Júpiter observadas outrora e analisadas anteriormente, acrescentaremos três outras que observámos com o maior cuidado. A primeira foi no ano 1520 da era cristã, a 30 de Abril, onze horas depois da meia-noite precedente, em 200° 28′ na esfera das estrelas fixas. A segunda aconteceu no ano 1526 da era cristã, a 28 de Novembro, três horas depois da meia-noite, em 48° 33′. A terceira ocorreu no ano 1529 da era cristã, no dia 1 de Fevereiro, quando 19 horas eram passadas depois da meia-noite, em 113° 44′. Da primeira à segunda são 6 anos, 212 dias, mais 40 minutos do dia, durante os quais o movimento de Júpiter foi calculado em 208° 6′ [= 360° + + 48° 34′ − 200° 28′]. Da segunda à terceira são 2 anos egípcios, 66 dias e 30 minutos do dia, sendo o movimento aparente do planeta, 65° 10′ [= 113° 44′ − 48° 34′]. Contudo, no primeiro intervalo, o movimento uniforme foi de 199° 40′ e no segundo 66° 10′.

Para ilustrar o que acabamos de dizer, descrevamos um círculo excêntrico, *ABC*, e consideremos que o planeta se move nele simples e uniformemente. Designemos as três posições observadas com as letras *A*, *B* e *C*, pela sua ordem, de modo que o arco *AB* meça 199° 40′, *BC* = 66° 10′; portanto, *AC*, igual ao resto do círculo, terá 94° 10′. Tomemos também *D* como centro da órbita anual da Terra. Juntemos-lhe *AD*, *BD* e *CD*. Prolonguemos uma delas, por exemplo *DB*, numa linha recta, para os dois lados do círculo. Seja esta linha, *BDE*. Juntemos *AC*, *AE* e *CE*.



Dado que o ângulo do movimento aparente *BDC*, mede 65° 10´, no sistema em que quatro ângulos rectos ao centro valem 360°, o resto do semicírculo *CDE*, será, no mesmo sistema, 114° 50′ [180° − 65° 10′]. Mas no sistema em que 360° são iguais a dois ângulos rectos (como na circunferência) *CDE* = 229° 40′ [= 2 × 114° 50´] e o ângulo *CED* que define o arco *BC* medirá 66° 10′. Por conseguinte o ângulo, *DCE*, diferença entre 360° e a soma de 229° 40´ mais 66° 10´, medirá 64° 10´.

Assim, sendo dados os ângulos no triângulo *CDE*, também os lados são dados. *CE* é igual a 18 150 unidades, e *ED* a 10 918, sendo o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo, 20 000 unidades.

Aplicando a mesma dedução ao triângulo *ADE*, o ângulo *ADB* é dado com 151° 54´, igual ao resto do círculo, do qual se subtraiu a distância dada da primeira à segunda oposição [= 208° 6´]. Por conseguinte, o ângulo suplementar *ADE* é igual a 28° 6´ [= 180° − 151° 54′] como um ângulo ao centro, mas vale 56° 12′ [= 2 × 18° 6´]. O ângulo *AED*, que define o arco *BCA* [= *BC* + *CA*] é igual a 160° 20′ [= 66° 10´+ 94° 10´]. O ângulo *EAD*, diferença entre 360° e a soma de 56° 12´ mais 160° 20´ equivale a 143° 28´. A partir disto, o lado *AE* aparece com 9 420 unidades, sendo o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo *ADE* igual a 20 000. Mas quando *ED* é igual a 10 918 unidades, *AE* equivale a 5 415 no sistema de unidades em que *CE* também é avaliado em 18 150.

Assim, temos mais uma vez, no triângulo *EAC*, dois lados dados, *EA* e *EC*, juntamente com o ângulo *AEC* por eles determinado , que define o arco *AC*, com 94° 10´. Daqui se pode deduzir que o ângulo *ACE*, definindo o arco *AE* medirá 30° 40´. Com *AC* isto perfaz um total de 124° 50´ [= 94° 10´+ 30° 40´], e a corda correspondente, *CE*, é igual a 17 727 unidades, sendo o diâmetro do círculo excêntrico correspondente a 20 000 unidades. Nestas mesmas unidades, de acordo com a proporção anteriormente estabelecida, *DE* terá também 10 665 unidades e todo o arco *BCAE* será igual a 191° [= *BC* + *CA* + *AE* = 66° 10′ + 90° 10′ + 30° 40′]. Segue-se que *EB*, o resto do círculo, mede 169°, subtendendo a corda correspondente a toda a linha *BDE*, que tem 19 908 unidades, enquanto *BD*, a diferença entre *BDE* e *DE*, equivale a 9 243. Ora, dado que *BCAE* é o segmento maior, conterá o centro do círculo, *F*. Tracemos, agora, o diâmetro *GFDH*. É evidente que o rectângulo formado por *ED* e *BD* é igual ao que tem como lados *GD* e *DH*, que, por isso mesmo, também é dado. Mas o rectângulo formado por *GD* e *DH*, mais o quadrado de *FD*, é igual ao quadrado de *FDH*, de modo que subtraindo o rectângulo formado por *GD* e *DH* do quadrado de *FHD*, o resto é igual a $(FD)^2$. Por conseguinte, *FD* é dado com 1193 unidades, sendo *FG* igual a 10 000. Mas, sendo *FG* igual a 60 unidades, *FD* mede 7 unidades e 9′. Bissectemos agora *BE* em *K*, e tracemos *FKL* que será, portanto, perpendicular a *BE*. Dado que *BDK* é igual a $^1/_2$ de *BDE*, isto é, 9 954 unidades, e *BD* é igual a 9 243, a diferença entre *BDK* e *DB*, isto é, *DK*, corresponde a 711 unidades. Logo, sendo dados os lados do triângulo rectângulo *DFK* e o ângulo *DFK* com 36° 35′ verificar-se-á, a partir disto, que o arco *LH* terá igualmente 36° 35′. Mas todo o arco *LHB* mede $84^1/_2$°. Subtraindo *LH* de *LHB*, o resto, *BH*, é igual a 47° 55′, que é a distância entre a posição da segunda oposição ao perigeu. Subtraindo *BH* do semicírculo, o resto, *BCG*, é a distância entre a segunda oposição e o apogeu, 132° 5′. Subtraiamos *BC* com 66° 10′, de *BCG*. O resto, 65° 55′ é a distância entre a posição da terceira oposição e o apogeu. Quando subtraímos este valor de 94° 10′, o resto é igual a 28° 15′, a distância do apogeu à primeira posição do epiciclo.

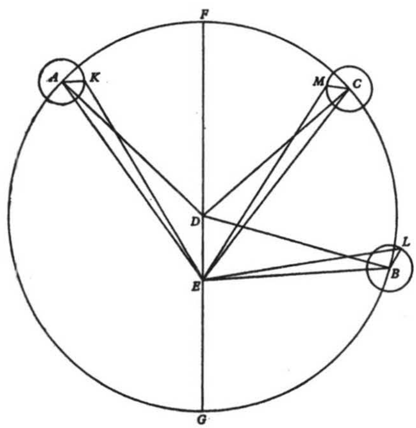
Os resultados acabados de referir estão, indiscutivelmente, de acordo, mas apenas ligeiramente, com os fenómenos, dado que o planeta não segue pelo referido círculo excêntrico. Por conseguinte, este método de exposição, baseado em fundamentos errados, não pode dar qualquer resultado seguro. Entre as muitas provas da sua falibilidade está o facto de que em Ptolomeu se admite uma excentricidade maior do que a que era própria de Saturno, e mais pequena em Júpiter, enquanto no que nos toca, a excentricidade de Júpiter era bastante maior. Assim, é evidente que, quando arcos diferentes de um círculo são tomados para um planeta, não se alcança o resultado desejado do mesmo modo. Uma comparação do movimento uniforme e aparente de Júpiter nos três pontos terminais atrás mencionados, e depois em todos os lugares, teria sido impossível se não tivéssemos aceitado toda a excentricidade mencionada por Ptolomeu, isto é, 5 unidades e 30′, sendo o raio do círculo excêntrico 60 unidades; mas com o raio equivalente a 10 000 unidades, a excentricidade será de 917 unidades [V, 10]; o arco da ápside superior à primeira oposição, 45° 2′ [em vez de 28° 15′]; da ápside inferior à segunda, 164° 42′ [em lugar de 47° 53′], e da terceira à ápside superior 49° 8′, [em vez de 65° 55′].

Reproduzamos a figura anterior de um epiciclo excêntrico, na medida em que se adapta a este caso. De acordo com a nossa hipótese, $^3/_4$ de toda a distância entre os centros, *DE*, é igual a 687 unidades, enquanto que ao epiciclo cabe o restante quarto, com 229 unidades, sendo *FD* igual a 10 000 unidades. O ângulo *ADF* mede 45° 2′. Daqui resulta que no triângulo *ADE*, são dados os dois lados, *AD* e *DE*, assim como o ângulo [por eles definido] *ADE* [= 134° 58′ = 180° − (*ADF* = 45° 2′)]. Consequentemente, o terceiro lado, *AE*, será calculado em 10 496 unidades, sendo *AD* igual a 10 000, e o ângulo *DAE* a 2° 39′.

Sendo o ângulo *DAK* igual a *ADF* [= 45° 2′], todo o arco *EAK* [= *DAK* + *DAE* = 45° 2′ + 2° 39′] é igual a 47° 41′. Além disso, no triângulo *AEK*, dois lados, *AK* e

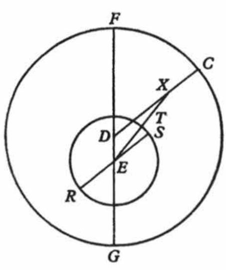
AE, são também dados, sendo o ângulo $AEK = 57'$. Quando este ângulo, somado com *DAE*, se subtrai de *ADF*, o resto *KED* é igual a 41° 26′, na primeira oposição.

O mesmo se passa no triângulo *BDE*. Dois lados, *BD* e *DE*, são dados, e o ângulo por eles definido *BDE* tem 64° 42′. Assim, também aqui se conhecerá o terceiro lado, *BE*, igual a 9 725 unidades, sendo *BD* igual a 10 000, e o



ângulo *DBE* com 3° 40′. Consequentemente, também no triângulo *BEL* são dados dois lados, *BE* e *BL*, juntamente com todo o ângulo *EBL* [que definem], igual a 118° 58′. *BEL* também é dado com 1° 10′, tendo *DEL*, portanto, 110° 28′. Mas *KED* já era conhecido como igual a 41° 26′. Por conseguinte, todo o ângulo *KEL* [= *KED* + *DEL* = 110° 28′ + 41° 26′] mede 151° 54′. Assim, a diferença entre 4 ângulos rectos, 360°, e 151° 54′, isto é, 208° 6′ é igual ao movimento aparente entre a primeira e segunda oposição, de acordo com as observações.

Finalmente, e em terceiro lugar, os lados *DC* e *DE* do triângulo *CDE* são dados do mesmo modo. Além disso, o ângulo *CDE* é igual a 130° 52′ porque *FDC* é dado [e igual a 49° 8′ que é a distância distância angular entre a terceira oposição e a ápside superior]. O terceiro lado, CE, terá 10 463 unidades, sendo CD igual a 10 000, e o ângulo $DCE = 2^o\ 51'$. Por conseguinte, todo o ângulo ECM é igual a $51^o\ 59'$ [$= 2^o\ 51' + 49^o\ 8' = DEC + (DCM - FDC)$]. Daqui resulta que no triângulo CEM são dados ainda dois lados, CM e CE, bem como o ângulo MEC [por eles definido]. O ângulo MEC terá 1^o. A soma de MEC e DCE, anteriormente encontrados, é igual à diferença entre FDC e DEM, que são os ângulos dos movimentos uniformes e aparente. Por conseguinte, DEM na terceira oposição, é igual a $45^o\ 17'$. Mas já se demonstrou que DEL mede $110^o\ 28'$. Por conseguinte LEM é igual à diferença, $65^o\ 10'$, que é o ângulo da segunda oposição observada para a terceira, igualmente de acordo com as observações [$= 180^o - -(64^o\ 42' + 49^o\ 8' = 113^o\ 50') = 66^o\ 10'$]. Ora, dado que a terceira posição de Júpiter foi observada em $113^o\ 44'$, na esfera das estrelas fixas, a posição da ápside superior de Júpiter está calculada em cerca de 159^o [$\cong 133^o\ 44' + 45^o\ 17' = 159^o\ 1'$].



Mas se nós, agora, descrevermos à volta de E, a órbita da Terra, RST, e o seu diâmetro, RES, for paralelo a DC, é evidente que na terceira oposição de Júpiter, o ângulo FDX, igual a DES, medirá $49^o\ 8'$, e que o apogeu do movimento em paralaxe, está em R. Mas se a Terra tiver atravessado um semicírculo mais o arco ST, entra em conjunção com Júpiter, em oposição [ao Sol]. Este arco, ST, mede $3^o\ 51'$, igual a SET, como se demonstrou numericamente [no desenho anterior: $DCE = 2^o\ 51' + MC = 1^o$]. Estes números, por conseguinte, mostram que 19 horas depois da meia-noite, no dia 1 de Fevereiro de 1259 da era de Cristo, a anomalia uniforme de Júpiter, em paralaxe, é igual a $183^o\ 51'$ [$= RS + ST = 180^o + 3^o\ 51'$], o seu movimento verdadeiro, $109^o\ 52'$; e o apogeu do círculo excêntrico quase 159^o, em relação ao corno da constelação de Áries. Era isto o que se queria demonstrar.

CONFIRMAÇÃO DO MOVIMENTO UNIFORME DE JÚPITER

Já se viu atrás [V, 10] que na última das três oposições observadas por Ptolomeu, o planeta Júpiter estava no seu movimento médio, em 4° 58′, enquanto a anomalia paraláctica era de 182° 47′. Assim, no período entre as duas observações [a última de Ptolomeu e a última de Copérnico], o movimento de Júpiter, em paralaxe, atravessou evidentemente 1° 5′ [≈ 183° 51′ − 182° 47′], além das revoluções completas, e no seu movimento próprio, cerca de 104° 54′ [= 109° 52′ − 4° 58′]. Ora, o tempo que decorreu desde o primeiro ano do reinado de Antonino, a 20 do mês egípcio de Atir, cinco horas depois da meia-noite seguinte, até 1529 da era cristã, no dia 1 de Fevereiro, 19 horas depois da meia-noite precedente, foi de 1392 anos egípcios, 99 dias e 3 minutos de um dia. A este tempo, segundo o cálculo atrás enunciado, correspondem semelhantemente [movimento em paralaxe] 1° 5′, para além das revoluções completas, nos quais a Terra, no seu movimento uniforme, ultrapassou Júpiter 1267 vezes. Assim, considera-se que o cálculo está certo e é confirmado, pois concorda com os resultados obtidos visualmente. Neste tempo, as ápsides superior e inferior do círculo excêntrico desviaram-se claramente para Este, 4 1/2°[≅ 159° − 154° 22′]. Uma distribuição proporcional dá aproximadamente 1° para 300 anos.

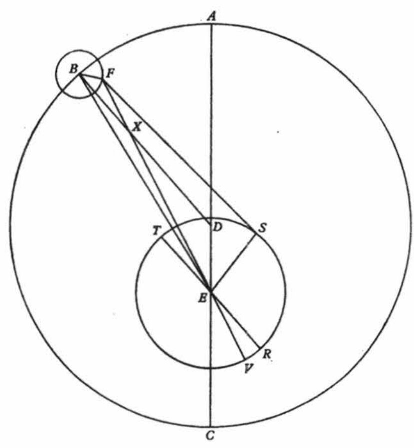
DETERMINAÇÃO DAS POSIÇÕES DO MOVIMENTO DE JÚPITER

A última das três observações de Ptolomeu teve lugar às 5 horas depois da meia-noite, a seguir ao dia 20 do mês de Atir, no primeiro ano do reinado de Antonino Pio. O tempo contado desde então até o início da era cristã, é de 136 anos egípcios, 314 dias e 10 minutos de um dia. Nesse período, o movimento médio, em paralaxes foi de 84° 31′. Quando se subtrai este número de 182° 47′ [da terceira observação de Ptolomeu], o resto são 98° 16′, em referência à meia-noite que precedeu o dia um de Janeiro, no começo da era cristã. Desde esse tempo até a primeira Olimpíada, em 775 anos egípcios e $12^1/_2$ dias, o movimento é calculado em 70° 58′, para além dos círculos completos. Quando se subtrai este número de 98° 16′ [para a era cristã], o resto é igual a 27° 18′, em referência à posição das Olimpíadas. Por conseguinte, em 451 anos e 247 dias, o movimento atinge 110° 52′. Quando se adiciona este número à posição das Olimpíadas, a soma é igual a 138° 10′ para a posição da era de Alexandre, ao meio-dia, no dia um do mês egípcio de Tot. Este processo servirá para quaisquer outras épocas.

DETERMINAÇÃO DAS PARALAXES DE JÚPITER E A SUA ALTURA EM RELAÇÃO À REVOLUÇÃO ORBITAL DA TERRA

Efectivamente, para determinar os outros fenómenos relacionados com Júpiter, designadamente a sua paralaxe, observámos com todo o cuidado a sua posição em 1512 da era cristã, a 18 de Fevereiro, seis horas antes do meio-dia. Através do instrumento vimos Júpiter em 4° 31′ a Oeste da primeira estrela mais brilhante, na fronte do Escorpião. Dado que a posição da estrela fixa é em 209° 40′, a posição de Júpiter era, evidentemente, em 205° 9′, na esfera das estrelas fixas. Ora, desde o começo da era cristã até a hora desta observação, há 1520 anos uniformes, 62 dias e 15 minutos do dia. Daqui resulta que o movimento médio do Sol é calculado em 309° 16′ e a anomalia [média] em paralaxe 111° 15′. Assim, a posição média do planeta Júpiter é estabelecida em 198° 1′ [= 309° 16′ − 111° 15′]. Visto que a posição da ápside superior do círculo excêntrico, no nosso tempo, foi calculada em 159° [IV, 11], a anomalia do círculo excêntrico de Júpiter é igual a 39° 1 [= 198° 1′ − 159°].

. Assim, descrevamos o círculo excêntrico *ABC*, com o centro em *D*, e o diâmetro *ADC*. Seja o apogeu em *A*, o perigeu em *C*, e, portanto, *E* o centro da órbita anual da Terra, [situado] sobre *DC*. Tomemos o arco *AB* de 39° 1′ e, com *B* como centro, descrevamos o epiciclo, cujo raio *BF* é igual a $^1/_3$ de *DE*, que é a distância entre os centros. Seja o ângulo *DBF* igual a *ADB*. Tracemos as linhas rectas *BD*, *BE* e *FE*. Ora, visto que são dados dois lados do triângulo *BDE, DE* com 687 inidades e *BD* com 10 000, os quais definem o ângulo dado *BDE*, com 140° 59´ [= 180° – (*ADB* = 39° 1´)], conclui-se que a base *BE* tem 10 543 unidades e o ângulo *DBE* mede 2° 21´, diferença entre *BED* e *AED*. Assim, todo o ângulo *EBF* medirá 41° 22´ [= (*DEB* = 2° 21´ + *DBF* = *ADB* = 39° 1´]. Ora, no triângulo *EBF*, o ângulo *EBF* é dado juntamente com os dois lados que o definem, sendo *EB* = 10 453 unidades e *BF* com 229 unidades, igual a $^1/_3$ de *DE*, a distância entre os centros, sendo também *BD* igual a 10 000. Segue-se que o lado restante, *FE*, tem 10 373 unidades e o ângulo *BEF*, 50´.



Se as linhas *DB* e *FE* se intersectam no ponto *X*, o ângulo de intersecção, *DXE*, será a diferença entre *BDA* e *FED*, igual ao movimento médio menos o verdadeiro, e à soma de *DBE* com *BEF* [= 2° 21´ + 51´], isto é, 3° 11´. Subtraindo este valor de 39° 11´ [= *ADB*], dá 35° 50´, que é *FED*, o ângulo entre a ápside superior do círculo excêntrico e o planeta. Mas a posição da ápside superior estava em 159° [V, 11], e as duas quantidades somadas perfazem

194° 50′. Esta era a posição verdadeira de Júpiter, em relação ao centro, *E*, sendo o planeta visto em 205° 9′ [V, 14]. Por conseguinte, a diferença, 10° 19′, diz respeito à paralaxe.

Descrevamos agora à volta do centro *E* a órbita da Terra, *RST*, com o diâmetro *RET* paralelo a *BD*, de modo que *R* seja o apogeu paraláctico. Tomemos também um arco, *RS*, com 111° 15′, de acordo com a determinação [V, 14] da anomalia paraláctica média. Prolonguemos *FEV* numa linha recta através dos dois lados de órbita da Terra. O apogeu verdadeiro do planeta será *V* e o ângulo *REV*, a diferença angular [entre o apogeu médio e o apogeu verdadeiro], é igual a *DXE* e faz todo o arco *VRS* igual a 114° 26′ [= *RS* + *SV* = 111° 15′ + 3° 11′]; e *FS*, a diferença entre 180° e *SEV* [= 114° 26′], igual a 65° 34′. Mas verificou-se que *EFS* equivalia a 10° 19′, e *FSE*, o último ângulo [do triângulo *EFS*], era igual a 104° 7′. Por conseguinte no triângulo *EFS*], sendo os ângulos dados, a razão entre os lados é também dada. *FE* está para *ES* assim como 9 698 está para 1 791. Assim, sendo *FE* igual a 10 373 unidades, *ES* é igual a 1 916, com *BD* igual a 10 000. Ptolomeu, porém, verificou que *ES* tinha 11 unidades e 30′, medindo o raio do círculo excêntrico 60 unidades [*Almagesto*, XI, 2]. Esta é, aproximadamente, a mesma razão que há entre 1 916 e 10 000. Neste caso, parece-me que não há divergência nenhuma entre mim e ele.

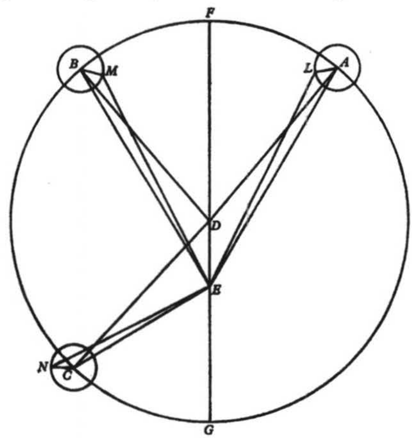
Ora, o diâmetro *ADC* está para o diâmetro *RET*, assim como 5 unidades e 13′ estão para 1 unidade. Igualmente *AD* está para *ES* ou *RE*, assim como 5 unidades, 13′ e 9″, estão para 1 unidade. De modo semelhante, *DE* é igual a 21′ 29″, e *BF* igual a 7′ 10″. Por conseguinte, com o raio da órbita da Terra igual a 1 unidade, toda a linha *ADE* menos *BF*, será igual a 5 unidades, 27′ e 29″ [= 5° 13′ 9″ + 21′ 29″ − 7′ 9″], com Júpiter no seu apogeu; com o planeta no perigeu, o resto *EC* mais *BF* [= 5° 13′ 9″ − 21′

29″ + 7′ 9″], igual a 4 unidades, 58′ e 49. Com o planeta nas posições entre o apogeu e o perigeu, há um valor correspondente. Estes números levam à conclusão de que no apogeu Júpiter faz a sua maior paralaxe, 10° 35′; no perigeu, 11° 35′. Entre estes [extremos] a diferença é 1°.
De acordo com isto foram determinados os movimentos uniformes de Júpiter bem como os seus movimentos aparentes.

O PLANETA MARTE

Devemos agora analisar as revoluções de Marte tomando três das antigas oposições, relacionando-as uma vez mais com o movimento da Terra, em antiguidade. Ora, das que Ptolomeu referiu [*Almagesto*, X, 7], a primeira foi no ano 15 do reinado de Adriano, a 26 do mês de Tibi, o quinto do calendário egípcio, uma hora igual depois da meia-noite seguinte, em 21° na constelação de Gémeos, mas em 74° 20′ em relação à esfera das estrelas fixas [21° de Gémeos = 81° 0′ – 6° 40′ = 74° 20′]. Descreveu a segunda oposição, no ano 19 do mesmo reinado, a 6 de mês de Farmuti, o oitavo do calendário egípcio, três horas antes da meia-noite seguinte, em 85° 50′ da constelação do Leão; mas, na esfera das estrelas fixas, em 142° 10′ [28° 50′ de Leão = 148° 50′ – 6° 40′ = 142° 10′]. A terceira oposição foi no segundo ano do reinado de Antonino, no dia 12 do mês de Epifi, o décimo primeiro do calendário egípcio, duas horas iguais antes da meia-noite seguinte, em 2° 34′, na constelação de Sagitário; ou, na esfera das estrelas fixas, em fixas, em 235° 54′ [2° 34′ de Sagitário = 242° 34′ – 6° 40′ = 235° 54′]. Ora, entre o primeiro e o segundo, há quatro anos egípcios, 69 dias, 20 horas, 50 minutos do dia, com o movimento aparente do planeta igual a 67° 50′ [= 142° 10′ – 74° 20′], para além das revoluções completas. Da segunda oposição à terceira houve 4 anos, 96 dias e 1 hora. O movimento aparente do planeta fora de 93° 44′ [= 235° 54′ – 142° 10′]. Contudo, o movimento médio, no primeiro intervalo, foi de 81° 44′ e no segundo 95° 28′, para além das revoluções completas. Ora, Ptolomeu verificou [*Almagesto*, X, 7], que toda a distância entre os centros era igual a 12 unidades, no sistema em que o raio do círculo excêntrico é igual a 60 unidades; mas com o raio igual a 10 000 unidades, a distância proporcional é igual a 2 000 unidades. Da primeira oposição à ápside superior, o movimento médio é igual a 41° 33′. Depois, e por ordem, da ápside superior à segunda oposição, são 40° 11′; e da terceira oposição à ápside inferior, 44° 21′.

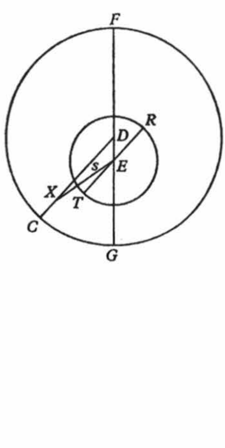
De acordo com a nossa hipótese do movimento uniforme, contudo, a distância entre os centros do círculo excêntrico e da órbita da Terra, é de 1 500 unidades, iguais a $^3/_4$ da excentricidade de Ptolomeu, que é de 2 000 unidades, enquanto que $^1/_4$ restante, ou seja, 500 unidades



constitui o raio do epiciclo. Deste modo, descrevamos agora o círculo excêntrico *ABC* com o centro *D*. Pelas duas ápsides tracemos o diâmetro *FDG*, no qual *E* seja o centro do círculo da revolução anual. Sejam *A*, *B*, *C*, por esta ordem, os lugares das oposições observadas, com os arcos *AF* igual a 41° 33′, *FB* igual a 40° 11′, e *CG* igual a 44° 21′. Em cada um dos pontos *A*, *B* e *C*, descrevamos o epiciclo, com o raio igual a $^1/_3$ da distância *DE*. Juntemos *AD*, *BC*, *CD*, *AE*, *BE* e *CE*. Nos epiciclos, tracemos *AL*, *BM* e *CN*, de modo que os ângulos *DAL*, *DBM* e *DCN* sejam iguais a *ADF*, *BDF* e *CDF*. No triângulo *ADE*, o ângulo *ADE* é dado com 138° (27′], porque o ângulo *FDA* também é dado [= 41° 33′]. Além disto, são dados dois lados: *DE*, com 1 500 unidades, sendo *AD* igual a 10 000 unidades. Daqui se infere que o último lado, *AE*, é igual a 11 172 unidades da mesma espécie, e o ângulo *DAE* tem 5° 7′. Assim, todo o ângulo *EAL* mede 46° 40′ [= *DAE* + + *DAL* = 5° 7′ + 49° 33′]. Por isso, no triângulo *EAL*, o ângulo *EAL* [= 46° 40′] é dado, assim como os dois lados: *AE* com 11 172 unidades, e *AL* com 500 unidades, sendo *AD* igual a 10 000 unidades. O ângulo *AEL* também será dado e igual a 1° 56′. Quando somado com o ângulo *DAE*, *AEL* constitui a diferença total entre *ADF* e *LED*, com 7° 3′, e *DEL* com $34^1/_2$°.

De modo semelhante na segunda oposição, no triângulo *BDE*, o ângulo *BDE* é dado com 139° 49′ [= 180° − (*FDB* = 40° 11′)], e o lado *DE* com 1 500 unidades, sendo *BD* = 10 000. Isto faz o lado *BE* igual a 11 188 unidades, o ângulo *BED* igual a 35° 13′ e o ângulo *DBE*, diferença entre 180° e a soma de 139° 49′ com 35° 13′, igual a 4° 58′. Por conseguinte, todo o ângulo *EBM* [= *DBE* + (*DBM* = *BDF*) = 4° 58′ + 40° 11′] é igual a 45° 9′, definido pelos lados *BE* e *BM*. Daqui se segue que o ângulo *BEM*, [mede] 1° 53′ e o ângulo *DEM*, diferença entre *BED* e *BEM*, é igual a 33° 20′. Por conseguinte, todo o ângulo *LEM* [= *DEM* + *DEL*] é igual a 67° 50′, o ângulo que o planeta foi visto percorrer, desde a primeira oposição até a segunda, o que é uma quantidade de acordo com a experiência [= 67° 50′].

De novo, na terceira oposição, o triângulo *CDE* tem dois lados, *CD* e *DE*, que são dados e definem o ângulo *CDE*, igual a 44° 21′. Assim, a base *CE* aparece com 8 988 unidades, sendo *CD* igual a 10 000 unidades ou *DE* com 1 500, o ângulo *CED* com 128° 57′, e o ângulo *DCE* com 6° 42′, diferença entre 180° e a soma de 44° 21′ mais 128° 57′. Assim, uma vez mais, no triângulo *CEN*, todo o ângulo *ECN* [= (*DCN* = *CDF* = 180º – 44º 21′ = 135º 39′) + (*DCE* = 6º 42′)] é igual a 142º 21′, sendo uniforme pelos lados conhecidoos *EC* e *CN*. Deste modo, o ângulo *CEN*, também será dado com 1º 52′. Portanto, o ângulo *NED* = *CED* – *CEN* = 128º 57′ – 1º 52′, diferença entre *CED* e *CEN*, é igual a 127º 5′, na terceira oposição. Ora, já se demonstrou que *DEM* tem 33º 20′. O ângulo *MEN*, diferença entre *NED* e *DEM*, é igual a 93º 45′, equivalente ao ângulo do movimento aparente, entre a segunda e terceira oposições. Também aqui, esta quantidade está totalmente de acordo com as observações [93º 45′ só difere 1′ da observação]. Nesta última oposição observada de Marte, o planeta foi visto em 235º 54′, a uma distância de 127º 5′ do apogeu do círculo excêntrico [ângulo *NEF*] como se mostrou. Assim, a posição do apogeu do círculo excêntrico de Marte foi de 108º 49′ [= 235º 54′ – 127º 5′], na esfera das estrelas fixas.

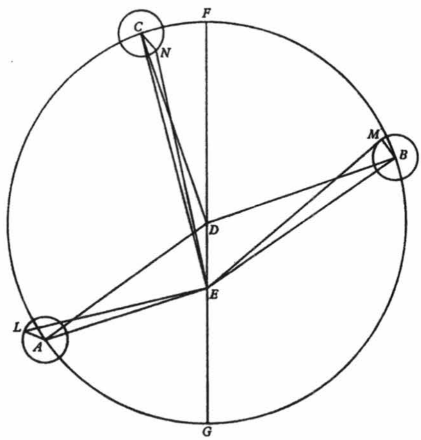


Descrevamos agora a órbita anual da Terra, *RST*, com centro em *E*, o diâmetro *RET* paralelo a *DC*, para que *R* seja o apogeu paraláctico, e *T*, o perigeu. O planeta será visto em *EX*, na longitude de 235º 54′. O ângulo *DXE*, como se sabe, tem 8º 34′, igual à diferença entre os movimentos uniforme e aparente [= *DCE* + *CEN* = 6º 42′ + 1º 52′, na figura anterior]. Assim o movimento médio é igual a 244½º [= 235º 54′ + 8º 34′ = 244º 28′. Por conseguinte, *DXE*, igual ao ângulo ao centro, *SET*, que, de modo semelhante mede 8º 34′. Deste modo, se o arco *ST* medindo 8º 34′ foi subtraído de um semicírculo, teremos o movimento médio do planeta em paralaxe, igual ao arco *RS* com 171º 26′. Portanto, além dos outros resultados, também mostrámos, por meio desta hipótese do movimento da Terra, que às 10 horas iguais, depois do meio-dia, a 12 do mês egípcio de Epifi, no ano 2 do reinado de Antonino, o movimento médio do planeta Marte em longitude era de 244½º e a sua anomalia paraláctica de 171º 26′.

TRÊS OUTRAS OPOSIÇÕES DO PLANETA MARTE, OBSERVADAS RECENTEMENTE

Com estas três observações de Marte, feitas por Ptolomeu, comparámos outras três que, com todo o cuidado, realizámos. A primeira foi no ano 1512 da era cristã, a 5 de Junho, 1 hora depois da meia-noite. Nela se verificou que o lugar de Marte era 235° 33′, justamente quando o Sol estava directamente oposto, em 55° 33′, em relação à primeira estrela da conteslação de Áries, tomada como início da esfera das estrelas fixas. A segunda foi no ano 1518 da era cristã, a 12 de Dezembro, 8 horas depois do meio-dia, quando o planeta apareceu em 63° 2′. A terceira foi no ano 1523 da era cristã, a 22 de Fevereiro, sete horas antes do meio dia, [com o planeta] em 123° 20′. Ora, da primeira para a segunda decorreram 6 anos egípcios, 191 dias e 45 minutos do dia, da segunda para a terceira 4 anos, 72 dias, e 23 minutos do dia. O movimento aparente, no primeiro intervalo foi de 187° 29′ [= 63° 2′+ 360° – 235° 33′], mas o movimento uniforme, 168° 7′; no segundo intervalo o movimento aparente foi de 70° 18′ [= 133° 20′– 63° 2′], mas o movimento uniforme foi igual a 83°. Reproduzamos agora o círculo excêntrico de Marte, modificando apenas *AB* para 168° 7′, e *BC* para 83°. Então, seguindo o mesmo método usado para Saturno e Júpiter, (para não falar do número, complexidade e monotomia desses cálculos), encontrámos, finalmente, o apogeu de Marte no arco *BC*. Evidentemente que não podia estar em *AB*, porque aí, o movimento aparente excedia o movimento médio, em 19° 22′ [= 187° 29′ – 168° 7′]. Nem o apogeu podia estar em

CA. Com efeito, como se mostrou atrás, no círculo excêntrico, o movimento aparente de 102° 13′ [= 360° − 187° 20′ + 70° 18′)] é menor [do que o movimento médio, 360° − (168° + 83°) = 108° 5′)], está não obstante em *BC*, procedendo *CA*, [o movimento médio é igual a 83°] excede o movimento aparente [= 70° 18′] por margem mais larga



do que em *CA* [onde 108° 53′ médio − 102° 13′ aparente = 6° 40′]. Mas, como já se provou [V, 4], no excêntrico o menor e mais lento movimento aparente acorre próximo do apogeu. Por conseguinte, o apogeu considerar-se-á como correctamente localizado em *BC*.

Seja ele *F* e o diâmetro do círculo *FDG*, no qual está situado *E*, centro da órbita da Terra. [*D* é o centro do excêntrico]. Verificámos então que *FCA* é igual a 125° 29′ e, por ordem *BF* igual a 66° 25′, *FC* igual a 16° 36′, *DE* igual à distância entre os centros, isto é, 1 460 unidades, sendo o raio igual a 10 000 unidades, e o raio do epiciclo a 500, no mesmo sistema de unidades. Estes números mostram que os movimentos aparentes e uniformes são mutuamente conformes e de acordo com as observações.

Nestas condições, completemos a figura, como anteriormente. No triângulo *ADE* são conhecidos dois lados, *AD* e *DE*, assim como o ângulo *ADE* da primeira oposição de Marte ao perigeu, que vale 54° 31´ [= arc *AG* = 180° − − (*FCA* − 125° 29′)]. Por conseguinte, mostrar-se-á que o ângulo *DAE* aparece com 7° 24´, o ângulo *AED* com 118° 5´, a diferença entre 180° e a soma de *ADE* com *DAE*, e o terceiro lado *AE*, mede 9 229 unidades. Mas o ângulo *DAL* é igual a *FDA* por hipótese. Por conseguinte todo o ângulo *EAL* [= *DAE* + *DAL* = 7° 24´+ 125° 29´] é igual a 132° 53´. Assim, também no triângulo *EAL* são dados dois lados, *EA* e *AL*, que definem o ângulo dado *A* [132° 53´]. Portanto, o ângulo restante, *AEL*, é igual a 2° 12´. O resto de *AED*, o ângulo *LED*, mede 115° 53´ [= *AED* − *AEL* = = 118° 5´− 2° 12´].

Do mesmo modo na segunda oposição, se mostrará que, por serem dados dois lados do triângulo *BDE*, *DB* e *DE*, que definem o ângulo *BDE* com 113° 35′ [= arc *BG* − 180° − (*BF* = 66° 25′)], o ângulo *DBE* terá 7° 11′, o ângulo *DEB* [vale] 59° 14´, diferença entre 180° e a soma de 113° 35´ com 7° 11´; a base *BE* [tem] 10 668 unidades, sendo *DB* igual a 10 000 unidades, *BM* [tem] 500, e todo o ângulo *EBM* [é igual a] 73° 36´ [= *DBE* + (*DBM* − *BF*) = 7° 11´+ 66° 25´].

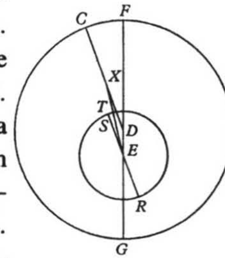
Assim também, no triângulo *EBM*, cujos lados dados definem o ângulo dado, se mostrará que o ângulo *BEM* é igual a 2° 36´ e *DEM* a 56° 38´, diferença entre *DEB* e *BEM*. Deste modo, o ângulo externo *MEG*, do perigeu à segunda oposição, é igual a um ângulo suplementar, com 123° 22´. Mas já se demonstrou que o ângulo *LED* tem 115° 53´ e o seu ângulo suplementar, *LEG*, 64° 7´. Quando se soma isto com *GEM*, cujo valor já se conhece, o total são 187° 29´, sendo 4 ângulos rectos iguais a 360°. Este número concorda com a distância aparente entre a primeira oposição e a segunda.

O mesmo se aplica à terceira oposição. Com efeito, sabe-se que o ângulo *DCE* tem 2º 6´, e o lado *EC* [tem] 11 407 unidades, sendo *CD* igual a 10 000. Por conseguinte, todo o ângulo *ECN* [= *DCE* + (*DCN* = *FDC*) = = 2º 6´+ 16º 36´] é igual a 18º 42´. Logo, como todo o ângulo *ECN* mede 18º 42 e os lados *CE* e *CN* são já dados, o ângulo *CEN* do triângulo *ECN* será calculado em 50´.

Juntando este número a *DCE* perfaz um total de 2º 56´, [valor de] quanto o ângulo *DEM*, o ângulo do movimento aparente, é menor do que *FDC*, o ângulo do movimento uniforme. Portanto *DEN* é dado com 13º 40´, o que está de acordo com o movimento aparente observado entre a segunda e a terceira oposições.

Uma vez que, como referimos [V, 16], o planeta Marte apareceu nesta posição em 133º 20´, relativamente à cabeça de constelação de Áries, o ângulo *FEN* foi calculado em cerca de 13º 40´. Por conseguinte, calculada em relação ao passado, a posição do apogeu do círculo excêntrico, nesta última observação, é evidentemente igual a 119º 40´ [= 133º 20´– 13º 40´], na esfera das estrelas fixas. No tempo do imperador Antonino, Ptolomeu verificou que o apogeu estava em 108º 50´ [*Almagesto*, X, 7: 25º 30´ de Câncer]. Tinha-se desviado, pois, 10º 50´ [= 119º 40´– – 108º 50´] para Oeste, desde então até agora. Verificámos também que a distância entre os centros é inferior em 40 unidades, no sistema em que o raio do círculo excêntrico tem 10 000 unidades. Não é que Ptolomeu ou eu tenhamos cometido qualquer erro, mas a verdade é que, como se demonstrou claramente, o centro do círculo máximo da Terra se aproximou do centro da órbita de Marte, permanecendo, entretanto, o Sol estacionário. Com efeito, estas conclusões são mutuamente conformes em alto grau, como a seguir se tornará mais claro do que a luz do dia [V, 19].

Descrevamos agora a órbita anual da Terra [*RST*], à volta do ponto *E*, seu centro, com o diâmetro *SER*, paralelo a *CD*, devido à igualdade das suas revoluções. Seja *R* o apogeu uniforme em referência ao planeta, e *S* o perigeu. Coloquemos a Terra em *T*. Quando *ET*, direcção em que se viu o planeta, for prolongada, intersectará *CD*, no ponto *X*. Mas, nesta última posição, o planeta foi visto em *ETX*, a 133° 20′ de longitude, como se mencionou [V, 16]. Além disso, o ângulo *DXE* [= *CEN* + *DCE* na figura precedente = 50′ + 2° 6′] foi considerado como tendo 2° 56′. Ora *DXE* é a diferença para mais entre o ângulo do movimento uniforme, *XDF*, e o ângulo do movimento aparente *XED*. Mas *SET* é igual ao ângulo interior alterno *DXE*, que é a prostaférese paraláctica. Subtraindo esta do semicírculo [*STR*], o resto é [igual a] 177° 4′ [= 180° − 2° 56′], isto é, a anomalia paraláctica uniforme, calculada em relação a *R*, apogeu do movimento uniforme. Assim também aqui temos como demonstrado que no ano 1523 da era cristã, a 22 de Fevereiro, 7 horas iguais antes do meio-dia, o movimento médio do planeta Marte, em longitude, era de 136° 16′ [= 2° 56′ + (133° 20′ = lugar aparente], a sua anomalia paraláctica uniforme 177° 4′ [= 184° − 2° 56′], e a ápside superior do círculo excêntrico 119° 40′. *Q. E. D.*



CONFIRMAÇÃO DO MOVIMENTO DE MARTE

Ficou bem claro acima [V, 15] que na última das três observações de Ptolomeu, o movimento médio de Marte [em longitude] era de $244^1/_2{}^o$ e a sua anomalia paraláctica, 171° 26′. Por conseguinte, no tempo decorrido [entre a última observação de Ptolomeu e a última de Copérnico], para além das revoluções completas, houve uma acumulação de 5° 38′ [+ 176° 26′ = 177° 4′]. Ora, desde o segundo ano do reinado de Antonino, a 12 de Epifi, o undécimo mês egípcio, nove horas depois do meio-dia, isto é, três horas iguais antes da meia-noite seguinte, referidas ao meridiano de Cracóvia, até o ano de 1523, da era cristã, a 22 de Fevereiro, sete horas antes do meio-dia, há 1384 anos egípcios, 251 dias, e 19 minutos do dia. Durante esse intervalo, de acordo com o cálculo feito atrás, há uma acumulação de 5° 38′, na anomalia paraláctica, após 648 revoluções completas. Este antecipado movimento uniforme do Sol é igual a $257^1/_2{}^o$. Subtraiamos deste número 5° 38′, do movimento paraláctico. O resto serão 251° 52′, que é o movimento médio de Marte em longitude. Todas estas conclusões concordam perfeitamente com o que se expôs atrás.

Capítulo XVIII

DETERMINAÇÃO DAS POSIÇÕES DE MARTE

Desde o começo da era cristã até o segundo ano do reinado de Antonino, a 12 do mês de Epifi, três horas antes da meia-noite, decorreram 138 anos egípcios, 180 dias e 52 minutos do dia. Durante este tempo, o movimento paraláctico foi de $293^{\circ}\ 4'$. Subtraindo este número dos $171^{\circ}\ 26'$ da última observação de Ptolomeu [V, 15], tirando uma revolução completa [$171^{\circ}\ 26' + 360^{\circ} = 531^{\circ}\ 26'$], o resto são $238^{\circ}\ 22'$ [$= 531^{\circ}\ 26' - 293^{\circ}\ 4'$], em relação à meia-noite do dia 1 de Janeiro, no primeiro ano da era cristã. Até esta posição, desde a 1.ª Olimpíada, há 775 anos egípcios e $12^{1}/_{2}$ dias. Durante esse tempo, o movimento paraláctico foi igual a $254^{\circ}\ 1'$. Subtraindo igualmente este número a $238^{\circ}\ 22'$, tirando uma revolução [$238^{\circ}\ 22' + 360^{\circ} = 598^{\circ}\ 22'$], o resto para a posição da 1.ª Olimpíada é igual a $344^{\circ}\ 21'$. Separando, do mesmo modo, os movimentos em relação aos períodos das outras eras, teremos a posição para a era de Alexandre Magno $120^{\circ}\ 39'$, e para a de César $111^{\circ}\ 25'$.

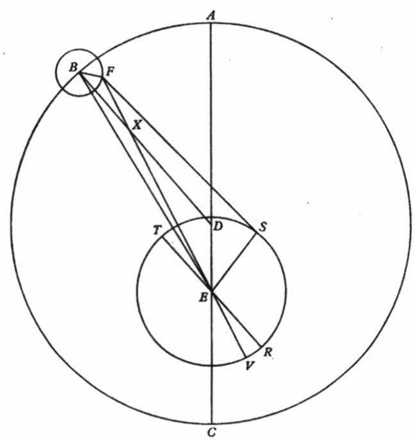
A GRANDEZA DA ÓRBITA DE MARTE [EXPRESSA] EM UNIDADES [EM QUE SE TOMA] A ÓRBITA ANUAL DA TERRA [COMO REFERÊNCIA]

Além disto, observámos também Marte ocultando a estrela chamada «a Balança austral», a primeira estrela brilhante da constelação da Balança, no dia 1 de Janeiro do ano de 1512 da era cristã.

De manhã cedo, 6 horas iguais antes do meio-dia, vimos Marte, a $^1/_4{}^o$ da estrela fixa, mas na direcção do nascimento solsticial do Sol [no Inverno, quer dizer, Nordeste], o que significa que Marte estava então afastado da estrela $^1/_8{}^o$, em longitude Este, mas $^1/_5{}^o$, em latitude Norte. Sendo conhecida a posição da estrela, 191° 20´, em relação à primeira estrela de Áries, com uma latitude Norte de 40´, a posição de Marte era claramente em 191° 28´ [= 191° 20´+ $^1/_8{}^o$], com uma latitude Norte igual a 51´ [$\cong$ 41´+ $^1/_5{}^o$]. Nesse tempo, a anomalia paraláctica, segundo o cálculo, era de 98° 28´; a posição média do Sol, 262°, a posição média de Marte, 163° 32´; e a anomalia excêntrica 3° 52´.

Partindo destes pressupostos, descrevamos um círculo excêntrico, *ABC*, com centro em *D*, o diâmetro *ADC*, o apogeu *A*, o perigeu *C*, e uma excentricidade [*DE*] de 1 460 unidades, sendo *AD* igual a 10 000. Ora é sabido que o arco *AB* mede 43° 52´. Tomando *B* como centro, sendo *BF* o raio com 500 unidades, no sistema de unidades em que *AD* tem 10 000, descrevamos um epiciclo, de modo que o ângulo DBF seja igual a ADB. Juntemos BD, BE e FE. Também com centro em E, descrevamos a órbita da Terra RST; considere-se nela o diâmetro RET, paralelo a BD, e, nele, R o apogeu do planeta em paralaxe, sendo T o perigeu do seu movimento uniforme. Admita-se que a Terra está então em S, no arco RS, que é a anomalia paraláctica uniforme, calculada em 98° 28′. Prolonguemos FE, de modo a dar a linha recta FEV, que intersecte BD no ponto X, e a circunferência convexa da órbita da Terra, em V, que é o apogeu verdadeiro da paralaxe.

No triângulo BDE são dados dois lados, DE com 1 460 unidades e BD com 10 000, os quais definem o ângulo



BDE, dado com 136° 8′, [pois é o] ângulo suplementar de ADB, por sua vez dado com 43° 52′.

Assim mostraremos que o terceiro lado BE tem 11 097 unidades e o ângulo DBE = 5° 13′. Mas o ângulo DBF é igual a ADB, por hipótese. Todo o ângulo EBF tem 49° 5′ [$DBE + DBF$ = 5° 13′ + 43° 52′] e é definido pelos lados dados EB e BF. Consequentemente, verificamos que [no triângulo *BEF*, o ângulo *BEF* mede 2º e o lado restante tem 10 776 unidades, sendo *DB* igual a 10 000. O ângulo *DXE* mede 7º 13ʹ, pois é a soma dos ângulos interiores opostos *XBE* e *XEB* [5º 13 e 2º, respectivamente]. *DXE* é a prostaférese subtractiva, diferença para mais entre os ângulos *ADB* e *XED* [= 36º 39ʹ = 43º 52ʹ – 7º 13ʹ], e a posição média de Marte, em relação à sua posição verdadeira. Ora, a sua posição média foi calculada em 163º 32ʹ. Por conseguinte a posição verdadeira estava a Oeste, em 156º 19ʹ + + 7º 13ʹ = 163º 32ʹ]. Mas, para aqueles que estavam a observá-la, duma posição próxima de *S*, ela aparecia em 191º 28ʹ. Portanto a sua paralaxe ou desvio de posição, atinge 35º 9ʹ, a Oeste [= 191º 28ʹ – 156º 19ʹ]. É pois claro que o ângulo *EFS* é igual a 35º 9ʹ. Visto que *RT* é paralelo a *BD*, o ângulo *DXE* também é igual a *REV* e o arco *RV* a 7º 13ʹ. Assim, todo o arco *VRS* mede 105º 41ʹ [= *RV* + + *RS* = 7º 13ʹ + 98º 28ʹ], que é a anomalia paraláctica normalizada. Deste modo, fica determinado o ângulo *VES*, por ser um ângulo externo do triângulo *FES* [= 105º 41ʹ]. Assim, o ângulo interno oposto, *FSE*, é também dado e igual a 70º 32ʹ [= *VES* – *EPS* = 105º 41ʹ – 35º 9ʹ]. Todos estes ângulos são dados no sistema de graus em que 180º são dois ângulos rectos. Mas num triângulo com lados dados, também a razão entre os lados é dada. Portanto, *FE* mede 9 428 unidades de comprimento e *ES* $\cong$ 5 757, sendo o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo igual a 10 000 unidades, pouco diferindo do que Ptolomeu verificou [*Almagesto*, X, 8], pois é quase a mesma coisa. Toda a linha *ADE*, pois, tem 11 460 unidades [= *AD* + *DE* = = 10 000 + 1460] e a parte restante, *EC*, 8 540 [*DEC* = = 10 000].

O epiciclo subtrai 500 unidades a *A*, a ápside superior do círculo excêntrico, e adiciona a mesma quantidade à ápside inferior, de modo que na ápside superior ficam 10 960 unidades e na ápside inferior 9 040. Portanto, com o raio da órbita da Terra igual a 1 unidade, o apogeu de Marte e distância máxima é 1 unidade, 39′ 57″; a sua distância mínima, 1 unidade, 22′ 26″; e a sua distância média 1 unidade, 31′, 11″. Assim também no caso de Marte, as extensões e as distâncias do seu movimento foram expostas através de cálculos seguros, servindo-nos do movimento da Terra.

O PLANETA VÉNUS

Depois de descrever os movimentos dos três planetas superiores, Saturno Júpiter e Marte, que circundam a Terra, vamos agora falar daqueles que são rodeados por ela. Trataremos primeiramente de Vénus, que permite uma apreciação mais fácil e evidente do seu movimento do que os planetas exteriores, pois não faltam as observações necessárias de certas posições. Com efeito, se as suas maiores elongações, de manhã e à tarde, para um e outro lado da posição média do Sol, são iguais nos dois casos, sabemos com certeza que a meio caminho entre estas duas posições do Sol, está a ápside superior ou inferior do círculo excêntrico de Vénus. Estas ápsides distinguem-se uma da outra pelo facto de que quando as maiores elongações são menores, ocorrem à volta do apogeu e quando maiores, à volta da ápside oposta. Em todos os outros lugares [entre as ápsides], finalmente, a extensão relativa das elongações mostra, sem qualquer dúvida, a distância do globo de Vénus em relação à ápside superior ou inferior, e também a sua excentricidade, pois estes pontos são tratados com muita perspicácia por Ptolomeu [*Almagesto*, X, 1-4]. Assim não é necessário repetir estes assuntos um após outro, excepto nos aspectos em que se relacionam com a nossa hipótese do movimento da Terra, com base nas observações de Ptolomeu. Ele foi buscar a primeira destas a Téon, matemático de Alexandria, feita, segundo diz, no ano 16 do reinado de Adriano, a 21 do mês de Farmuti, na primeira hora da noite seguinte, correspondente ao ano 132 da era cristã, no crepúsculo do dia 8 de Março Vénus foi visto na sua distância máxima, à tarde, a 47 $^1/_4$° da posição média do Sol, quando essa posição média era calculada em 337° 41′, na esfera das estrelas fixas. Comparou esta com outra observação que ele diz ter feito no ano 4 do reinado de Antonino, a 2 do mês de Tot, ao romper do dia, correspondente ao ano 140 da era cristã, ao romper do dia 30 de Julho. Aqui, diz novamente que a elongação máxima de Vénus, pela manhã, era igual a 47° 15′, que é a distância anterior em relação à posição média do Sol, isto é, cerca de 119°, na esfera das estrelas fixas, e anteriormente 337° 41′. A meio caminho entre estas posições, evidentemente, estão as ápsides opostas uma à outra, em 48 $^1/_3$° e 228 $^1/_3$° [= 337° 41′ – – 119° = 218° 41′; 218° 41′: 2 ≅ 109° 20′; 109° 20′ + + 119′ = 228° 20′ – 180° = 20′]. Juntemos a estes dois números, 6 $^2/_3$, referentes à precessão dos equinócios, e as ápsides ficarão, como diz Ptolomeu [*Almagesto*, X, 1] em 25° de Touro [55° = 48$^1/_2$°+ 6 $^2/_3$°] e de Escorpião [= 235° = 228 $^1/_3$° + 6 $^2/_3$°], onde as ápsides superior e inferior de Vénus tinham de estar diametralmente opostas.

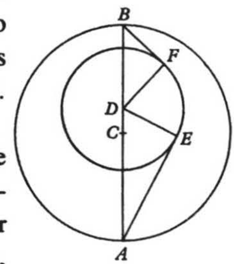
Além disto, para uma confirmação maior deste resultado, Ptolomeu utiliza outra observação feita por Téon, no ano 4 do reinado de Adriano, ao romper do dia 20 do mês de Atir, correspondente ao ano 119 da era cristã, na manhã de 12 de Outubro quando, uma vez mais, Vénus se encontrava na sua elongação máxima, 47° 32′ da posição média do Sol, 191° 13′. A esta observação acrescentou Ptolomeu uma outra sua feita no ano 21 do reinado de Adriano, correspondente ao ano 136 da era cristã, no dia 9 do mês egípcio de Mechir ou 25 de Dezembro para os Romanos, na primeira hora da noite seguinte, quando se verificou novamente que a elongação, à tarde, era de 47° 32′, em relação à posição média do Sol, igual a 265°. Mas, na observação anterior de Téon, a posição média do Sol era 191° 13′. Os pontos médios entre estas posições [265° – 191° 13′= 73° 47′; 73° 47′: 2 ≅ 36° 53′; 36° 53′+ 218° 6′; 218° 6′–

– 180° = 48° 6′], ficaram novamente em 48° 20′ e 228° 20′, aproximadamente, onde deviam situar-se o apogeu e o perigeu. Medidos em relação aos equinócios, estes pontos encontram-se em 25° de Touro e de Escorpião, que Ptolomeu distinguiu então por uma outra observação, como vem a seguir [*Almagesto*, X, 2].

Numa delas, feita por Téon, no ano 13 do reinado de Adriano, no dia 3 do mês de Epifi, correspondente ao ano 129 da era cristã, em 21 de Maio, ao romper do dia, verificou que a elongação máxima de Vénus, de manhã, era de 44° 48′, quando o movimento médio do Sol equivalia a $48^5/_6$° e Vénus aparecia em 4° [≅ 48° 50′ – 44° 48′], na esfera das estrelas fixas. O próprio Ptolomeu fez a outra observação, no dia 2 do mês egípcio de Tibi, no ano 21 do reinado de Adriano, correspondente ao ano 136 da era cristã, segundo o calendário romano, a 25 de Dezembro. Na primeira hora da noite seguinte, o movimento médio do Sol era igual a 228° 54′, em relação ao qual a elongação máxima de Vénus, à tarde, era igual a 47° 16′, com o próprio planeta a aparecer em 276 $^1/_6$° [= 228° 54′ + 47° 16′]. Com estas observações, distinguem-se as ápsides uma da outra, designadamente a ápside superior com 48 $^1/_3$°, em que as [máximas] elongações de Vénus são mais reduzidas, e a ápside inferior com 228 $^1/_3$°, em que são mais amplas. *Q. E. D.*

A RAZÃO ENTRE OS DIÂMETROS DAS ÓRBITAS DA TERRA E DE VÉNUS

Isto fará, portanto, com que também seja evidente a razão entre os diâmetros das órbitas da Terra e de Vénus. Descrevamos a órbita da Terra, *AB*, com o centro em *C*, e o seu diâmetro *ACB*, passando pelas duas ápsides. Nele tomemos *D* como centro da órbita de Vénus, excêntrica ao círculo *AB*. Seja *A* a posição do apogeu. Quando a Terra se encontra no apogeu, o centro da órbita de Vénus esta à sua maior distância da Terra. *AB*, a linha do movimento médio do Sol, situa-se em 48 $^1/_3$° de *A*, com *B* igual ao perigeu de Vénus, em 228 $^1/_3$°. Tracemos também as linhas *AE* e *BF*, tangentes à órbita de Vénus, nos pontos *E* e *F*. Juntemos *DE* e *DF*.



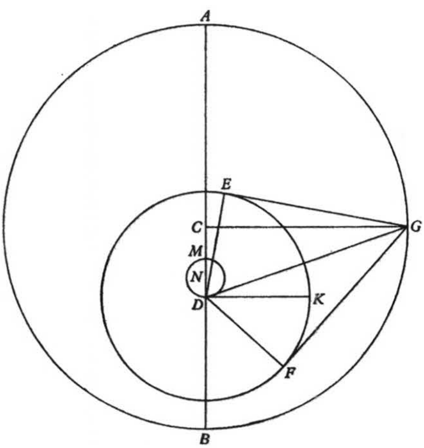
DAE, como ângulo ao centro de um círculo, subtende um arco de 44$^4/_5$°, [máxima elongação na terceira observação de Téon; V, 20], e *AED* é um ângulo recto. Por conseguinte, o triângulo *DAE* terá os seus ângulos dados e, portanto, os seus lados: *DE* igual a metade da corda correspondente ao dobro de *AED*, com 7 046 unidades, sendo *AD* igual a 10 000. Do mesmo modo, no triângulo rectângulo *BDF*, é dado o ângulo *DBF* e vale 47° 16′ e a corda *DF*, com 7 346 unidades, sendo *BD* igual a 10 000. Assim, sendo *DF* igual a *DE*, com 7 046 unidades; nas mesmas unidades *BD* mede 9 582. Donde se conclui que toda a linha *ACB* tem 19 582 [=*BD* + *AD* = 9 582 + + 10 000] unidades; *AC* igual a $^1/_2$ *ABC* tem 9 791 e *CD*, diferença entre *BC* e *BD*, 209. Portanto, com *AC* igual a 1 unidade, *DE* terá 43 $^1/_6$′ e *CD* 1 $^1/_4$′, aproximadamente. Com *AC* igual a 10 000 unidades, *DE* será igual a *DF* com 7 139, e *CD* com 208, aproximadamente. *Q. E. D.*

O DUPLO MOVIMENTO DE VÉNUS

Todavia, não há movimento simples uniforme de Vénus à volta de *D*, como foi provado pelas duas observações de Ptolomeu]*Almagesto*, X, 3]. Uma delas, fê-la ele no ano 18 do reinado de Adriano, a 2 do mês egípcio de Farmuti, mas segundo o cômputo romano, no ano 134 da era cristã, ao romper do dia 18 de Fevereiro. Nesse momento, com o movimento médio do Sol igual a $318\ {}^{5}/_{6}{}^{o}$, Vénus, aparecendo de manhã em $275\ {}^{1}/_{4}{}^{o}$, na eclíptica, tinha alcançado o seu limite mais afastado da sua elongação, $43^{o}\ 35'$ [$+\ 275^{o}\ 15' = 318^{o}\ 50'$].

Ptolomeu realizou a segunda observação, no ano 3 do reinado de Antonino a 4 do mesmo mês egípcio de Farmuti, correspondente, segundo o cômputo romano, ao ano 140 da era cristã, no crepúsculo do dia 19 de Fevereiro. Também então a posição média do Sol era igual a $318\ {}^{5}/_{6}{}^{o}$, e Vénus, [tinha] na sua maior elongação, à tarde, $48\ {}^{1}/_{3}{}^{o}$, e foi visto em $7\ {}^{1}/_{6}{}^{o}$ de longitude [$= 48^{o}\ 20' + 318^{o}\ 50' - 360^{o}$].

Depois desta informação, tomemos, na mesma órbita terrestre, o ponto *G*, onde a Terra está localizada, de modo que *AG* seja igual ao quadrante do círculo, a distância, na qual, em ambas as observações, o Sol foi visto, no seu movimento médio, no lado oposto [do círculo] a Oeste do apogeu do círculo excêntrico de Vénus $48{}^{1}/_{3}{}^{o} + 360^{o} - -90^{o} = 318^{o}\ 20' \cong 318\ {}^{5}/_{6}{}^{o}$]. Juntemos *GC* e construamos *DK* paralelo a *GC*. Tracemos *GE* e *GF*, tangente à órbita de Vénus. Juntemos *DE*, *DF* e *DG*. Na primeira observação, o ângulo *EGC* é igual à elongação matutina, ou seja $43^{o}\ 35'$. Na segunda observação, *CGF* é igual à elongação vespertina, isto é, 48 $^1/_3$°. A soma das duas é igual a todo o ângulo *EGF*, que vale 91 $^{11}/_{12}$°. Por conseguinte, *DGF* é igual a $^1/_2$ *EGF*, portanto 45° 57 $^1/_2$′; *CGD*, a diferença entre *CGF* e *DGF*, tem 2° 23′ aproximadamente. Mas *DCG* é um ângulo recto. Por conseguinte, no triângulo *CGD*, sendo os ângulos dados, também a razão entre os lados é dada, e *CD* tem 416 unidades de comprimento, sendo *CG* = 10 000. Contudo, a distância entre os centros foi atrás determinada em 208 unidades, no mesmo sistema [V, 21]. Ora ela tornou-se precisamente duas vezes maior. Assim, se *CD* foi bissectada no ponto *M*, *DM* terá igualmente 208 unidades, [que é] toda a variação entre a



aproximação e o afastamento. Se esta variação for outra vez bissectada em *N*, aparecer-nos-á no ponto médio e como normalizador deste movimento. Consequentemente, como nos outros três planetas, o movimento de Vénus é também composto de dois movimentos uniformes, quer se verifique num epiciclo excêntrico, como nesses casos [V, 4], ou de qualquer outra forma acima mencionada. Contudo este planeta difere alguma coisa dos outros no tipo e medida dos seus movimentos, como se demonstrará mais facilmente e com mais vantagem, com um círculo excêntrico a outro igualmente excêntrico, em minha opinião.

Assim, com centro *N* e o raio *DN*, suponhamos que se descreve um círculo pequeno em que o centro de Vénus rode e se desvie, de acordo com a regra seguinte. Sempre que a Terra toca o diâmetro *ACB*, que contém as ápsides superior e inferior do círculo excêntrico, o centro do círculo do planeta está na sua distância mínima [do centro da órbita da Terra], isto é, no ponto *M*. Mas quando a Terra está numa ápside média [como em *G*], o centro do círculo do planeta atinge o ponto *D*, sendo *CD* a distância máxima [do centro da órbita da Terra]. Daqui se deduz que, enquanto a Terra percorre a sua própria órbita uma vez, o centro do círculo do planeta gira duas vezes à volta do centro *N* e na mesma direcção que a Terra, isto é, na direcção Este. Admitindo esta hipótese para Vénus, os seus movimentos uniforme e aparente estão de acordo com qualquer situação, como se verá em breve. Tudo o que se provou até agora, em relação a Vénus, adapta-se também aos nossos tempos, se exceptuarmos o facto de a excentricidade ter diminuído cerca de $^1/_6$. Antigamente valia, ao todo, 416 unidades, mas agora vale 350, como no-lo atestam muitas observações.

ANÁLISE DO MOVIMENTO DE VÉNUS

Destas observações escolhemos duas posições, observadas com o maior rigor [*Almagesto*, X, 4].

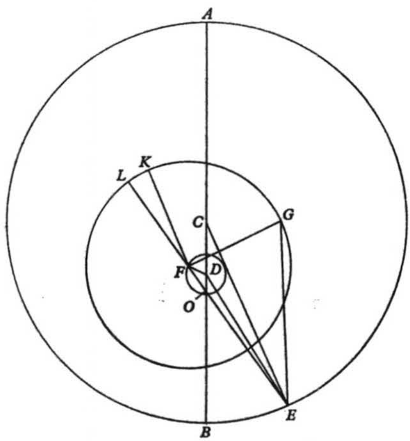
[Versão inicial:

A primeira foi feita em 29 do mês Tibi do ano 2 de Antonino Pio e deve-se a Ptolomeu. Numa linha recta entre a Lua e a primeira estrela cintilante, a mais afastada das três em direcção a Norte, na fronte do Escorpião, Ptolomeu viu Vénus 1 $^1/_2$ vezes mais afastado da Lua do que da estrela fixa. Sendo conhecida a posição da estrela fixa, [que tinha] nomeadamente, a longitude de 209° 40′ e a latitude de 1 $^1/_3$° Norte, era conveniente verificar o local observado da Lua com objectivo de determinar a posição de Vénus.

Desde o nascimento de Cristo até à data desta observação passaram-se 138 anos egípcios, 18 dias, 4 $^3/_4$ de hora depois da meia-noite em Alexandria, mas em Cracovia 3 $^3/_4$ de hora local, em tempo uniforme 3 h 41 m = 23 ds. No seu movimento uniforme médio o Sol apresentava-se na posição 255 $^1/_2$°; no seu movimento aparente, localizava-se nos 23° de Sagitário [= 263°]. Por isso, a distância uniforme que separa a Lua do Sol é igual a 319° 18′; isto significa uma anomalia igual a 87° 37′; e significa uma anomalia em latitude a partir do limite Norte, igual a 12° 19′. A partir desta informação a verdadeira localização da Lua foi calculada em 209° 4′ e 4° 58′ de latitude Norte. Mas a adição da precessão dos equinócios, então avaliada em 6° 41′, colocou a Lua em 5° 45′ de Escorpião [= 215° 45′ = 209° 4′ + 6° 41′]. Por meio de instrumentos foi vista a sua culminação em 2° de Virgem em Alexandria tendo nascido em 25° de Escorpião. Consequentemente segundo o meu cálculo a paralaxe da Lua era de 51′ em longitude e 16′ em latitude. Por esse motivo a localização da Lua, quanto observada em Alexandria e corrigida, surgiu como 209° 55′ [= 209° 4′ + 51′] e 4° 42′ de latitude Norte [= 4° 58′ − 16′]. De modo adequado, a posição de Vénus foi determinada como igual a 209° 46′, e em 2° 40′ de latitude Norte.

Suponhamos agora que a órbita da Terra é *AB*, com o seu centro em *C* e diâmetro *ACB* passando pelas duas ápsides. Seja *A* o ponto a partir do qual o corpo de Vénus é visto no seu apogeu = 48 $^1/_3$°, e *B* o ponto contrário = 228° $^1/_3$°. No diâmetro tem a distância *CD* = 312°, quando *AC* = 10 000. Com o ponto *D* como centro, e raio *DF* = 1/3 *CD*, isto é, 104, descreve-se um pequeno círculo.

Desde que a localização média do Sol é igual a 255 $^1/_2$, desse modo a distância da Terra até à ápside inferior [de Vénus] é igual a 27° 10′ [+ 228 $^1/_3$ = 255 $^1/_2$°]. Por isso seja o arco *BE* igual a 27° 10′. Juntemos *EC*, *ED*, e *DF*, de maneira que o ângulo *CDF* seja igual a 2 × *BCE*. Então, com *F* como centro, descreva-se a órbita de Vénus. Considere-se que a sua circunferência côncava é intersectada em *L* pelo prolongamento da linha



recta *EF*, intersectando em *O* o diâmetro *AB*. Para a mesma circunferência desenhe-se também *FK* paralelamente a *CE*. Coloquemos o planeta no ponto *G*. Juntemos *GE* e *GF*.

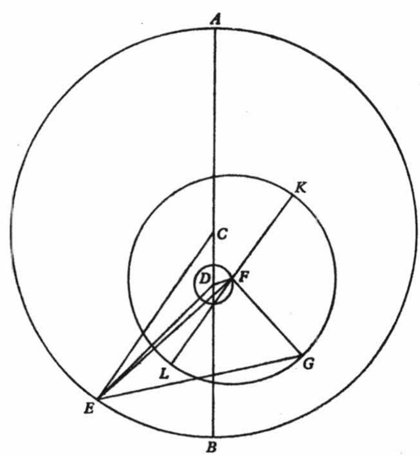
Agora, depois de feitos estes preparativos, as nossas tarefas são descobrir o arco *KG* = à distância do planeta ao apogeu médio da sua órbita = *K*, e o ângulo *CEO*. NO triângulo *CDE*, o ângulo *DCE* é igual a 27° 10′ e o lado *CD* = 312^p, quando *CE* = 10 000. Assim o lado restante *DE* = 9724, e o ângulo *CED* é igual a 50′. Semelhantemente no triângulo *DEF*, são dados dois lados: *DE* = 9 724^p, *DF* = 104, e *CE* é igual a 10 000. O ângulo [*EDF*] definido pelos lados *ED* e *DF*, é dado. Porque o ângulo *CDF* é dado e igual a 54° 20′ [= 2 × (*BCE* = 27° 10′)] e *FDB* é igual ao restante do semicírculo [do qual *CDF*, igual a 54° 20′, é subtraído] que tem como resultado 125° 40′. Desse modo, o conjunto do ângulo *FDE* = 153° 40′. Por isso, o lado restante *EF*, obtido nessas adições, resulta igual a 9 817, e o ângulo *DEF* igual a 16′.

Todo o CEF é igual a $1^\circ\ 6'$ [$= DEF + CED = 16' + 50'$]. Esta é a diferença entre o movimento real e o movimento aparente à volta do centro F, isto é, entre os ângulos BCE e EOB. Assim BOE é igual a 28° [$= 27^\circ\ 10' + 1^\circ\ 6'$] $16'$, [e a sua obtenção] era a nossa primeira tarefa.

Seguidamente o ângulo CEG que é igual a $45^\circ\ 44'$ = à distância do planeta à posição média do Sol [$= 255\ ^1/_2{}^\circ - 209^\circ\ 46'$]. Por isso, o conjunto de FEG [$= CEG + FEC = 45^\circ\ 44' + 1^\circ\ 6'$] que dá como resultado $46^\circ\ 50'$. Mas o valor de EF é dado e $= 9817^p$, quando AC é igual a 10 000, e FG é avaliado em 7193 nas mencionadas unidades. Por isso no triângulo EFG, a razão dos lados EF e FG é dada [9 817 : 7 193], bem como o ângulo FEG [$= 46^\circ\ 50'$]. O ângulo EFG também é dado, sendo igual a $84^\circ\ 19'$. Desse modo o ângulo exterior LFG é dado e igual a $131^\circ\ 6'$ = ao arco LKG = à distância do planeta ao apogeu aparente da sua órbita. Mas o ângulo $KLF = CEF$ = à distância entre a falsa e a verdadeira ápside, tem o valor de $1^\circ\ 6'$, como já foi mostrado. Quando este número é subtraído de $131^\circ\ 6'$, os restantes 130° correspondem ao arco KG [distância] do planeta até a ápside média. A parte restante do círculo, igual a 230°, corresponde à anomalia uniforme, medida desde o ponto K. Por esse motivo, temos para o ano 2 do Antonino Pio, que corresponde ao ano 138 da era cristã, em Cracóvia, no dia 16 de Dezembro, 3 horas 45 m depois da meia-noite, a anomalia uniforme de Vénus era igual a 230°, valor que procurávamos].

Uma daquelas observações feita por Timócares, no ano 13 do reinado de Ptolomeu Filadelfo, no ano 52 da era de Alexandre Magno, ao romper do dia 18 do mês egípcio de Mesori. Nesta observação verificou-se que Vénus tinha sido visto a ocultar a estrela mais a Ocidente, das quatro estrelas fixas da asa esquerda da Virgem. Na descrição desta constelação, é a sexta estrela, com a longitude de $151\ ^1/_2{}^\circ$, a latitude de $1\ ^1/_6{}^\circ$ Norte, e de 3.ª grandeza. Assim, o lugar de Vénus era evidente [$= 151\ ^1/_2{}^\circ$]. A posição média do Sol foi calculada em $194^\circ\ 23'$. Sendo assim, na figura descrita, permanecendo o ponto A em $48^\circ\ 20'$, o arco AE é igual a $146^\circ\ 3'$ [$= 194^\circ\ 23' - 48^\circ\ 20'$]. BE, a diferença entre 180° e AE, é igual a $33^\circ\ 57'$. Além disso, o ângulo CEG que é a distância entre o planeta e a posição média do Sol, valia $42^\circ\ 55' = 194^\circ\ 23' - 151\ ^1/_2{}^\circ$

A linha CD é igual a 312 unidades [= 208 + 104], sendo CE = 10 000. O ângulo BCE [= arco BE] é igual a 33° 57′. Assim no triângulo CDE, os ângulos restantes terão o primeiro, CED = 1° 1′, e o segundo CDE = 145° 2′, enquanto o terceiro lado, DE, terá 9 743 unidades. Mas o ângulo CDF é igual a 2 vezes BCE [= 2 × 33° 57′ = = 67° 54′. Se subtrairmos CDF do semicírculo, o resto será BDF com 112° 6′. BDE, sendo um ângulo externo do triângulo CDE, é igual a 34° 58′ [= CDE + (DCE = = 1° 1′ + 33° 57′]. Assim, todo o ângulo EDF mede 147° 4′ [= BDE + BDF = 34° 58 + 118° 6′]. DF é dado com 104 unidades, sendo DE igual a 9 743 unidades. Além

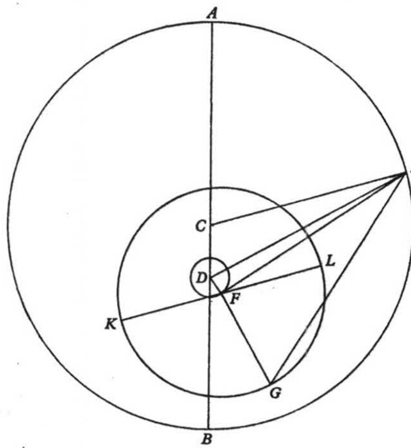


disso, no triângulo DEF, o ângulo DEF é igual a 20′. Todo o ângulo CEF [= CED + DEF = 1° 1′ + 20′) mede 1° 21′ e o lado EF tem 9 831 unidades. Mas todo o ângulo CEG é já conhecido e mede 42° 53′. Por conseguinte FEG, a diferença entre CEG e CEF, é igual a 41° 32′. FG, o raio da órbita de Vénus, tem 7 193 unidades, sendo EF igual a 9 831 unidades. No triângulo EFG, portanto, tendo em conta a razão dada dos lados e o ângulo FEG, são também dados os ângulos restantes, e *EFG* tem 72º 5´. Se juntarmos este número a um semicírculo, a soma será de 252º 5´, igual ao arco *KLG*, [a partir] da ápside superior da órbita de Vénus. Assim estabelecemos de novo que, ao romper do dia 18, do mês de Mesori, no ano 13 do reinado de Ptolomeu Filadelfo, a anomalia paraláctica de Vénus era de 252º 5′.

Nós próprios observámos uma outra posição de Vénus, à 1 hora depois do pôr do Sol, a 12 de Março do ano 1529 e da era cristã, quando começava a hora 8.ª depois do meio-dia.

Vimos que a parte não iluminada da Lua, entre as suas duas pontas começava a ocultar Vénus. Esta ocultação durou até o fim daquela hora ou um pouco mais, quando se notou que o planeta emergia a Oeste, no outro lado da Lua, no meio da curvatura entre as pontas. Por conseguinte, por volta da meia-hora, havia claramente uma conjunção central da Lua e de Vénus, um espectáculo que presenciámos em Frombork. Vénus estava ainda a aumentar a sua elongação vespertina e não tinha alcançado a tangente à sua órbita. Desde o início da era cristã, há 1529 anos egípcios, 87 dias, mais $7^1/_2$ horas, pelo tempo aparente, mas 7 horas e 34 minutos, pelo tempo uniforme; a posição média do Sol no seu movimento simples, era igual a 332º 11´; a precessão dos equinócios, 27º 24´; o movimento uniforme da Lua em relação ao Sol, 33º 57´; a sua anomalia uniforme 205º 1´; e o seu movimento em latitude, 71º 59´. Nesta base, a posição verdadeira da Lua foi calculada em 10º, mas em relação ao equinócio, 7º 24´ de Touro [= 37º 24´ 10º + 27º 24´], com a latitude Norte de 1º 13′. Dado que os 15º de Balança estavam a nascer, a paralaxe da Lua em longitude era igual a 48´, e em latitude, 32′. Portanto, a sua posição aparente era em 6º 36´ [= 7º 24´ − 48´] em Touro. Mas a sua longitude, na esfera das estrelas fixas, eram 9º 12′ [= 10º − 48´], com a latitude Norte de 41´ [= 1º 13´ −

– 32′]. Era a mesma a posição aparente de Vénus, à tarde, quando estava a 37° 1′ da posição média do Sol [332° 11′ + 37° 1′ = 369° 12′ = 9° 12′], com a distância entre a Terra e a ápside superior de Vénus igual a 76° 9′ a Oeste [+ 333° 11′ = 408° 20′ – 360° = 48° 20′].



Reproduzamos agora a figura, com a mesma disposição da construção anterior, excepto que o arco *EA* ou o ângulo *ECA* é [agora] igual a 76° 9′. *CDF* é igual a 2 vezes *ECA*, e tem 152° 18′. A excentricidade de *CD*, como é hoje estabelecido, corresponde a 246 unidades, e *DF* a 104, sendo *CE* igual a 10 000. Por conseguinte, no triângulo *CDE*, temos o ângulo *DCE*, diferença entre 180° e *ECA*, com 103° 51′, definido pelos [dois] lados dados. Assim, mostrar-se-á que o ângulo *CED* tem 1° 15′, o terceiro lado *DE*, 10 056 unidades, e o ângulo *CDE*, 74° 54′, diferença entre 180° e a soma de *DCE* com *CED*. Mas *CDF* é igual a 2 vezes *ACE*, [portanto] 152° 18′. De *CDF*, subtraiamos o ângulo *CDE* e o resto *EDF* vale 77° 24′, diferença entre 152° 18′ e 74° 54′. Assim, e mais uma vez no triângulo *DEF*, os dois lados *DF* com 104 unidades e *DE* com 10 056, definem o ângulo dado *EDF* [= 77° 24′].

O ângulo *DEF* também é dado e tem 35′, assim como o último lado *EF*, com 10 034 unidades. Portanto o ângulo *CEF* [= *CED* + *DEF* = 1° 15′ + 35′] vale 1° 50′. Além disso, todo o ângulo *CEG*, que tem 37° 1′, é a distância aparente entre o planeta e a posição média do Sol. Subtraindo *CEF* de *CEG*, o resto *FEG* é igual a 35° 11′. De acordo com isto, no triângulo *EFG* com o ângulo *E* dado, são igualmente dados dois lados: *EF* igual a 10 034 unidades e *FG* com 7 193. Assim os outros ângulos também serão determinados: *EGF* com 53 $^1/_2$°, e *EFG* com 91° 19′, [que é] a distância entre o planeta e o perigeu verdadeiro da sua órbita.

Mas o diâmetro *KFL* é paralelo a *CE* de modo que *K* é o apogeu do movimento uniforme do planeta e *L* o perigeu. Subtraiamos de *EFG* [= 91° 19′] o ângulo *EFL*, igual a *CEF* [= 1° 50′]. O resto é o ângulo *LFG*, igual ao arco *LG*, com 89° 29′. *KG*, a diferença entre o semicírculo e *LG*, tem 90° 31′, a anomalia paraláctica do planeta, medida desde a ápside superior uniforme da sua órbita. Era isto o que pretendíamos, em relação a esta hora da nossa observação.

Na observação de Timócares, contudo, o número correspondente é 252° 5′. No período intermédio, pois, além das 1115 revoluções completas, há 198° 26′ [= (90° 31′ + 360° = 450°) − 252° 5′]. Desde o dia 18 do mês de Mesori, no 13° ano do reinado de Ptolomeu Filadelfo até as 7$^1/_2$ horas da tarde de 12 de Março de 1529, da era Cristã, há 1800 anos egípcios, 236 dias e cerca de 40 minutos do dia. Multipliquemos o movimento em 1115 revoluções mais 198° 26′ por 365 dias. Dividamos o produto por 1800 anos, 236 dias e 40 minutos de um dia. O resultado será o movimento anual, 3 vezes 60°, mais 45° 1′ 45″ 3‴ 40⁗. Dividindo isto por 365 dias, temos o movimento diário, 36′ 59″ 28‴. Esta foi a base em que se construiu a Tabela atrás apresentada logo em seguida a V, 1.

[Primitiva versão do final do parágrafo V, 23:

Na observação prévia feita por Ptolomeu, todavia, o valor era de 230°. Nesse intervalo, por tal motivo, para completar os movimentos é necessário juntar 220° 31′ = [(90° 31′ + 360° = 450° 31′) − 230°). Do ano 2 de Antonino Pio, 8 $^1/_4$ h antes da noite, hora de Cracóvia, no dia 20 do mês Tibi até ao dia 12 de Março, 7 $^1/_2$ h depois do meio-dia até 1529 da era cristã há 1391 anos egípcios, 69 dias, 39 minutos do dia, 23 segundos do dia. Neste momentc são igualmente contados 220° 31′ para, por adição completar os movimentos, que são 859 segundo a Tábua de movimentos médios [logo depois de V, 1], que assim estava correcto. Entretanto, as posições dos perigos excêntricos continuaram inalteráveis em 48 $^1/_3$° 228° 20′.]

AS POSIÇÕES DE ANOMALIA DE VÉNUS

[Versão inicial:
Assim as posições da anomalia paraláctica de Vénus são facilmente estabelecidas. Porque desde o nascimento de Cristo até à observação de Ptolomeu passaram-se 138 anos egípcios, 18 dias, 9 $^1/_2$ minutos do dia. O movimento correspondente a este intervalo é igual a 105° 25′. Quando se subtraia este valor do resultado de 230° da observação de Ptolomeu, o resto é a anomalia de Vénus de 124° 35′ = 105° 25′] à meia-noite antes do 1.° de Janeiro do ano I da era cristã. Então, de acordo com a contagem do movimento e do tempo, que tem sido muitas vezes repetida, as restantes posições são: para a 1.ª Olimpíada, 318° 9′: para Alexandre, 79° 14′; para César 70° 48′].

Desde a primeira Olimpíada até o 13.° ano do reinado de Ptolomeu Filadelfo, ao romper do dia 18 do mês de Mesori, decorreram 503 anos egípcios, 228 dias e 40 minutos de um dia. O movimento é então calculado em 290° 39′. Se subtrairmos este número de 252° 5′ [612° 5′ – – 290° 39′], pondo de lado uma revolução, o resto são 321° 26′, a posição da 1.ª Olimpíada. A partir desta posição, as posições restantes são obtidas, calculando o movimento e o tempo, como tem sido muitas vezes mencionado: para a era de Alexandre 81° 52′, para a de César 70° 26′, para a era Cristã, 126° 45′.

MERCÚRIO

Acabámos de mostrar como [o planeta] Vénus está ligado ao movimento da Terra e por que razão nos seus círculos está encoberto o seu movimento uniforme. Falta agora Mercúrio que, sem dúvida, se ajustará aos mesmos pressupostos, embora faça mais revoluções do que Vénus ou qualquer outro dos planetas atrás discutidos. Como é evidente, a partir da experiência dos observadores antigos, a elongação mínima de Mercúrio em relação ao Sol tem lugar no signo da Balança, e a maior, como é natural, no signo oposto. Contudo, a elongação máxima não ocorreu nesta posição mas certamente noutras, nos dois lados de Áries, designadamente em Gémeos e em Aquário, especialmente no tempo do imperador Antonino, segundo a conclusão de Ptolomeu [*Almagesto,* IX, 8]. Este desvio não se dá em nenhum outro planeta.

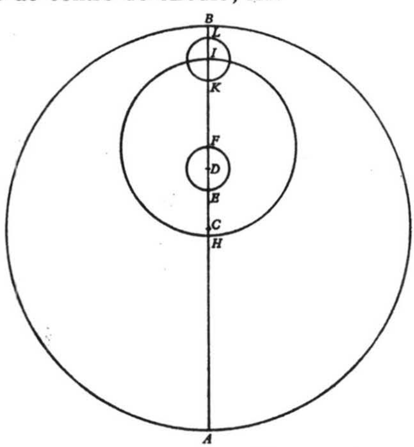
Os antigos astrónomos pensavam que a causa deste facto era a imobilidade da Terra e o movimento de Mercúrio, no seu grande epiciclo, movido por um círculo excêntrico. Eles verificaram que um único círculo excêntrico simples não podia explicar estes fenómenos, mesmo quando admitiam que o círculo excêntrico não se movia à volta do seu próprio centro mas à volta de um centro diferente. Foram obrigados posteriormente a aceitar que o mesmo círculo excêntrico que movia o epiciclo era movido por outro círculo mais pequeno, como aceitavam em relação ao círculo excêntrico da Lua [IV, 1]. Assim, havia três centros: um para o círculo excêntrico que movia o epiciclo, outro para o círculo pequeno e um terceiro para aquele círculo a que os mais recentes chamam o «equante». Passando por cima dos dois centros, os antigos concordavam em que o epiciclo se movia uniformemente, apenas à volta do centro do «equante». Este procedimento estava em conflito enorme com o centro verdadeiro do movimento do epiciclo, as suas distâncias relativas, e os centros anteriores dos dois outros círculos.

Os antigos estavam convencidos de que os fenómenos deste planeta não podiam ser explicados por qualquer outro meio diferente do exposto por Ptolomeu com desenvolvimento considerável [*Almagesto* IX, 6]. Contudo, para que também este último planeta possa ser salvo das afrontas e pretensões dos seus detractores, e para que o seu movimento uniforme, não menos do que os dos outros planetas atrás mencionados, seja posto em evidência relativamente ao movimento da Terra, vamos igualmente atribuir-lhe, no seu círculo excêntrico, um círculo excêntrico em vez do epiciclo aceite na antiguidade. O esquema é contudo diferente do de Vénus [V, 22], e além disso, no círculo excêntrico exterior move-se um epiciclo. O planeta move-se não em redor da circunferência do epiciclo, mas para cima e para baixo, no seu diâmetro. Este movimento [em linha recta] pode ser ainda o resultado dos movimentos circulares uniformes, como se mostrou atrás em relação com a precessão dos equinócios [III, 47]. Não há nada de surpreendente nisto, uma vez que também Proclo, nos Seus *Comentários aos Elementos de Euclides,* declara que uma linha recta pode ser produzida por movimentos múltiplos. As aparências de Mercúrio serão demonstradas por todas estas conclusões.

Ora, para esclarecer tal hipótese, seja *AB* a órbita da Terra, *C* o seu centro, e *ACB* o seu diâmetro. Tomando em *ACB,* [o ponto] *D,* entre os pontos *B* e *C,* como centro, e tendo um terço de *CD* por raio, descrevamos um pequeno círculo, *CF,* de modo que a maior distância de *C* seja em *F,* e em *E* a mínima. Também com o centro em *F,* descreva-se *HI* como [excêntrico exterior] de Mercúrio, e seja ela

HI. Depois, tomando *I*, a ápside superior, como centro, juntemos-lhe outro epiciclo, atravessado pelo planeta. *HI*, um círculo excêntrico noutro círculo excêntrico, funciona como um epiciclo num círculo excêntrico.

Depois de traçar assim a figura, todos estes pontos estarão situados, por ordem, na linha recta *AHCEDFKILB*. Mas, entretanto, coloquemos o planeta em *K*, isto é, à mínima distância *KF* de *F*, o centro do círculo que move o epiciclo. Seja este *K* o ínicio das revoluções de Mercúrio. Imaginemos que o centro *F* executa duas revoluções, enquanto a Terra executa uma, e na mesma direcção, isto é, para Este. A mesma velocidade aplica-se também ao planeta em *KL*, mas para cima e para baixo, sobre o diâmetro e em relação ao centro do círculo, *HI*.



Daqui resulta que quando a Terra está em *A* ou *B*, o centro do excêntrico exterior de Mercúrio está em *F* que é a sua distância máxima ao ponto *C*. Mas quando a Terra está a meio caminho [entre *A* e *B*] à distância de um quadrante deles, o centro do círculo excêntrico de Mercúrio está em *E*, a sua posição mais próxima de *C*. De acordo com estes factos, o esquema é oposto ao de Vénus [V, 22]. Além disso, como resultado desta regra, enquanto Mercúrio atravessa o diâmetro do epiciclo *KL*, ocupa a posição mais próxima do centro do círculo que move o epiciclo, isto é, está em *K*, quando a Terra atravessa o diâmetro *AB*. Quando a Terra, nos dois lados, se encontra em posições a meio caminho [entre *A* e *B*] o planeta chega a *L*, sua distância máxima [ao centro do círculo que move o epiciclo]. Deste modo, ocorrem duas revoluções duplas proporcionais ao período anual da Terra, iguais entre si, a do centro do círculo excêntrico exterior, na circunferência do círculo pequeno, *EF*, e a do planeta no diâmetro, *LK*.

Mas, entretanto, o epiciclo ou linha, *FI*, move-se uniformemente, com o seu próprio movimento, à volta do círculo *HI* e do seu centro, em cerca de 88 dias, completando uma revolução independentemente da esfera das estrelas fixas. Contudo, naquilo a que chamamos «o movimento em paralaxe», que excede o movimento da Terra, o epiciclo passa além da Terra em 116 dias, como se pode deduzir mais rigorosamente da «Tabela dos Movimentos Médios» [em seguida a V, 1]. Daqui se segue que, no seu próprio movimento, Mercúrio não descreve sempre a mesma circunferência circular. Pelo contrário, em proporção à sua distância do centro do seu deferente, descreve um circuito excessivamente variável, com a grandeza mínima em *K*, o maior em *L*, e o médio em *I*. Quase a mesma variação se pode notar no epiciclo do epiciclo lunar [IV, 3]. Mas o que a Lua faz durante o percurso na circunferência, Mercúrio realiza-o no diâmetro, num movimento recíproco. Contudo, este compõe-se de movimentos uniformes. Como isto é feito, nós o explicámos atrás, quando tratámos da precessão dos equinócios [III, 4]. No entanto, acrescentaremos algumas outras observações, acerca deste assunto, mais tarde, ao tratar das latitudes [V, 27]. A hipótese que formulámos é suficiente para todos os fenómenos observados de Mercúrio, como ficará claro revendo as observações feitas por Ptolomeu e outros.

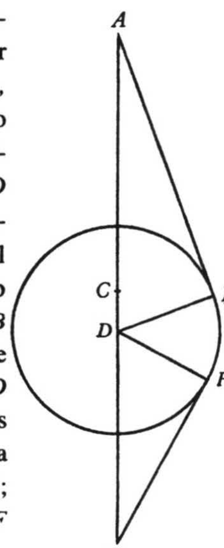
A POSIÇÃO DAS ÁPSIDES SUPERIOR E INFERIOR DE MERCÚRIO

Ptolomeu observou Mercúrio no primeiro ano do reinado do imperador Antonino depois do pôr do Sol do dia 20 do mês de Epifi, quando o planeta se encontrava na sua máxima distância vespertina da posição média do Sol [*Almagesto*, IX, 7]. Até este tempo, desde o início da era cristã decorreram 138 anos, 188 dias e 42 $^1/_2$ minutos do dia, pelo tempo de Cracóvia. Por conseguinte, a posição média do Sol, segundo o nosso cálculo, era em 63° 50′. O planeta foi observado com o instrumento em 7° (como diz Ptolomeu), em Câncer [= 97°]. Mas, subtraindo precessão dos equinócios, então de 6° 40′, tornava-se claro que a posição de Mercúrio era em 90° 20′ [= 97° – 6° 40′], em relação ao princípio de Áries, na esfera das estrelas fixas, e a sua máxima elongação da posição média do Sol era de 26 $^1/_2$° [= 90° 20′ – 63° 50′].

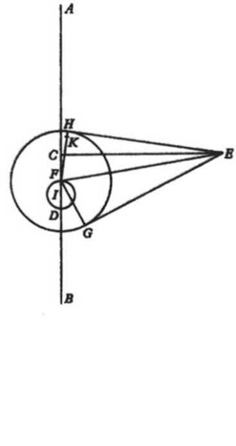
Ptolomeu fez uma segunda observação, no ano 4 do reinado do imperador Antonino, a 19 do mês de Famenot, ao romper do dia, 140 anos depois do início da era cristã, mais 67 dias e 12 minutos de um dia. A posição média do Sol era de 303° 19′, enquanto Mercúrio, segundo a observação feita com o instrumento, aparecia em 13 $^1/_2$° de Capricórnio [= 283 $^1/_2$°]; mas em relação ao início de Áries, entre as estrelas fixas, era cerca de 276° 49′ [≅ 283 $^1/_2$° – 6° 40′]. Portanto a sua máxima elongação, de manhã, era igualmente de 26$^1/_2$° [= 303° 19′ – – 276° 49′]. Logo, visto que os limites das suas elongações em relação à posição média do Sol são iguais em ambos os lados, as ápsides de Mercúrio devem estar a meio caminho, entre as duas posições, isto é, entre 276° 49′ e 90° 20′: 3° 34′ e, diametralmente oposto, 183° 34′ [276° 49′ − − 90° 20′ = 186° 29′; 186° 29′: 2 = 93° 15′; 276° 49′ − − 93° 15′ = 183° 34′ − 180° = 3° 34′]. Estas deviam ser as posições em que estavam as ápsides superior e inferior de Mercúrio, e são diferenciadas por duas observações, como no caso de Vénus. A primeira delas foi feita [por Ptolomeu: *Almagesto*, IX, 8] no ano 19 do reinado de Adriano, ao romper do dia 15 do mês de Atir, quando a posição média do Sol estava em 182° 38′. A elongação matutina máxima de Mercúrio em relação ao Sol era de 19° 3′, dado que a posição aparente de Mercúrio era 163° 35° [+ 19° 3′ = = 182° 38′]. No mesmo ano 19 do reinado de Adriano, 135 anos depois do começo da era cristã, verificou-se, com o auxílio do instrumento, que Mercúrio estava em 27° 43′, na esfera das estrelas fixas, com o Sol, no seu movimento médio, em 4° 28′. Mais uma vez [como no caso de Vénus, V, 20], a elongação máxima vespertina do planeta era 23° 15′, maior do que a anterior [e matutina = 19° 3′]. Assim, o apogeu de Mercúrio não se encontrava evidentemente em qualquer outra parte, senão em 183 $^1/_3$°, nesse momento. *Q. E. D.*

VALOR DA EXCENTRICIDADE DE MERCÚRIO E A RAZÃO ENTRE OS SEUS CÍRCULOS

Servindo-nos destas observações, encontram-se simultaneamente a distância entre os centros e as grandezas dos círculos. Com efeito, seja *AB* uma linha recta que passe pelas ápsides de Mercúrio, *A* a ápside superior, *B* a inferior. Seja *AB* também o diâmetro do círculo máximo da Terra, com o centro em *C*. Descrevamos a órbita do planeta tendo *D* como centro. Tracemos depois as linhas *AE* e *BF*, tangentes à órbita. Juntemos *DE* e *DF*. Na primeira das duas observações atrás mencionadas, viu-se que a máxima elongação matutina era 19° 3′. Mas na outra observação, observou-se como a máxima elongação vespertina, 23 $^1/_4$°. Por conseguinte, nos dois triângulos rectângulos, *AED* e *BFD*, sendo os ângulos dados, as razões entre os lados serão também conhecidas. Assim, com *AD* igual a 100 000 unidades, *ED*, o raio da órbita, tem 32 639. Contudo, com *BD* igual a 100 000 unidades, nesse mesmo sistema de unidades, *FD* tem 39 474. Contudo *FD*, [raio da órbita] é igual a *ED* e tem 32 639 unidades, sendo *AD* = 100 000. E, no mesmo sistema de unidades, *BD*, a diferença entre *AB* e *AD*, tem 82 685 unidades. Assim, *AC*, metade de (*AD* + *DB*) tem 91 342 unidades, e *CD*, diferença entre *AD* e *AC*, é igual a 8 658 unidades, a distância entre os centros [das órbitas da Terra e de Mercúrio]. Com *AC* igual a 1 unidade ou 60′, o raio da órbita de Mercúrio tem 21° 26′; e *CD* = 5′ 41″. Com *AC* igual a 100 000 unidades, *DF* tem 35 733 unidades e *CD* = 9 479. Q. E. D.



É de notar que estes valores não permanecem em toda a parte os mesmos e diferem muitíssimo dos que ocorrem próximo das ápsides, como se mostra pelas elongações aparentes, matutinas e vespertinas, observadas nestas posições, como referem Téon e Ptolomeu [*Almagesto*, IX, 9]. Téon observou a máxima elongação vespertina, depois do pôr do Sol, a 18 do mês de Mesori, no ano 14 do reinado de Adriano, 129 anos, 216 dias e 45 minutos do dia, depois do nascimento de Cristo, com a posição média do Sol, em $93\ {}^1/_2{}^\circ$, isto é, próximo da ápside média de Mercúrio [$\cong {}^1/_2\ (183^\circ\ 34' - 3^\circ\ 34'); = 90^\circ + 3^\circ\ 34'$]. Com o auxílio do instrumento, o planeta foi visto em $3\,{}^1/_{10}{}^\circ$ a Oeste do Régulus, na Constelação do Leão. Por conseguinte, a sua posição era $119\ {}^3/_4{}^\circ$ [$\cong 3^\circ\ 50' + 115^\circ\ 50'$], e a sua máxima elongação vespertina $26\ {}^1/_4{}^\circ$ [$= 119\ {}^3/_4{}^\circ - 93\,{}^1/_2{}^\circ$]. A outra elongação máxima foi referida por Ptolomeu como por ele próprio observada ao romper do dia 21 do mês de Mesori, no ano 2 do reinado do imperador Antonino, 138 anos, 219 dias e 12 minutos de 1 dia, antes do nascimento de Cristo. Do mesmo modo, a posição média do Sol era de $93^\circ\ 39'$, a partir da qual ele verificou que a elongação máxima matutina de Mercúrio era [igual a] $20\ {}^1/_4{}^\circ$, pois foi visto em $73\,{}^2/_5{}^\circ$, na esfera das estrelas fixas $73^\circ\ 24' + 20^\circ\ 15' = 93^\circ\ 59'$. Desenhemos agora *ACDB*, diâmetro do círculo máximo da Terra. Como anteriormente, façamos com que passe pelas ápsides de Mercúrio. Levantemos no ponto *C*, a perpendicular *CE* como linha do movimento médio do Sol. Entre *C* e *D* tomemos o ponto *F*. À volta dele descrevamos a órbita de Mercúrio, à qual as linhas *EH* e *EG* são tangentes. Juntemos *FG*, *FH* e *EF*.



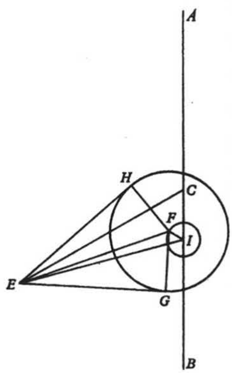
O problema é mais uma vez encontrar o ponto *F* e a razão existente entre o raio *FG* e *AC*. O ângulo *CEG* é dado com $26\ {}^1/_4{}^\circ$, e *CEH* com $20\,{}^1/_4{}^\circ$. Por conseguinte, todo o ângulo *HEG* [$= CEH + CEG = 20^\circ\ 15' + 26^\circ\ 15'$] mede $46\ {}^1/_2{}^\circ$. *HEF*, igual a metade de *HEG*, tem $23\ {}^1/_4{}^\circ$ e

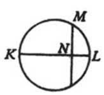
CEF, diferença entre *HEF* e *CEH*, mede 3°. Portanto, no triângulo rectângulo *CEF*, o lado *CF* é dado com 524 [unidades], e a hipotenusa *FE*, com 10 014 unidades, sendo *CE* igual a *AC*, 10 000 unidades. Demonstrou-se atrás que todo o *CD* tinha 948 unidades quando a Terra se encontra na âpside superior ou inferior do planeta. *DF*, o diâmetro do círculo pequeno atravessado pelo centro da órbita de Mercúrio é igual à diferença, para mais, entre *CD* e *CF*, 424 unidades; e o raio *IF*, igual a 212 unidades. Assim, toda a linha *CFI* tem cerca de $736^1/_2$ unidades. De modo semelhante, no triângulo *HEF*, no qual *H* é um ângulo recto, também é dado *HEF*, com $23\ ^1/_4$°. Assim, *FH* mede evidentemente 3 947 unidades, sendo *EF* = 10 000. Mas como *EF* é igual a 10 014 unidades, sendo *CE* = 10 000, *FH* tem 3 953. Contudo *FH*, como se mostrou atrás [V, 27], tem 3 573 unidades. Seja *FK* igual a 3 573 unidades. Então *HK*, diferença entre *FH* e *FK*, é igual a 380 unidades, a variação máxima na distância do planeta a *F*, o centro da órbita, que ocorre desde [quando o planeta se move] das âpsides superior ou inferior para as âpsides médias. Por causa desta distância e da sua variação, o planeta descreverá à volta de *F*, o centro da sua órbita, círculos desiguais que dependem das várias distâncias, as mais pequenas e as maiores, respectivamente, 3 573 unidades e 3 953, e a média entre elas deve ser 3 763 unidades.

POR QUE RAZÃO AS ELONGAÇÕES DE MERCÚRIO SÃO MAIORES JUNTO DO LADO DE UM HEXÁGONO [= 60º A CONTAR DO PERIGEU] DO QUE AS QUE OCORREM NO PERIGEU

Portanto, será menos surpreendente que Mercúrio tenha elongações maiores junto dos pontos em que os lados de um hexágono tocam o círculo circunscrito do que no perigeu. Estas elongações [a 60º do perigeu] excedem mesmo aquelas que já encontrámos [V, 27]. Por isso os antigos julgavam que a órbita de Mercúrio se aproxima da Terra duas vezes durante uma revolução desta.

Construamos, pois, o ângulo *BCE*, com 60º. Assim, o ângulo *BIF* terá 120º, visto que admitimos que *F* faz duas revoluções enquanto a Terra executa uma. *E* designa a Terra. Juntemos então *EF* e *EI*. Demonstrou-se [V, 27] que *CI* tem 736 $^1/_2$ unidades, sendo *EC* = 10 000, e o ângulo *ECI* dado com 60º. Consequentemente, no triângulo *ECI* o lado *EI* terá 9 655 unidades e o ângulo *CEI* cerca de 3º 47′, sendo este ângulo igual à diferença, para menos, entre *CIE* e *ACE*. Mas *ACE* [suplemento de *BCE* = 60º, por construção] é dado e tem 120º. Portanto, *CIE* terá 116º 13′ [= *ACE* − *CEL* = 120º − 3º 47′]. Mas também o ângulo *FIB* mede 120º, pois, de acordo com a construção, é o dobro de *ECI* [= 60º]. *CIF*, que completa o semicírculo, mede 60º. O ângulo *EIF*, diferença entre *CIE* e *CIF*, é igual a 56º 13′. Ora, já se demonstrou [V, 27] que *IF* tem





212 unidades, sendo *EI* igual a 9 655 [V, 28]. E estes lados definem o ângulo dado *EIF* [= 56° 13′]. Disto se deduz que o ângulo *FEI* mede 1° 4′, e o ângulo *CEF*, a diferença entre *CEI* e *FEI*, é igual a 2° 4349, que é o resto obtido quando se subtrai a posição média do Sol, do centro da órbita do planeta. O último dado, *EF*, tem 9 450 unidades.

Descrevamos, agora, a órbita de Mercúrio, *GH*, à volta do centro *F*. De *E*, tracemos *EG* e *EH*, tangentes à órbita. Juntemos *FG* e *GH*.

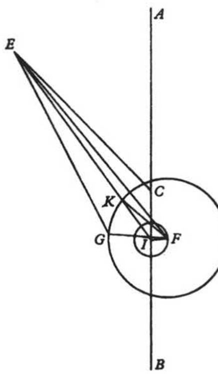
Devemos primeiramente encontrar o valor do raio *FG* ou *FH*, nesta situação. Procederemos do modo seguinte. Tomemos um círculo cujo diâmetro, *KL*, seja igual a 380 unidades [= variação máxima; V, 27], sendo *AC* = 10 000. Neste diâmetro, ou o seu equivalente, imaginemos o planeta a aproximar-se ou a afastar-se, o centro *F* na linha recta *FG* ou *FH*, na forma acima apresentada, ao tratar da precessão dos equinócios [III, 4]. De acordo com a hipótese de *BCE* definir um arco de 60°, tomemos *KM* igual a 120°, no mesmo sistema de graus. Tracemos *MN* perpendicular a *KL*. *MN*, igual a metade da corda subtendida pelo dobro de *KM* ou de *ML*, definirá *LN*, igual a $^1/_4$ do diâmetro, 95 unidades, como se demonstra na 12.ª proposição do Livro XIII dos *Elementos* de Euclides, combinada com a 15.ª proposição do Livro V. Então, *KN*, os $^3/_4$ restantes do diâmetro, vale 285 unidades. Juntando isto à distância mínima do planeta obtém-se a linha desejada, *FG* ou *FH*, neste caso 3 858 unidades, com *AC* tendo também 10 000, assim como *EF* com 9 540, segundo [acima] se mostrou. Por conseguinte, no triângulo rectângulo *FEG* ou *FEH*, são dados dois lados. Assim, o ângulo *FEG* ou *FEH* será igualmente dado. Com *EF* igual a 10 000 unidades, *FG* ou *FH* têm 4 044, a corda correspondente a um ângulo de 23° 52 $^1/_2$′. Assim, todo o ângulo *GEH* = *FEG* + + *FEH* = 2 × 23° 52 $^1/_2$′ mede 47° 45′. Mas, na ápside inferior, só se observaram 46 $^1/_2$°; e na [ápside] média também 461 $^1/_2$° [V, 27]. Portanto, aqui, o ângulo aumentou em 1° 14′ [≅ 47° 45 − 46° 30′], em relação àquelas duas situações. A razão não é que a órbita do planeta esteja mais próxima da Terra do que no seu perigeu, mas que, aqui, o planeta descreve um círculo maior do que ali. Tudo isto está de acordo com as observações passadas e presentes e é produzido pelos movimentos uniformes.

Capítulo XXIX

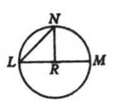
ANÁLISE DO MOVIMENTO MÉDIO DE MERCÚRIO

Entre as observações mais antigas verificou-se [*Almagesto,* IX, 10] que no ano 21 do reinado de Ptolomeu Filadelfo, ao romper do dia 19 de Tot, o segundo mês do calendário egípcio, Mercúrio apareceu a 2 diâmetros lunares a Este de uma linha recta que passava pela primeira e segunda estrelas da fronte do Escorpião, e a 1 diâmetro lunar a Norte da primeira estrela. A posição da primeira estrela é conhecida, $209^{\circ}\ 40'$ em longitude, $1\,{}^{1}/_{3}{}^{\circ}$ em latitude Norte; a da segunda estrela, 209° em longitude, $1^{\circ} + {}^{1}/_{2}{}^{\circ} + {}^{1}/_{3}{}^{\circ}$, isto é, $1\,{}^{5}/_{6}{}^{\circ}$, de latitude Sul. Daqui se deduziu que a posição de Mercúrio era 210° [$= 209^{\circ}\ 40' + (2 \times {}^{1}/_{2}{}^{\circ})$] de longitude e quase $1\,{}^{5}/_{6}{}^{\circ}$ [$= 1\,{}^{1}/_{3}{}^{\circ} + {}^{1}/_{2}{}^{\circ}$] de latitude Norte. Desde a morte de Alexandre Magno, havia 59 anos, 17 dias e 45 minutos do dia. A posição média do Sol, segundo o nosso cálculo, era de $288^{\circ}\ 8'$; e a distância do planeta em relação a ele era de $17^{\circ}\ 28'$, de manhã. Esta estava ainda a aumentar, como se notou nos quatro dias seguintes, de modo que se podia estar certo de não ter então o planeta atingido a sua elongação matinal máxima, nem o ponto de contacto, na sua órbita, mas se encontrava ainda percorrendo o arco inferior, mais próximo da Terra. Como a ápside superior estava em $183^{\circ}\ 20'$ [IV, 26] a sua distância em relação à posição média do Sol era de $44^{\circ}\ 48'$ [$= 228^{\circ}\ 8' - 183^{\circ}\ 20'$].

Seja então, mais uma vez, *AB* o diâmetro da órbita da Terra. Do seu centro *C* [do círculo maior], tracemos a linha do movimento médio do Sol, *CE,* de modo que o ângulo *ACE* seja igual a $44^{\circ}\ 48'$. Com o centro em *I,* descrevamos um círculo menor, no qual se move o centro do círculo excêntrico, *F*. Tomemos o ângulo, *BIF*, por hipótese com o dobro de *ACE*, 89° 36′. Juntemos *EF* e *EI*.



Dado que no triângulo *ECI* são dados dois lados, isto é, *CI* com $736\,^1/_2$ unidades [IV, 27] e *CE* = 10 000, definindo o ângulo dado, *ECI*, com 135° 12′, que é suplementar de *ACE* [= 44° 48′, o outro lado, *EI*, terá 10 534 unidades e o ângulo *CEI*, 2° 49′, diferença para menos, entre *EIC* e *ACE*. Portanto, *CIE* mede 41° 59′ [= 44° 48′ – 2° 49′]. Mas *CIF*, suplementar de *BIF* = 89° 36′, mede 90° 24′. Por conseguinte, todo o ângulo *EIF* mede 132° 23′. Este ângulo [*CIF* + *EIC* = 90° 24′ + 41° 59′)] é igualmente definido pelos lados dados do triângulo *EFI*, isto é, *EI* com 10 534 unidades e *IF* com $211\,^1/_2$, sendo *AC* igual a 10 000. Disto resulta que o ângulo *FEI* mede 50′ e o último lado, *EF*, tem 10 678 unidades. *CEF*, a diferença entre *CEI* e *FEI* mede 1° 59′.



Tomemos agora um pequeno círculo, *LM*, com o diâmetro *LM* de 380 unidades, sendo *AC* igual a 10 000. O arco *LN* medirá 89° 36′, de acordo com a hipótese. Tracemos a corda *LN* e *NR* perpendicular a *LM*. Ora o quadrado de *LN* é igual ao rectângulo definido por *LM* e *LR*. De acordo com esta relação, verificou-se que realmente *LR* tem cerca de 189 unidades de comprimento, sendo o diâmetro, *LM*, igual a 380.

Sabe-se, pois, que o planeta, nesta linha recta ou na sua equivalente, se afastou de *C*, o centro da sua órbita, enquanto a linha *AC* atravessou o ângulo *ACE*. Assim, juntando estas [189] unidades a 3 573, a distância mínima, [V, 27], nesta situação, o total será de 3 762 unidades. Com o centro em *F*, descrevamos, então, um círculo, tendo de raio 3 762 unidades. Tracemos *EG* que corte a circunferência convexa da órbita de Mercúrio, no ponto *G*, de modo que o ângulo *CEG* meça 17° 28′ [igual] à elongação aparente do planeta, em relação à posição média do Sol

[= 228° 8′ – 210° 40′]. Juntemos *FG* e *FK*, paralelos a *CE*. Subtraindo *CEF* de todo o ângulo *CEG*, o resto é *FEG* com 15° 29′ [= 17° 28′ – 1° 59′]. Assim, no triângulo *EFG*, são dados dois lados, *EF* com 10 678 unidades e *FG* com 3 762, e o ângulo *EFG* mede 15° 29′. Daqui se pode inferir que o ângulo *EFG* mede 33° 46′. Subtraindo *EFK*, igual a *CEF*, o resto é *KFG* ou o arco *KG*, que tem 31° 47′. Esta é a distância do planeta ao perigeu médio da sua órbita, *K*. Se acrescentarmos um semicírculo a *KG*, o total será de 211° 47′ [= 180° + 31° 47′], o movimento médio em anomalia paraláctica, nesta observação. *Q. E. D.*

OS MOVIMENTOS DE MERCÚRIO OBSERVADOS MAIS RECENTEMENTE

O método anterior de analisar o movimento do planeta foi-nos legado pelos antigos. Mas eles tiveram a ajuda de um céu mais claro, uma região em que, como dizem, o Nilo não produz nevoeiros como os de nosso Vistula. A nós, que habitamos um país mais frio, a Natureza negou-nos uma tal vantagem, pois o tempo calmo é mais raro. Além disso, a grande obliquidade da esfera poucas vezes nos deixa ver Mercúrio. Mesmo quando se encontra na sua distância máxima do Sol não nasce ao alcance da nossa vista, em Áries ou Peixes, nem, por outro lado, o vemos desaparecer em Virgem ou na Balança. Na verdade, em Câncer ou em Gémeos, não se mostra em qualquer posição quando é apenas o crepúsculo ou o romper do dia, não aparecendo aliás de noite nunca, a não ser que o Sol se tenha afastado bem para o interior do signo de Leão. Assim, este planeta provocou-nos muitas perplexidades e levou-nos a muitos trabalhos quando investigámos o seu curso.

Escolhemos, pois, três posições entre as que foram observadas em Nuremberga, com todo o cuidado. A primeira foi determinada por Bernardo Walther, discípulo de Regiomontano, no ano 1491 da era cristã, a 9 de Setembro, cinco horas uniformes depois da meia-noite, servindo-se de um astrolábio armilar, apontando para Palilício [= Aldebarã]. Viu Mercúrio em $13\,{}^1/_2{}^\circ$, do signo de Virgem, a $1^\circ\ 50'$ de latitude Norte. O planeta estava então a começar a desaparecer, de manhã, e durante os dias precedentes, a sua aparição matinal estivera continuamente a diminuir. Desde o nascimento de Cristo tinham passado 1491 anos egípcios, 258 dias e 12 $^1/_2$ minutos de um dia. A posição média do Sol, não corrigida, era de 149° 48′, mas, em relação ao equinócio da Primavera, era de 26° 47′ em Virgem [= 176° 47′]. Assim, a elongação de Mercúrio cifrava-se em 13$^1/_4$°, aproximadamente [176° 47′ – 163° 30′ = 13° 17′].

A segunda posição foi observada por João Schöner a 9 de Janeiro do ano 1504 da era cristã, às 6 $^1/_2$ horas depois da meia-noite, quando [o ponto] a 10° em Escorpião culminava em Nuremberga. Ele viu o planeta em 3 $^1/_3$° de Capricórnio, e em 0° 45′ de latitude Norte. A posição média do Sol em relação ao equinócio da Primavera foi calculada em 27° 7′ de Capricórnio [= 297° 7′], com Mercúrio em 23° 47′ a Oeste, de manhã.

A terceira observação foi feita também por João Schöner, no mesmo ano de 1504, a 18 de Março. Encontrou Mercúrio em 26$^1/_{10}$° de Àries cerca de 3° de latitude Norte, quando [o ponto] em 25° de Câncer culminava em Nuremberga. A sua esfera armilar estava apontada para a mesma estrela, o Palilício [= Aldebarã], às 7 $^1/_2$ horas depois do meio-dia, quando a posição média do Sol, em relação ao equinócio da Primavera, estava calculada em 5° 39′, de Áries e a elongação de Mercúrio em relação ao Sol, à tarde, era igual a 21° 17′ [≅ 26° 55′ – 5° 39′].

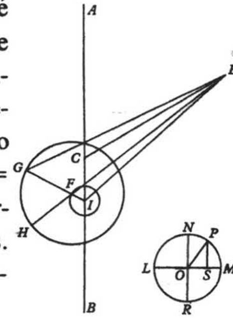
Entre a primeira e a segunda posição, há 12 anos egípcios, 125 dias, 3 minutos de um dia e 45 segundos de um dia. Durante este tempo, o movimento simples do Sol foi igual a 120° 14′, e a anomalia em paralaxe de Mercúrio igual a 316° 1′. No segundo intervalo, há 69 dias, 31 minutos de um dia e 45 segundos de um dia. O movimento médio simples do Sol foi 68° 32′, e a anomalia média, em paralaxe, de Mercúrio 216°.

Queremos agora analisar o movimento de Mercúrio com base nestas três observações.

Nós pensamos ter de admitir que, nestas observações, as medidas dos círculos permaneceram válidas desde Ptolomeu até agora, visto que também nos outros planetas se verificou que as boas autoridades não se enganaram neste aspecto. Se além destas observações, tivéssemos o lugar da ápside do círculo excêntrico, nada mais faltaria, no movimento aparente deste planeta. Admitimos que a posição da ápside superior era 211 $^{1}/_{2}$°, isto é, 18 $^{1}/_{2}$°, no signo do Escorpião, pois não era de aceitar um número mais baixo, sem prejuízo do que se tinha observado. Assim, teremos para a anomalia do círculo excêntrico, isto é, a distância entre o movimento médio do Sol e o apogeu, na primeira determinação, 298° 15′; na segunda, 58° 29′ e na terceira 127° 1′.

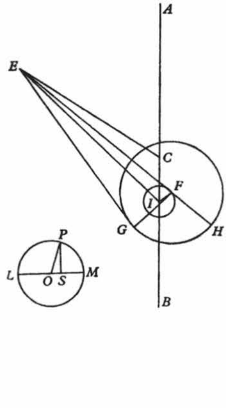
Descrevamos agora a figura, segundo o modelo anterior, excepto quanto ao ângulo *ACE* que é tomado com 61° 45′ [= 360° − 298° 15′], distância a que a linha do movimento médio do Sol estava a Oeste do apogeu na primeira observação. Tudo o que se segue estará de acordo com a hipótese. *IC* [V, 29] é dado igual a 736 $^{1}/_{2}$ unidades, sendo *AC* = 10 000. O ângulo *IEC*, no triângulo *ECI* também é dado [180° − (*ACE* − 61° 45′) = 118° 15′]; o ângulo *CEI* é dado e tem 3° 35′, assim como o lado *IE*, com 10 369 unidades, sendo *EG* = 10 000 e *IF* = 211$^{1}/_{2}$° [V, 29].

Portanto, no triângulo *EFI* há dois lados cuja razão é dada [*IE* : *IF* = 10 369 : 211$^{1}/_{2}$]. Mas o ângulo *BIF* mede 193$^{1}/_{2}$°, tendo o dobro de *ACE*. *CIF*, ângulo suplementar, tem 56$^{1}/_{2}$°, tendo o dobro de *ACE*. *CIF*, ângulo suplementar, tem 56$^{1}/_{2}$°. Por conseguinte, todo o ângulo *EIF* [= *CLF* + *EIC*=56° 30′+(*EIC* = *ACE* − *CEI* = = 61° 45′ − 3° 35′ = 58° 10′)] é igual a 114° 40′. Portanto, *IEF* tem 1° 5′, e o lado *EF* = 10 371 unidades. Assim, o ângulo *CEF* mede 2 $^{1}/_{2}$° [= *CEI* − *IEF* = 3° 35′ − − 1° 5′].



Contudo para determinar quanto o movimento de aproximação e afastamento fez aumentar a distância do círculo centrado em *F* ao apogeu ou perigeu, descrevamos um círculo pequeno repartido em quatro partes iguais pelos diâmetros *LM* e *NR*, no centro *O*. Tomemos o ângulo *POL*, igual ao dobro de *ACE*, com 123 1/2°. Do ponto *P*, tracemos *PS*, perpendicular a *LM*. Então, de acordo com a razão dada, *OP*, ou o seu equivalente, *LO*, está para *OS*, assim como 100 000 unidades estão para 5519, ou 190 para 105. Estes números, somados, constituem *LS*, com 295 unidades, sendo *AC* = 10 000, e a distância a que o planeta ficou mais afastado do centro *F*. Adicionando 295 unidades a 3 573, a soma será igual à distância mínima [V, 27] cujo valor presente são 3 868 unidades.

Tomando este valor como raio, descrevamos um círculo *HG*, em redor do centro *F*. Juntemos *EG* e *EF*, e prolonguemos *EF* na linha recta *EFH*. Mostrou-se que o ângulo *CEF* tinha 2 1/2°. Observou-se [que] *GEC* era igual a 13 1/4°, distância entre o planeta, de manhã, e o movimento médio do Sol [na observação atribuída a Walther]. Assim, todo o ângulo *FEG* [– *GEC* + *CEF* = 13° 15′ + 2° 30′] é igual a 15 3/4°. Mas no triângulo *EFG*, *EF* está para *FG* assim como 10 371 unidades estão para 3 868; e o ângulo *E* é dado [= 15° 45′]. Daqui deduziremos também que o ângulo *EGF* tem 49° 8′. Assim, o ângulo externo restante é igual a 64° 53′. Subtraindo este número de todo o círculo, o resto vale 295° 7′, a anomalia verdadeira em paralaxe. Juntemos a isto o ângulo *CEF*, e a soma serão 297° 37′, a anomalia em paralaxe média e uniforme, que procurávamos. Acrescentemos a este valor 316° 1″, e, para a segunda observação, teremos a anomalia paraláctica uniforme, 253° 38′, que mostraremos ser também correcta e de acordo com a observação.

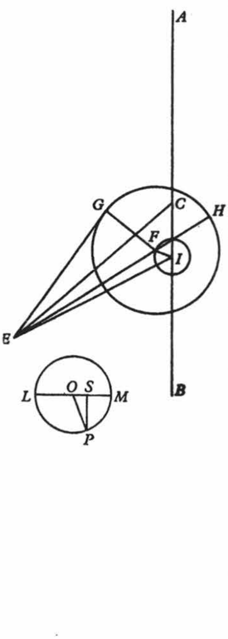


Como medida da anomalia do círculo excêntrico, na segunda observação, tomemos o ângulo *ACE*, igual a

58° 29′. Assim, uma vez mais, no triângulo *CEI* são dados dois lados: *IC* igual a 736 unidades e *EC* com 10 000, assim como o ângulo *ECI*, suplementar [de *ACE* = 58° 29′], com 121° 31′. Por conseguinte, o terceiro lado *EI* tem 10 404 unidades no mesmo sistema de unidades, e o ângulo *CEI* é igual a 3° 38′. De igual modo, no triângulo *EIF*, o ângulo *EIF* mede 118° 3′, e o lado *IF* tem 211 1/2 unidades, sendo *IE* igual a 10 404. Por conseguinte, o terceiro lado *EF* tem 10 505 unidades, no mesmo sistema de unidades e o ângulo *IEF* = 61′. Assim, o ângulo *FEC*, diferença entre *CEI* e *IEF*, é igual a 2° 27′, a prostaférese do círculo excêntrico. Somando esta quantidade com o movimento médio em paralaxe, o total são 256° 5′, movimento verdadeiro em paralaxe.

Agora, no epiciclo que provoca a aproximação e o afastamento tomemos o arco *LP* ou o ângulo *LOP*, igual ao dobro de *ACE* [– 58° 29′], valendo, portanto 116° 58′. Uma vez mais, então, no triângulo rectângulo *OPS*, por causa da razão que existe entre os lados, a razão dada entre *OP* e *OS*, é igual à razão entre 10 000 e 4 535 unidades, sendo *OS* = 86 unidades e *OP*, ou *LO*, [igual a] 190. Em extensão toda a linha *LOS* tem 276 unidades. Somando esta quantidade com a distância mínima, 3 573 unidades, o total serão 3 849. Com este raio e com centro em *F* descrevamos um círculo *HG*, de modo que o apogeu da paralaxe esteja em *H*. Seja o arco *HG* a distância do planeta ao ponto *H*, prolongada 103° 55′ para Oeste. Esta é a quantidade em que uma revolução inteira difere do movimento corrigido em paralaxe [= movimento médio + prostaféreses aditiva = movimento verdadeiro; ou seja], 256° 5′. Portanto, *EFG*, ângulo suplementar, é igual a 76° 5′. Assim mais uma vez, no triângulo *EFG*, são dados dois lados: *FG* com 3 849 e *EF* com 10 505 unidades. Assim, o ângulo *FEG* = 21° 19′. Daqui se deduz [adicionando este número a *CEF* = 2° 27′] que o ângulo *CEG* mede 23° 46′, distância aparente entre *C*, o centro do círculo máximo, e o planeta *G*. Esta distância difere apenas de uma pequena quantidade da elongação observada [= 23° 47′].

Esta concordância será posteriormente confirmada, uma terceira vez, quando tomamos o ângulo *ACE* com 127° 1′ ou o seu ângulo suplementar *BCE* com 52° 59′. Teremos novamente um triângulo, com dois lados dados: *CI* medindo 736 $^{1}/_{2}$ unidades e *EC* = 10 000. Estes lados definem o ângulo *ECI* com 52° 59′. A partir destes dados, o ângulo *CEI* mede 3° 31′, e o lado *IE* tem 9 575 unidades, medindo *EC* 10 000. Segundo a construção, o ângulo *EIF* é dado com 49° 28′ e é também definido pelos lados dados, *FI* com 211 $^{1}/_{2}$ unidades, *EI* com 9 575. Assim, o último lado [*EF* do triângulo *EIF*] tem 9 440 unidades, como as anteriores, e o ângulo *IEF* mede 59′. Se a esta quantidade se subtrai de todo o ângulo *IEC*, o resto é igual a 2° 32′, o ângulo *FEC*. Esta é a prostaférese subtractiva da anomalia do círculo excêntrico. Somando esta quantidade com a anomalia paraláctica média, que determinámos juntando 216° [a anomalia paraláctica média] do segundo intervalo, igual a 109° 38′, a anomalia paraláctica verdadeira vem a ser 112° 10′[= 2° 32′+ 109° 38′].



Agora, no epiciclo, tomemos um ângulo *LOP* duplo de *ECI*, ou seja, com 105° 58′. Aqui também, tendo como base a razão entre *PO* e *OS*, teremos *OS* igual a 52 unidades, de modo que toda a linha *LOS* mede 242 unidades [= *LO* + *OS* = 190 + 52]. Adicionando este número à distância mínima, 9 573 unidades, teremos a distância corrigida, 3 815 unidades. Tomando esta quantidade como raio e o centro *F*, descrevamos um círculo no qual a ápside superior da paralaxe seja *H*, em *EFH*, prolongada em linha recta. Como medida da anomalia paraláctica verdadeira, tomemos o arco *HG*, com 112° 10′, e juntemos *GF*. Então, o ângulo suplementar, *GFE*, será igual a 67° 50′. Este ângulo é definido pelos lados dados *GF* com 3 815 unidades e *EF* com 9 440. Daqui se infere que o ângulo *FEG* será determinado e terá 23° 50′. Deste número, subtraiamos a prostaférese *CEF* [= 2° 32′] e o ângulo resultante *CEG* terá 21° 18′, distância aparente entre o planeta, à tarde, e o centro do círculo máximo. Esta é praticamente a mesma distância que se verificou na observação [21° 17′].

Por consequência, tal concordância das três posições com as observações, garante indiscutivelmente que a ápside superior do círculo excêntrico está localizada, como estabelecemos, em 211 $^1/_2$°, na esfera das estrelas fixas no nosso tempo, e também que as consequências daí tiradas são correctas, designadamente a anomalia paraláctica uniforme, na primeira posição, com 297° 37′, na segunda, 253° 38′, e na terceira, 109° 38′. Estes são os resultados por nós procurados.

Naquela observação antiga, ao romper do dia 19 de Tot, o primeiro mês egípcio, no ano 21 do reinado de Ptolomeu Filadelfo, a posição da ápside superior do círculo excêntrico, segundo a opinião de Ptolomeu, era de 183° 20′ na esfera das estrelas fixas, enquanto a anomalia paraláctica média era de 211° 47′ [V, 29]. O intervalo entre a mais recente observação e esta antiga, é de 1768 anos egípcios, 200 dias e 33 minutos de um dia. Nesse tempo a ápside superior do círculo excêntrico moveu-se 28° 10′ [= 211° 30′ − 183° 20′], na esfera das estrelas fixas, e o movimento paraláctico, além das 5 570 revoluções inteiras, é igual a 257° 51′ [+ 211° 47′ = 469° 38′; 469° 38′ − 360° = = 109° 38′, na terceira observação . Com efeito, em 20 anos, completam-se cerca de 63 períodos. 1769 anos, portanto, equivalem a 5 544 períodos. Nos restantes 8 anos e 200 dias, há 26 revoluções. De acordo com isto, em 1768 anos, 200 dias, e 33 minutos do dia, há um excesso, para além 5 570 revoluções, de 257° 51′. Esta é a diferença entre as posições observadas nessa primeira observação antiga e a nossa. Esta diferença também concorda com os números colocados nas nossas Tabelas [em seguida a V, I]. Quando comparamos com este intervalo os 28° 10′ em que o apogeu do círculo excêntrico se moveu, o seu movimento será estabelecido como 1° em 63 anos, desde que seja uniforme.

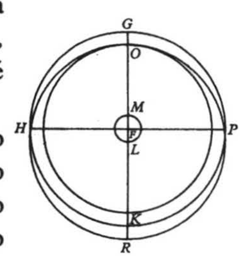
DETERMINAÇÃO DAS POSIÇÕES DE MERCÚRIO

Desde o começo da era cristã até a mais recente observação, há 1504 anos egípcios, 87 dias e 48 minutos do dia. Durante esse tempo, o movimento paraláctico de Mercúrio em anomalia equivale a 63° 14′, para além das revoluções completas. Subtraindo esta quantidade a 109° 38′, o resto é de 46° 24′, posição da anomalia paraláctica de Mercúrio, no início da era cristã. Desde esse tempo para trás, até o começo da 1.ª Olimpíada, há 775 anos egípcios e 12 $^1/_2$ dias. Para este intervalo, o cálculo dá 95° 3′, depois das revoluções completas. Subtraindo esta quantidade à posição referente ao início da era cristã, tirada uma revolução, o resto é a posição da 1.ª Olimpíada, 311° 21′. Além disso, sendo o cálculo feito para 451 anos, 247 dias, desde esse tempo até a morte de Alexandre Magno, a sua posição apresenta-se com 213° 5′.

UMA EXPLICAÇÃO ALTERNATIVA PARA A APROXIMAÇÃO E AFASTAMENTO

Antes de deixarmos de falar de Mercúrio, resolvemos considerar outro método, não menos crível do que o anterior, para explicar como essa aproximação e afastamento podem ser produzidos.

Com efeito, seja *GHKP* um círculo dividido em quatro partes iguais, com o centro em *F*. Descrevamos com centro em *F*, um círculo pequeno concêntrico, *LM*. A seguir, descrevamos outro círculo, *OR*, com o centro em *L*, e o raio *LFO*, igual a *FG* ou *FH*. Suponhamos que todas estas combinações de círculos, juntamente com as suas intersecções, *GFR* e *HFP*, se movem para Este do apogeu do círculo excêntrico do planeta, à volta do centro *F*, cerca de 2° 7′ cada dia, isto é, tanto quanto o movimento paraláctico do planeta excede o movimento da Terra na eclíptica. Suponha-se que o planeta, entretanto, concorre para o resto do movimento paraláctico, quase igual ao movimento da Terra, desde o ponto *G*, no seu próprio círculo *OR*. Admitamos também que nesta mesma revolução, que é anual, o centro de *OR*, círculo que é o deferente do planeta, se move para trás e para diante, como foi admitido anteriormente [V, 25], num movimento de libração, no diâmetro *LFM*, que é duas vezes maior do que foi considerado acima.



Partindo destes pressupostos, consideremos a Terra, no seu movimento médio, numa posição oposta ao apogeu do círculo excêntrico do planeta. Nesta ocasião, coloquemos o centro do círculo, deferente do planeta, em *L*, mas o próprio planeta em *O*. Uma vez que ele está então à distância mínima de F, como toda a configuração se move, o planeta descreverá o círculo mais pequeno cujo raio é FO. Daí resulta que quando a Terra está próxima da ápside média, o planeta chega ao ponto H, correspondente à sua máxima distância de F, [e descreve um largo arco no círculo de centro F]. Com efeito, então, o deferente, OR, coincidirá com o círculo GH, porque os seus centros se confundem em F. Quando a Terra se move desta posição na direcção do perigeu [do excêntrico do planeta], e o centro do círculo OR oscila até o outro limite M, o próprio círculo ergue-se acima de GK, e o planeta, em R, atingirá a sua distância mínima de F, e atravessará os cursos marcados para ele, no início. Com efeito, as três revoluções iguais coincidem, designadamente, o regresso da Terra ao apogeu do círculo excêntrico de Mercúrio, a libração do centro no diâmetro LM, e o circuito do planeta desde a linha FG até a mesma linha. O único desvio destas revoluções é o movimento [$\approx 2^{\circ}\ 7'$ diariamente] das intersecções, G, H, K e P, a partir da ápside do círculo excêntrico, como dissemos [V, 32]. Desse modo, no caso deste planeta, a Natureza recriou-se com variedade admirável, a qual, contudo, confirmou com uma ordenação perpétua, definida e imutável. Deve-se, no entanto, notar aqui que o planeta não passa pelas regiões médias dos quadrantes GH e KP sem um desvio em longitude. Na verdade, como intervém a variação nos centros, deve provocar uma prostaférese. Não obstante, a não permanência do centro interpõe um obstáculo. Por exemplo, suponhamos que, enquanto o centro permanecia em L, o planeta partia de O. Próximo de H, teria o seu desvio máximo, medido em relação à excentricidade FL. Mas resulta dos princípios aceites que, quando o planeta se afasta de O, inicia e aumenta o desvio que deve ser provocado pela distância FL, em relação aos centros. Contudo, à medida que o centro móvel se aproxima da sua posição média, em F, cada vez mais o desvio antecipado diminui e é superado, de modo que desaparece inteiramente, próximo das intersecções médias, *H* e *P*, onde o desvio máximo era de esperar. Não obstante, como admitimos, mesmo quando o desvio se torna pequeno, fica escondido com os raios do Sol, e não se nota em toda a circunferência do círculo quando o planeta nasce ou se põe, de manhã ou à tarde. Não queríamos omitir este modelo que não é menos razoável do que o anterior, e que será altamente vantajoso para usar, em relação às variações de latitude [V1, 2].

AS TABELAS DAS PROSTAFÉRESES PARA OS CINCO PLANETAS

Os movimentos uniforme e aparente de Mercúrio e outros planetas foram explicados atrás e expostos com cálculos, que servirão como exemplos para abrir o caminho ao cálculo das diferenças destes movimentos, em quaisquer outras posições. No entanto, para facilitar o processo, organizámos Tabelas próprias para cada planeta. Cada uma compõe-se de 6 colunas com 30 filas de números cada, dispostos numa escala de 3° em 3°, como é costume. As primeiras 2 colunas apresentarão os números comuns, não só da anomalia do círculo excêntrico mas também das paralaxes. A terceira coluna mostrar-nos-á a soma das prostaféreses, isto é, as diferenças totais que ocorrem entre os movimentos uniformes e não uniformes daqueles círculos. Na quarta coluna estão os minutos proporcionais, calculados em sexagésimos, correspondentes ao aumento ou decréscimo das paralaxes, devido à maior ou menor distância da Terra. Na quinta coluna, encontram-se as próprias prostaféreses, que são as paralaxes existentes, na ápside superior do círculo excêntrico do planeta com referência ao círculo máximo. Na sexta e última coluna vemos os excedentes das paralaxes, que se dão na ápside inferior do círculo excêntrico, sobre as que ocorrem na ápside superior. Eis as Tabelas.

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE SATURNO									
Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Minutos propor-cionais	Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe		
°	°	°	′		°	′	°	′	
3	357	0	20	0	0	17	0	2	
6	354	0	40	0	0	34	0	4	
9	351	0	58	0	0	51	0	6	
12	348	1	17	0	1	7	0	8	
15	345	1	36	1	1	23	0	10	
18	342	1	55	1	1	40	0	12	
21	339	2	13	1	1	56	0	14	
24	336	2	31	2	2	11	0	16	
27	333	2	49	2	2	26	0	18	
30	330	3	6	3	2	42	0	19	
33	327	3	23	3	2	56	0	21	
36	324	3	39	4	3	10	0	23	
39	321	3	55	4	3	25	0	24	
42	318	4	10	5	3	38	0	26	
45	315	4	25	6	3	52	0	27	
48	312	4	39	7	4	5	0	29	
51	309	4	52	8	4	17	0	31	
54	306	5	5	9	4	28	0	33	
57	303	5	17	10	4	38	0	34	
60	300	5	29	11	4	49	0	35	
63	297	5	41	12	4	59	0	36	
66	294	5	50	13	5	8	0	37	
69	291	5	59	14	5	17	0	38	
72	288	6	7	16	5	24	0	38	
75	285	6	14	17	5	31	0	39	
78	282	6	19	18	5	37	0	39	
81	279	6	23	19	5	42	0	40	
84	276	6	27	21	5	46	0	41	
87	273	6	29	22	5	50	0	42	
90	270	6	31	23	5	52	0	42	

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE SATURNO

Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Minutos proporcionais	Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′		°	′	°	′
93	267	6	31	25	5	52	0	43
96	264	6	30	27	5	53	0	44
99	261	6	28	29	5	53	0	45
102	258	6	26	31	5	51	0	46
105	255	6	22	32	5	48	0	46
108	252	6	17	34	5	45	0	45
111	249	6	12	35	5	40	0	45
114	246	6	6	36	5	36	0	44
117	243	5	58	38	5	29	0	43
120	240	5	49	39	5	22	0	42
123	237	5	40	41	5	13	0	41
126	234	5	28	42	5	3	0	40
129	231	5	16	44	4	52	0	39
132	228	5	3	46	4	41	0	37
135	225	4	48	47	4	29	0	35
138	222	4	33	48	4	15	0	34
141	219	4	17	50	4	1	0	32
144	216	4	0	51	3	46	0	30
147	213	3	42	52	3	30	0	28
150	210	3	24	53	3	13	0	26
153	207	3	6	54	2	56	0	24
156	204	2	46	55	2	38	0	22
159	201	2	27	56	2	21	0	19
162	198	2	7	57	2	2	0	17
165	195	1	46	58	1	42	0	14
168	192	1	25	59	1	22	0	12
171	189	1	4	59	1	2	0	9
174	186	0	43	60	0	42	0	7
177	183	0	22	60	0	21	0	4
180	180	0	0	60	0	0	0	0

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE JÚPITER

Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Proporcionais		Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′	Minutos	Segundos	°	′	°	′
3	357	0	16	0	3	0	28	0	2
6	354	0	31	0	12	0	56	0	4
9	351	0	47	0	18	1	25	0	6
12	348	1	2	0	30	1	53	0	8
15	345	1	18	0	45	2	19	0	10
18	342	1	33	1	3	2	46	0	13
21	339	1	48	1	23	3	13	0	15
24	336	2	2	1	48	3	40	0	17
27	333	2	17	2	18	4	6	0	19
30	330	2	31	2	50	4	32	0	21
33	327	2	44	3	26	4	57	0	23
36	324	2	58	4	10	5	22	0	25
39	321	3	11	5	40	5	47	0	27
42	318	3	23	6	43	6	11	0	29
45	315	3	35	7	48	6	34	0	31
48	312	3	47	8	50	6	56	0	34
51	309	3	58	9	53	7	18	0	36
54	306	4	8	10	57	7	39	0	38
57	303	4	17	12	0	7	58	0	40
60	300	4	26	13	10	8	17	0	42
63	297	4	35	14	20	8	35	0	44
66	294	4	42	15	30	8	52	0	46
69	291	4	50	16	50	9	8	0	48
72	288	4	56	18	10	9	22	0	50
75	285	5	1	19	17	9	35	0	52
78	282	5	5	20	40	9	47	0	54
81	279	5	9	22	20	9	59	0	55
84	276	5	12	23	50	10	8	0	56
87	273	5	14	25	23	10	17	0	57
90	270	5	15	26	57	10	24	0	58

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE JÚPITER									
Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Proporcionais		Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′	Minutos	Segundos	°	′	°	′
93	267	5	15	28	33	10	25	0	59
96	264	5	15	30	12	10	33	1	0
99	261	5	14	31	43	10	34	1	1
102	258	5	12	33	17	10	34	1	1
105	255	5	10	34	50	10	33	1	2
108	252	5	6	36	21	10	29	1	3
111	249	5	1	37	47	10	23	1	3
114	246	4	55	39	0	10	15	1	3
117	243	4	49	40	25	10	5	1	3
120	240	4	41	41	50	9	54	1	2
123	237	4	32	43	18	9	41	1	1
126	234	4	23	44	46	9	25	1	0
129	231	4	13	46	11	9	8	0	59
132	228	4	2	47	37	8	56	0	58
135	225	3	50	49	2	8	27	0	57
138	222	3	38	50	22	8	5	0	55
141	219	3	25	51	46	7	39	0	53
144	216	3	13	53	6	7	12	0	50
147	213	2	59	54	10	6	43	0	47
150	210	2	45	55	15	6	13	0	43
153	207	2	30	56	12	5	41	0	39
156	204	2	15	57	0	5	7	0	35
159	201	1	59	57	37	4	32	0	31
162	198	1	43	58	6	3	56	0	27
165	195	1	27	58	34	3	18	0	23
168	192	1	11	59	3	2	40	0	19
171	189	0	53	59	36	2	0	0	15
174	186	0	35	59	58	1	20	0	11
177	183	0	17	60	0	0	40	0	6
180	180	0	0	60	0	0	0	0	0

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE MARTE									
Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Proporcionais		Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′	Minutos	Segundos	°	′	°	′
3	357	0	32	0	0	1	8	0	8
6	354	1	5	0	2	2	16	0	17
9	351	1	37	0	7	3	24	0	25
12	348	2	8	0	15	4	31	0	33
15	345	2	39	0	28	5	38	0	41
18	342	3	10	0	42	6	45	0	50
21	339	3	41	0	57	7	52	0	59
24	336	4	11	1	13	8	58	1	8
27	333	4	41	1	34	10	5	1	16
30	330	5	10	2	1	11	11	1	25
33	327	5	38	2	31	12	16	1	34
36	324	6	6	3	2	13	22	1	43
39	321	6	32	3	32	14	26	1	52
42	318	6	58	4	3	15	31	2	2
45	315	7	23	4	37	16	35	2	11
48	312	7	47	5	16	17	39	2	20
51	309	8	10	6	2	18	42	2	30
54	306	8	32	6	50	19	45	2	40
57	303	8	53	7	39	20	47	2	50
60	300	9	12	8	30	21	49	3	0
63	297	9	30	9	27	22	50	3	11
66	294	9	47	10	25	23	48	3	22
69	291	10	3	11	28	24	47	3	34
72	288	10	19	12	33	25	44	3	46
75	285	10	32	13	38	26	40	3	59
78	282	10	42	14	46	27	35	4	11
81	279	10	50	16	4	28	29	4	24
84	276	10	56	17	24	29	21	4	36
87	273	11	1	18	45	30	12	4	50
90	270	11	5	20	8	31	0	5	5

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE MARTE									
Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Proporcionais		Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′	Minutos	Segundos	°	′	°	′
93	267	11	7	21	32	31	45	5	20
96	264	11	8	22	58	32	30	5	35
99	261	11	7	24	32	33	13	5	51
102	258	11	5	26	7	33	53	6	7
105	255	11	1	27	43	34	30	6	25
108	252	10	56	29	21	35	3	6	45
111	249	10	45	31	2	35	34	7	4
114	246	10	33	32	46	35	59	7	25
117	243	10	11	34	31	36	21	7	46
120	240	10	7	36	16	36	37	8	11
123	237	9	51	38	1	36	49	8	34
126	234	9	33	39	46	36	54	8	59
129	231	9	13	41	30	36	53	9	24
132	228	8	50	43	12	36	45	9	49
135	225	8	27	44	50	36	25	10	17
138	222	8	2	46	26	35	59	10	47
141	219	7	36	48	1	35	25	11	15
144	216	7	7	49	35	34	30	11	45
147	213	6	37	51	2	33	24	12	12
150	210	6	7	52	22	32	3	12	35
153	207	5	34	53	38	30	26	12	54
156	204	5	0	54	50	28	5	13	28
159	201	4	25	56	0	26	8	13	7
162	198	3	49	57	6	23	28	12	47
165	195	3	12	57	54	20	21	12	12
168	192	2	35	58	22	16	51	10	59
171	189	1	57	58	50	13	1	9	1
174	186	1	18	59	11	8	51	6	40
177	183	0	39	59	44	4	32	3	28
180	180	0	0	60	0	0	0	0	0

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE VÉNUS

Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Proporcionais		Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′	Minutos	Segundos	°	′	°	′
3	357	0	6	0	0	1	15	0	1
6	354	0	13	0	0	2	30	0	2
9	351	0	19	0	10	3	45	0	3
12	348	0	25	0	39	4	59	0	5
15	345	0	31	0	58	6	13	0	6
18	342	0	36	1	20	7	28	0	7
21	339	0	42	1	39	8	42	0	9
24	336	0	48	2	23	9	56	0	11
27	333	0	53	2	59	11	10	0	12
30	330	0	59	3	38	12	24	0	13
33	327	1	4	4	18	13	37	0	14
36	324	1	10	5	3	14	50	0	16
39	321	1	15	5	45	16	3	0	17
42	318	1	20	6	32	17	16	0	18
45	315	1	25	7	22	18	28	0	20
48	312	1	29	8	18	19	40	0	21
51	309	1	33	9	31	20	52	0	22
54	306	1	36	10	48	22	3	0	24
57	303	1	40	12	8	23	14	0	26
60	300	1	43	13	32	24	24	0	27
63	297	1	46	15	8	25	34	0	28
66	294	1	49	16	35	26	43	0	30
69	291	1	52	18	0	27	52	0	32
72	288	1	54	19	33	28	57	0	34
75	285	1	56	21	8	30	4	0	36
78	282	1	58	22	32	31	9	0	38
81	279	1	59	24	7	32	13	0	41
84	276	2	0	25	30	33	17	0	43
87	273	2	0	27	5	34	20	0	45
90	270	2	0	28	28	35	21	0	47

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE VÉNUS

Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Proporcionais		Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′	Minutos	Segundos	°	′	°	′
93	267	2	0	29	58	36	20	0	50
96	264	2	0	31	28	37	17	0	53
99	261	1	59	32	57	38	13	0	55
102	258	1	58	34	26	39	7	0	58
105	255	1	57	35	55	40	0	1	0
108	252	1	55	37	23	40	49	1	4
111	249	1	53	38	52	41	36	1	8
114	246	1	51	40	19	42	18	1	11
117	243	1	48	41	45	42	59	1	14
120	240	1	45	43	10	43	35	1	18
123	237	1	42	44	37	44	7	1	22
126	234	1	39	46	6	44	32	1	26
129	231	1	35	47	36	44	49	1	30
132	228	1	31	49	6	45	4	1	36
135	225	1	27	50	12	45	10	1	41
138	222	1	22	51	17	45	5	1	47
141	219	1	17	52	33	44	51	1	53
144	216	1	12	53	48	44	22	2	0
147	213	1	7	54	28	43	36	2	6
150	210	1	1	55	0	42	34	2	13
153	207	0	55	55	57	41	12	2	19
156	204	0	49	56	47	39	20	2	34
159	201	0	43	57	33	36	58	2	27
162	198	0	37	58	16	33	58	2	27
165	195	0	31	58	59	30	14	2	27
168	192	0	25	59	39	25	42	2	16
171	189	0	19	59	48	20	20	1	56
174	186	0	13	59	54	14	7	1	26
177	183	0	7	59	58	7	16	0	46
180	180	0	0	60	0	0	16	0	0

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE MERCÚRIO									
Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Proporcionais		Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′	Minutos	Segundos	°	′	°	′
3	357	0	8	0	3	0	44	0	8
6	354	0	17	0	12	1	28	0	15
9	351	0	26	0	24	2	12	0	23
12	348	0	34	0	50	2	56	0	31
15	345	0	43	1	43	3	41	0	38
18	342	0	51	2	42	4	25	0	45
21	339	0	59	3	51	5	8	0	53
24	336	1	8	5	10	5	51	1	1
27	333	1	16	6	41	6	34	1	8
30	330	1	24	8	29	7	15	1	16
33	327	1	32	10	35	7	57	1	24
36	324	1	39	12	50	8	38	1	32
39	321	1	46	15	7	9	18	1	40
42	318	1	53	17	26	9	59	1	47
45	315	2	0	19	47	10	38	1	55
48	312	2	6	22	8	11	17	2	2
51	309	2	12	24	31	11	54	2	10
54	306	2	18	26	17	12	31	2	18
57	303	2	24	29	17	13	7	2	26
60	300	2	29	31	39	13	41	2	34
63	297	2	34	33	59	14	14	2	42
66	294	2	38	36	12	14	46	2	51
69	291	2	43	38	29	15	17	2	59
72	288	2	47	40	45	15	46	3	8
75	285	2	50	42	58	16	14	3	16
78	282	2	53	45	6	16	40	3	24
81	279	2	56	46	59	17	4	3	32
84	276	2	58	48	50	17	27	3	40
87	273	2	59	50	36	17	48	3	48
90	270	3	0	52	2	18	6	3	56

TABELA DAS PROSTAFÉRESES DE MERCÚRIO

Números comuns		Correcções do círculo excêntrico		Proporcionais		Paralaxes do círculo máximo		Excedente da paralaxe	
°	°	°	′	Minutos	Segundos	°	′	°	′
93	267	3	0	53	43	18	23	4	3
96	264	3	1	55	4	18	37	4	11
99	261	3	0	56	14	18	48	4	19
102	258	2	59	57	14	18	56	4	27
105	255	2	58	58	1	19	2	4	34
108	252	2	56	58	40	19	3	4	42
111	249	2	55	59	14	19	3	4	49
114	246	2	53	59	40	18	59	4	54
117	243	2	49	59	57	18	53	4	58
120	240	2	44	60	0	18	42	5	2
123	237	2	39	59	49	18	27	5	4
126	234	2	34	59	35	18	8	5	6
129	231	2	28	59	19	17	44	5	9
132	228	2	22	58	59	17	17	5	9
135	225	2	16	58	32	16	44	5	6
138	222	2	10	57	56	16	7	5	3
141	219	2	3	56	41	15	25	4	59
144	216	1	55	55	27	14	38	4	52
147	213	1	47	54	55	13	47	4	41
150	210	1	38	54	25	12	52	4	26
153	207	1	29	53	54	11	51	4	10
156	204	1	19	53	23	10	44	3	53
159	201	1	10	52	54	9	34	3	33
162	198	1	0	52	33	8	20	3	10
165	195	0	51	52	18	7	4	2	43
168	192	0	41	52	8	5	43	2	14
171	189	0	31	52	3	4	19	1	43
174	186	0	21	52	2	2	54	1	9
177	183	0	10	52	2	1	27	0	35
180	180	0	0	52	2	0	0	0	0

COMO CALCULAR AS POSIÇÕES EM LONGITUDE DOS CINCO PLANETAS

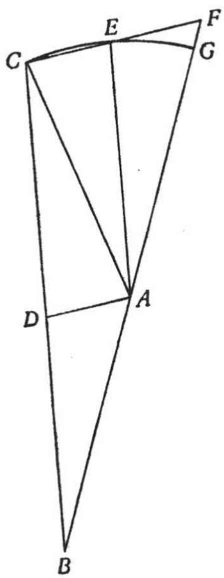
Servindo-nos destas Tabelas, organizadas por mim, calcularemos as posições em longitude destes cinco planetas, sem qualquer dificuldade, pois o método para o fazer é quase o mesmo para todos eles, embora seja um pouco diferente para os planetas superiores do que é para Vénus e para Mercúrio. Falemos, então, de Saturno, Júpiter, Marte, em primeiro lugar. Para estes, o método de cálculo é o seguinte. Para qualquer tempo dado, procuremos os movimentos médios, quer dizer, o movimento simples do Sol e o movimento paraláctico do planeta, pelo método atrás apresentado [III, 14; V, 1]. A seguir, subtraiamos a posição da ápside superior do círculo excêntrico do planeta, do movimento simples do Sol. Do resto subtraiamos o movimento paraláctico. O resultado obtido é a anomalia do círculo excêntrico do planeta. Procuramos este número entre os números comuns, nas duas primeiras colunas da Tabela. No lado oposto a este número, tomamos a correcção do círculo excêntrico na terceira coluna, e os minutos proporcionais na coluna seguinte. Juntamos esta correcção ao movimento paraláctico e subtraímo-la da anomalia do círculo excêntrico, se o número com que entrámos na Tabela se encontrar na primeira coluna. Inversamente, subtraímo-lo da anomalia paraláctica e juntamo-la à anomalia do círculo excêntrico, se o número inicial estiver na segunda coluna. As somas ou as diferenças resultantes serão as anomalias corrigidas da paralaxe e do círculo excêntrico, enquanto os minutos proporcionais são reservados para uma finalidade que será representada muito em breve.

A seguir, procuramos igualmente esta anomalia paraláctica corrigida, entre os números comuns, nas primeiras duas colunas, e no lado oposto, na quinta coluna, tomamos as prostaféreses parallácticas, juntamente com os seus excedentes, situados na última coluna. De acordo com o número dos minutos proporcionais, tomamos a parte proporcional deste excesso. Juntamos sempre esta parte proporcional à prostaférese. A soma é a paralaxe verdadeira do planeta. Ela deve ser subtraída da anomalia paraláctica corrigida, se for menor do que um semicírculo, ou acrescentada, se maior do que um semicírculo. Assim, teremos a distância verdadeira e aparente, para Oeste, em relação à posição média do Sol. Se subtrairmos esta distância da posição do Sol, o resto será a posição procurada do planeta na esfera das estrelas fixas. Finalmente, se acrescentarmos a precessão dos equinócios à posição do planeta, a sua distância do equinócio da Primavera ficará determinada.

Nos casos de Vénus e Mercúrio, em vez da anomalia do círculo excêntrico, usamos a distância da ápside superior até a posição média do Sol. Com a ajuda desta anomalia, corrigimos o movimento paraláctico e a anomalia do círculo excêntrico, como já explicámos. Mas a prostaférese do círculo excêntrico juntamente com a paralaxe corrigida, se forem da mesma direcção ou espécie, serão simultaneamente adicionadas ou subtraídas à posição média do Sol. Contudo, se forem de espécie diferente, a mais pequena é subtraída da maior. Utilizemos o resto, como acabámos de expor, acerca da propriedade aditiva ou subtractiva do número maior, e o resultado será a posição aparente do planeta referido.

ESTAÇÕES E RETROGRADAÇÕES DOS CINCO PLANETAS

Certamente que há uma ligação entre a explicação do movimento em longitude do planeta e a compreensão das suas estações, regressões e retrogradações [e ainda] da posição, tempo e extensão destes fenómenos. Estes tópicos também foram bastantes discutidos pelos astrónomos, especialmente Apolónio de Perga [Ptolomeu, *Almagesto,* XII, 1]. Mas a sua discussão prosseguiu como se os planetas se movessem só com uma não uniformidade, a que ocorre no caso do Sol e a que chamei a paralaxe, devida ao movimento do grande círculo da Terra. Suponhamos que o grande círculo da Terra é concêntrico com os círculos do planeta, pelos quais os planetas se deslocam com velocidades desiguais, na mesma direcção, isto é, para Este. Admitamos que num planeta, como Vénus e Mercúrio, dentro do grande círculo, é mais rápido na sua própria órbita do que o movimento da Terra. Desta, tracemos uma linha recta que intersecte a órbita do planeta. Bissectemos o segmento dentro da órbita. Este semi-segmento tem, em relação à linha que se estende do nosso observatório, que é a Terra, até o arco inferior e convexo da órbita intersectada, a mesma razão que o movimento da Terra tem em relação à velocidade do planeta. O ponto assim feito pela linha traçada deste modo em direcção ao arco do perigeu do círculo do planeta, separa a retrogradação do movimento directo, de maneira que o planeta dá a impressão de estar estacionário quando está localizada naquela posição. A situação é semelhante nos outros três planetas superiores, cujo movimento é mais lento do que o da Terra. Uma linha recta que seja a nossa linha de mira, intersectará o grande círculo de modo que o semi-segmento dentro daquele círculo tem, em relação à linha que se estende do planeta até a nossa vista, localizada no arco mais próximo e convexo do grande círculo, a mesma razãzo que o movimento do planeta tem em relação à velocidade da Terra. Aos nossos olhos o planeta parecerá, então, estar estacionário. Mas se a razão entre o semi-segmento, dentro do mencionado círculo, e o restante segmento exterior, excede a razão entre a velocidade da Terra e a velocidade de Vénus ou de Mercúrio, ou a razão entre o movimento de qualquer dos três planetas superiores e a velocidade da Terra, o planeta avançará para Este. Por outro lado, se a primeira razão é menor do que a segunda, o planeta retrogradará para Oeste. Para demonstrar estas afirmações, Apolónio apresenta um determinado teorema auxiliar. Embora ele esteja conforme com a hipótese de uma Terra estacionária, contudo também é compatível com os nossos princípios, baseados no movimento da Terra; por tal motivo, também a ele recorreremos. Podemos enunciá-lo da seguinte forma. Suponhamos que num triângulo o lado maior está dividido de tal modo que um dos segmentos não é menor do que o lado adjacente. A razão entre este segmento e o segmento complementar, será superior à razão inversa entre os ângulos, no lado dividido. Num triângulo *ABC*, seja o lado maior *BC*. Tomemos nele *CD* não menor do que *AC*. Dizemos que a razão entre *CD* e *BD* é maior do que a razão entre o ângulo *ABC* e o ângulo *BCA*. Eis a demonstração.

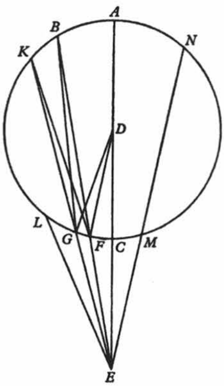


Complementemos o paralelogramo *ADCE* e sejam *BA* e *CE* traçadas de modo que se encontrem no ponto *F*. Com centro *A* e raio *AE* descreva-se um círculo. Ele deve passar por *C* ou para além dele, dado que *AE* [= *CD*] não é menor do que *AC*. Suponha-se que o círculo [traçado] contém *C*, e seja *GEC* [um seu arco].

Dado que o triângulo *AEF* é maior do que o sector *AEG*, a razão entre o triângulo *AEF* e o triângulo *AEC*, será maior do que a existente entre o sector *AEG* e o sector *AEC*. Mas o triângulo *AEF* está para o triângulo *AEC* assim como a base *FE* está para a base *EC*. Portanto, a razão entre *CD* e *DB* é também maior do que a existente entre o ângulo *ABC* e o ângulo *ACB*. Contudo, é evidente que a razão será muito maior, se não considerarmos *CD*, isto é, *AE*, igual a *AC*, mas tomarmos *AE* como maior do que *AC*.

Seja então *ABC* o círculo de Vénus ou de Mercúrio, descrito em redor do centro, *D*. Suponha-se que a Terra, *E*, se move fora do círculo, em redor do mesmo centro, *D*. Do nosso observatório em *E*, tracemos uma linha recta, *ECDA*, que passe pelo centro do círculo. Seja *A* a posição mais afastada da Terra, e *C* a mais próxima. Suponhamos que a razão entre *DC* e *CE* é maior do que a razão entre o movimento do observador e a velocidade do planeta. Sendo assim, é possível encontrar a linha *EFB*, de modo que metade de *BF* esteja para *FE* assim como o movimento do observador está para a velocidade do planeta; pois que se a linha *EFB* se afasta do centro *D*, ela diminui ao longo de *FB* e aumenta ao longo de *EF*, até que a condição requerida esteja realizada. Digo que, quando o planeta se encontra no ponto *F*, dá a impressão de estar estacionário. Por mais pequeno que seja o arco que escolhamos nos dois lados de *F*, na direcção do apogeu, verificaremos que progride, mas, [pelo contrário] que retrograda quando for na direcção do perigeu.

Em primeiro lugar, tomemos um arco, *FG*, que se estenda até ao apogeu. Prolonguemos *EGK*. Juntemos *BG*, *DG* e *DF*. No triângulo *BGE*, o segmento *BF* do lado maior excede *BG*. Assim, a razão entre *BF* e *EF* é maior do que a razão entre o ângulo *FEG* e o ângulo *GBF*. Por conseguinte a razão entre metade de *BF* e *FE* é maior do que a razão entre *FEG* e o dobro do ângulo *GBF*, igual ao ângulo *GDF*. Mas metade de *BF* está para *FE*, assim como



o movimento da Terra está para o movimento do planeta. Portanto, a razão entre o ângulo *FEG* e o ângulo *GDF* é menor do que a razão entre a velocidade da Terra e a velocidade do planeta. Consequentemente, o ângulo que tiver com o ângulo *FDG* a mesma razão que existe entre o movimento da Terra e o movimento do planeta, é maior do que o ângulo *FEG*. [Admita-se] que este ângulo maior é *FEL*. Disto resulta que durante o tempo em que o planeta atravessa o arco do círculo *GF*, considerar-se-á que a nossa linha de pontaria passou por uma distância oposta, situada entre a linha *EF* e a linha *EL*. Evidentemente, no mesmo intervalo em que o arco *GF* foi percorrido pelo planeta, como foi visto por nós, na direcção Oeste, através do ângulo mais pequeno *FEG*, a passagem da Terra levou o planeta em sentido contrário através do ângulo maior *FEL*. Daí resulta que o planeta é ainda levado em sentido contrário através do ângulo *GEL* e parece ter avançado e não permanecido estacionário. É, porém, evidente que o contrário se pode demonstrar pelo mesmo método, se na mesma figura supusermos que a razão entre metade de *GK* e *GE* é a razão entre o movimento da Terra e a velocidade do planeta, e tomarmos o arco *GF* como estendendo-se na direcção do perigeu, a partir da linha recta *EK*. Juntemos *KF*, formando o triângulo *KEF*. Nele *GE* é maior do que *EF*. A razão entre *KG* e *GE* é menor do que a razão entre o ângulo *FEG* e o ângulo *FKG*. Assim também a razão entre metade de *KG* e *GE* é menor do que a razão entre o ângulo *FEG* e o dobro do ângulo *FKG*, igual ao ângulo *GDF*. Esta relação é o inverso do que se demonstrou atrás. Pelo mesmo processo se demonstrará que a razão entre *GDF* e o ângulo *FEC* é menor do que a razão entre a velocidade do planeta e a velocidade da linha de pontaria. De acordo com isto, quando as razões se tornam iguais, à medida que o ângulo *GDF* cresce o planeta executará igualmente um movimento maior para Oeste do que exige o movimento para a frente.

Com efeito, disto resulta também com evidência, que se tomarmos *FC* e *CM* como arcos iguais, a segunda estação será em *M*. Se traçarmos a linha *EMN*, metade de *MN* estará para *ME*, assim como a velocidade da Terra está para a velocidade do planeta, tal como metade de *EF* está para *FE*.

Portanto os pontos *F* e *M* ocuparão as duas estações e delimitarão todo o arco *FCM*, enquanto regressivo, e o resto do círculo, se progressivo. Também daqui se conclui que, a quasquer distâncias, a razão entre *DC* e *CE* não excede a razão entre a velocidade da Terra e a velocidade do planeta, não se podendo traçar outra linha recta que tenha uma razão igual à razão entre a velocidade da Terra e a velocidade do planeta, e o planeta parecerá não estar nem estacionário nem regressivo. Com efeito, no triângulo *DGE*, quando uma linha recta *DC* não é menor do que *EG*, a razão entre o ângulo *CEG* e o ângulo *CDG* é menor do que a razão entre *DC* e *CE*. Mas a razão entre *DC* e *CE* não excede a razão entre a velocidade da Terra e a velocidade do planeta. Por conseguinte a razão entre o ângulo *CEG* e *CDG* é menor do que a razão entre a velocidade da Terra e a velocidade do planeta. Quando isto acontece, o planeta mover-se-á para Este e nós não encontraremos, em parte alguma da órbita, um arco no qual ele pareça retrógrado.

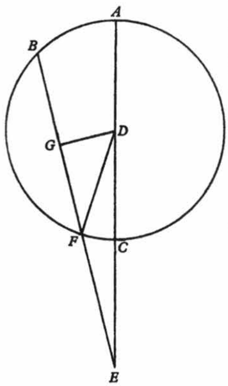
Esta demonstração aplica-se a Vénus e a Mercúrio, que estão no interior do grande círculo. Quanto aos outros três planetas superiores, a demonstração faz-se do mesmo modo e com a mesma figura, só as designações serão alteradas. Consideramos *ABC* como grande círculo da Terra e a órbita do nosso observatório. Em *E*, situamos o planeta, cujo movimento na sua própria órbita é mais lento do que a velocidade do nosso observatório sobre o grande círculo. Quanto ao resto a demonstração será em todos os aspectos como anteriormente.

COMO SE DETERMINAM OS TEMPOS, AS POSIÇÕES E OS ARCOS DA RETROGRESSÃO

Se os círculos que os planetas percorrem fossem concêntricos com o grande círculo, o que as demonstrações precedentes prometem seria facilmente confirmado, desde que a razão entre a velocidade do planeta e a velocidade do observatório permanecesse a mesma. Contudo, estes círculos são excêntricos, e esta é a razão por que os movimentos aparentes são não uniformes. Portanto, devemos admitir, em toda a parte, movimentos desiguais e corrigidos com variações nas suas velocidades, e usá-los nas nossas demonstrações, e não movimentos simples e uniformes, a não ser que suceda que o planeta esteja próximo das suas longitudes médias, as únicas posições na sua órbita onde parece ser conduzido com um movimento médio.

Demonstraremos estas afirmações com o exemplo de Marte que clarificará também as retrogradações dos outros planetas. Seja *ABC* o grande círculo, no qual está situado o nosso observatório. Coloquemos o planeta no ponto *E*. Dele tracemos uma linha recta, *ECDA*, que passe pelo centro do grande círculo. Tracemos também *EFB* e *DG*, perpendiculares a *EFB*. Metade de *BF* é igual a *GF*. A razão entre *GF* e *EF* é igual à razão entre a velocidade momentânea do planeta e a velocidade do observatório, que excede a velocidade do planeta.

O nosso objectivo é verificar que *FC* é igual a metade do arco de retrogradação, ou *ABF* [= 180° − *FC*], para conhecer a máxima distância angular do planeta em relação a *A*, quando o planeta está estacionário; e quanto mede o



ângulo *FEC*. Com efeito, desta informação podemos mostrar que é possível predizer o tempo e a posição deste fenómeno planetário. Coloquemos o planeta próximo da ápside média do círculo excêntrico, onde os seus movimentos em longitude e anomalia diferem pouco dos movimentos uniformes.

No caso do planeta Marte, quando o seu movimento médio é 1 unidade, 8′ e 7″, igual à linha *GF*, o seu movimento paraláctico, isto é, a razão entre o movimento da nossa linha de pontaria e o movimento médio do planeta é igual a 1 unidade ou à linha recta *EF*. Assim, toda a linha recta *EB* é igual a 3 unidades, 16′ 14″ [= 2 × 1° 8′ 7″ (= 2° 16′ 14″) + 1 unidade; e o rectângulo formado por *BE* e *EF* é do mesmo modo igual a 3 unidades, 16′, 14″. Mas nós mostrámos [V, 19] que o raio *DA* = 6580 unidades, quando *DE* = 10000.

[Versão primitiva:

Todo o [segmento] *EA* = 16580 [= 6580 + 10000], sendo *EC* [quando 2 × *DA* igual a 13160 é subtraído de *EA* igual a 16 580] = =3420. O rectângulo formado por *AE* e *EC* = 56 703 600 é igual ao rectângulo formado por *BE* e *EF*. Mas *BE*: *EF* é a razão dada a partir do qual obtemos a razão do rectângulo *EB* × *EF* (ao qual o rectângulo *AE* × *EC* é igual, nomeadamente, 56 703 600) para $(EF)^2$. Teremos assim *EF* com um comprimento igual a 4164 unidades, quando *DE* = 10 000 e *DF* = 6 580, [tal como a extensão total da linha *EB* = 13 618 e o restante *GF* [= $^1/_2$ (*BF* = 13 618 − 4 164 = = 9 454)] = é igual a 4 727. No triângulo *DFG*, os lados *DF* e *FG* são dados [= 6 580, 4 727] enquanto *G* é um ângulo recto. Por isso teremos o ângulo *FDG* = 39° 15′]. No triângulo *DEF*, sendo dados os lados [*DE* = 10 000; *DF* = 6580; *EF* = 4164], o ângulo *FED* = 17° 3′ e o ângulo *FDE* = 17° 2′ são dados. Por isso o arco da anomalia, relativo ao primeiro ponto estacionário, *ABF* = 162° 58′ [+ 17° 2′ = 180°]. Quando acrescentamos a este valor 2 × *FC* [17° 2], teremos desse modo 197° 2′ [162° 58′ + (2 × 17° 2′ = 34° 4′)] para o segundo arco medido a partir de *A*. Através do arco *FC* saberemos o intervalo de tempo decorrido desde o primeiro ponto estacionário até à oposição que é *C*. Quando este tempo é dobrado, dá-nos o período inteiro da retrogradação. O precedente é o que acontece nas longitudes médias do excêntrico. Mas segundo os cálculos realizados para a maior distância, a prostaférese, que é aproximadamente 1°, produz a razão entre o movimento do planeta e o movimento desigual [da linha de] pontaria ou da anomalia paraláctica, que é a linha *GF*: linha *EF* = 10 000 : 8 917, e [2 × *GF*) + + *EF* =] o segmento *BE*: *EF* = 28 917 : 8 917. Verificou-se já que *DE* tem 10 960 unidades e que *AD* = 6 580 [V, 19]. Portanto, com *DE* = = 10 000 unidades, *AD* = 6 004 [6 003,6]. Nesse caso *AE* [= *AD* + + *DE* = 6 004 + 10 000] = 16 004. O [segmento] restante *EC* [= *DE* − (*DC* = *AD*) = 10 000 − 6 004] = 3996. O rectângulo que definem [*AE* × *EC* = 16 004 × 3 996] = 63 951 984 é menor do que $(EF)^2$ em proporção à razão *BE*: *EF*. Por isso, teremos *EF* com um comprimento de 4 441 unidades, sendo *DE* = 10 000 ou *DF* = 6 004. Por conseguinte temos novamente o triângulo *DEF* com os seus lados dados e os ângulos...]:

Entretanto se *DE* tiver 60 unidades, *AD* terá 39 unidades e 29′. Toda a linha recta *AE* [− *AD* + *DE* = 39° 20′+ + 60 = 99 29′] está para *EC* [− *DE* − *EC* = 60 − − 39 29′= 20 31′] assim como 99 unidades e 29′, está para 20 unidades e 31′. O rectângulo formado por estas linhas terá 2041 unidades e 4′, sendo o rectângulo formado por *BE* e *BF* igual a ele. O resultado da comparação, quer dizer, a divisão de 2041 unidades e 4′, por 3 unidades 16′ 14″ é igual a 624 unidades e 4′; e um lado do quadrado correspon dente a este valor tem 24 unidades, 58′ e 52″, igual portanto a *EF* no sistema de unidades em que *DE* tem 60. Contudo, sendo *DE* = 10 000 unidades, *EF* terá 4 163 e *DF* [é igual a] 6 580.

Uma vez que no triângulo *DEF* os lados são dados, teremos o ângulo *DEF* com 27° 15′, igual ao ângulo de retrogradação do planeta, e *CDF* igual ao ângulo de anomalia paraláctica com 16° 50′. Na sua primeira estação, o planeta aparece ao longo da linha *EF*, e ao longo de *EC*, no lado oposto. Se o planeta de todo se não movesse para Este, o arco *CF*, com 16° 15′, compreenderia os 27° 15′ de retrogradação encontrados no ângulo *AEF*. Contudo, de acordo com a razão estabelecida entre a velocidade do planeta e a velocidade do observador para a anomalia paraláctica de 16° 50′ tem-se a uma longitude planetária de aproximadamente 19° 6′ 39″. Quando se subtrai esta quantidade de 27° 15′, o resto desde a segunda estação ao lado oposto é igual a 8° 8′, e cerca de 36 $^1/_2$ dias. Na primeira estação esta longitude de 19° 6′ 39″ é atravessada, e, assim, toda a retrogressão de 16° 16′ [2 × 8° 8′] é completada em 73 dias [2 × 36$^1/_2$ dias].

Isto aplica-se às longitudes médias do círculo excêntrico.

[Versão primitiva:

Mas segundo os cálculos executados para a maior distância, a prostaférese que retarda os movimentos uniformes dá a razão do movimento desigual do planeta para o movimento desigual da [linha de] pontaria ou a anomalia paraláctica, isto é, linha *GF*: linha *EF* = 46° 20″ 6‴: 1 unidade [2 × (*GF* = 46′ 20″) = 1 unidade 32′ 40″, + (1 = *EF*) = o [segmento] *BE*: *EF* = 2 unidades 32′ 40″: 1 unidade e o rectângulo formado por *BE* e *EF* também igual a 2 unidades 32′ 40″. Na ápside superior provou-se que *DE* tem 10 960 unidades donde se infere que *DA* = 6 580 [V, 19]. Assim se conclui que com *DE* = 60, *DA* = 36° 1′ 20″. Desse modo o segmento *AE* [= *DE* + *DA* = 60 + 36 1′ 20″] = 96 1′ 20″. O resto [= *EC*, quando 2 × *DA* é subtraído de *AE*] = 23 58′ 40″, e *AE* × *EC* = 2 302 23′ 58″. Quando este [produto] é dividido por 2 32′ 40″ [= *BE*], o quociente é 904 51′ 12″ [deveria ser 52′ 23″]. Um dos lados [raiz quadrada] deste valor = 30 4′ 51″, e esta é a linha *EF* nas unidades em que *DE* = 60. Mas com *DE* = 1 000 00, *EF* = 50 135 e *DF* = 60 037 também nessas unidades. No triângulo *DEF*, consequentemente, sendo dados todos os lados, os ângulos são dados também: *DEF* = 27° 18′ 40″ para o movimento de retrogradação do planeta, e *EDF* = 22° 9′ 3″, para a anomalia paraláctica [da linha de] pontaria. Correlativamente, e de acordo com a proporção do apogeu, a longitude desigual = 17° 19′ 3″ enquanto que o movimento uniforme = 20° 59′ 3″. Metade da retrogressão é estimada em 59′ 37″ em 40 dias aproximadamente, enquanto que a retrogressão completa em 80 dias é igual a 19° 59′ 14″ [= 2 × 9° 59′ 37″].

Com respeito ao perigeu poderemos explicar desta maneira: Encontramos a razão do movimento desigual do planeta: movimento desigual [da linha de] pontaria = 1^p 50′ 40″: 1 = *GF*: *FE*. Por isso, o rectângulo formado por *BE* e *EF* = 4 41′ 21″ [2 × (*GF* = 1 50′ 40″) = 3 41′ 20″; 3 41′ 20″ + 1 = 4 41′ 20′ × 1]. Mas provou-se que a linha *DE* é igual a 9 040′, donde *AD* = 6580 [V, 19]. Por consequência, com *DE* = 60, em tais unidades *AD* = 43 40′21″; o [segmento] *AE* [= *AD* + *DE* =

= 43 40´ 21'' + 60] = *103 40´ 21''*; e o restante CE [= $AE - 2 \times$ $\times$ AD = 103 40´ 21'' − 87 20´ 42''] = 16 19´ 39''. Por isso o rectângulo formado por AE e EC [= 103 40´ 21'' × 16 19´ 39''] = 1 672 42´ 52'' [deveria ser 1692]. Quando esta valor é dividido por 4 41´ 21'' [= $BE \times$ $\times$ EF], o quociente é 360 59´ 1'' do qual um lado [raiz quadrada] = EF = = 18 59´ 58'', sendo DE = 60.

Mas com DE = 1000.000, em tais unidades EF = 31665 e também DF = 72787. Assim, no triângulo DEF = 25° 45´ 16'' = à paralaxe retrogressiva do planeta, e EDF = 10° 53´ 13'', a separação angular entre [a linha de visão] e o ponto médio da retrogressão na oposição. Contudo, o intervalo em que [a linha de] visão passa através do arco FC = 10° 53' 13'', no seu movimento desigual o planeta percorre 19° 44´ 58'', mas no seu movimento uniforme 16° 17´ 21'', atravessando metade da retrogressão ≐ 6° em 31 $^1/_2$ dias, enquanto que a retrogressão completa monta a 12° 1´ em quase 62 $^1/_2$ dias].

Para outros lugares o procedimento é semelhante mas a velocidade momentânea do planeta, determinada pelo lugar é sempre aplicada, como notámos [V, 36]. Assim, o mesmo método de análise é válido para Saturno, Júpiter e Marte e também para Vénus e Mercúrio, desde que ponhamos o observatório na posição do planeta e o planeta na posição do observatório. Naturalmente, nestas órbitas rodeadas pela Terra, o que ocorre é o oposto ao que acontece nas órbitas que rodeiam a Terra. Por conseguinte, consideramos suficientes as observações atrás feitas, para não repetirmos sempre a mesma coisa.

Não obstante, como o movimento do planeta varia com a linha de pontaria, provoca não pequena dificuldade e incerteza em referência às estações. Esta afirmação da parte de Apolónio [V, 35] não nos dá qualquer satisfação para tais perplexidades. Assim não sei se não seria melhor investigar simplesmente as estações e em relação com o lugar mais próximo. Do mesmo modo procuramos a posição oposta do planeta, por meio da sua inserção na linha do movimento médio do Sol ou a conjunção de quaisquer planetas, a partir das quantidades conhecidas dos seus movimentos. Deixamos isso à preferência de cada um.

LIVRO VI

INTRODUÇÃO

Indicámos o melhor que nos foi possível como a revolução da Terra, que defendemos, influencia e afecta o movimento aparente dos planetas em longitude, e como faz com que todos estes fenómenos se revistam de uma regularidade precisa e necessária. Resta-nos dedicar a nossa atenção aos movimentos que provocam nos planetas um desvio em latitude e mostrar como o movimento da Terra também exerce a sua influência sobre estes fenómenos e lhes prescreve regras nesta divisão.

Esta divisão da ciência é indispensável, porque os desvios do planeta em latitude produzem não pequena modificação nos nascimentos e ocasos, primeiras visibilidades, ocultações e outros fenómenos, que foram genericamente expostos atrás. Realmente, diz-se que as posições verdadeiras dos planetas são conhecidas quando a sua longitude é determinada juntamente com o seu desvio em latitude, em relação à eclíptica. O que os antigos astrónomos julgavam ter demonstrado também aqui, baseando-se na imobilidade da Terra, consegui-lo-emos, talvez mais solidamente e com maior rigor, baseando-nos no princípio de que a Terra se move.

EXPOSIÇÃO GERAL SOBRE OS DESVIOS EM LATITUDE DOS CINCO PLANETAS

Os antigos verificaram que os desvios em latitude eram, em todos os casos, duplos, correspondendo à dupla não uniformidade do movimento em longitude de cada planeta, sendo um destes desvios ocasionado [em sua opinião] pelos círculos excêntricos e o outro pelos epiciclos. Em vez destes epiciclos, tomámos um grande círculo da Terra, que já foi mencionado muitas vezes. Não aceitámos este círculo porque ele se desvia de qualquer modo do plano da eclíptica, com a qual está unido de uma vez para sempre, pois são idênticos. Por outro lado, aceitámos o grande círculo porque as órbitas dos planetas estão inclinadas para o plano [da eclíptica] num ângulo que não é fixo e esta variação é gerada no movimento e revoluções do grande círculo da Terra.

Os três planetas superiores, Saturno, Júpiter e Marte, movem-se em longitude segundo leis que são diferentes das dos dois restantes; e de modo semelhante diferem consideravelmente no seu movimento em latitude. Por conseguinte, os antigos investigaram, primeiramente, as posições dos três primeiros planetas e os limites extremos da sua latitude Norte. Nos casos de Saturno e Júpiter, Ptolomeu encontrou, [estes limites] próximo do princípio da Constelação da Balança, mas para Marte junto do fim de Câncer, próximo do apogeu do círculo excêntrico [*Almagesto,* XIII, 1]. Contudo, no nosso tempo, verificámos que estes limites Norte, quanto a Saturno se situa em 7° de Escorpião, para Júpiter em 27° de Balança, e Marte em 27° de Leão, correspondendo ao desvio da posição do apogeu até o nosso tempo [V, 7, 12 e 16], visto que o movimento desses círculos é seguido pelas inclinações e pontos cardiais das latitudes. Numa distância do quadrante normalizada aparente em relação a estes limites, os planetas em questão parecem não se desviar em latitude, seja qual for o lugar que a Terra ocupe então. Nas referidas longitudes médias, então, considera-se que estes planetas se encontram na intersecção das suas órbitas com a eclíptica, tal como a Lua nas suas intersecções com a eclíptica. Neste caso, Ptolomeu [*Almagesto,* XIII, 1] dá a estas intersecções o nome de «nodos». A partir do nodo ascendente, o planeta entra nas regiões setentrionais e a seguir ao nodo descendente passa para as regiões austrais. Tais desvios não ocorrem porque o grande círculo da Terra, que permanece sempre invariável no plano da eclíptica, provoque qualquer latitude nestes planetas. Pelo contrário, todo o desvio em latitude vem deles, e atinge o seu máximo, nas posições a meio caminho entre estes nodos. Quando vemos os planetas aí, em oposição com o Sol e atingindo o seu ponto mais alto, à meia-noite, quando a Terra se aproxima, eles executam sempre um desvio maior do que em qualquer outra posição da Terra, movendo-se para o Norte, no hemisfério setentrional, e para o Sul, no hemisfério austral. Este desvio é maior do que o requerido pela aproximação ou pelo afastamento da Terra. Esta circunstância levou ao reconhecimento de que a inclinação da órbita do planeta não é fixa, mas se desvia num certo movimento de libração proporcionado às revoluções do círculo máximo da Terra, como se explicará, um pouco mais tarde [VI, 2].

Contudo, Vénus e Mercúrio parecem desviar-se por certos outros caminhos, embora observando uma lei definida em relação às suas ápsides média, superior e inferior. Com efeito, nas suas longitudes médias, isto é, quando a linha dos movimentos médios do Sol está à distância de um quadrante das suas ápsides superior e inferior, e os próprios planetas, à tarde ou de manhã, se encontram à distância de um quadrante das suas órbitas, em relação à mesma linha do movimento médio do Sol, os antigos não verificaram neles qualquer desvio da eclíptica. Por isso reconheram que estes planetas estavam então na intersecção das suas órbitas com a eclíptica, a qual passa pelos seus apogeus e perigeus quando estão mais afastados ou mais próximos da Terra. Então fazem desvios notáveis, que atingem o seu máximo quando os planetas se encontram a maior distância da Terra, isto é, cerca da primeira visibilidade à tarde, ou no seu ocaso de manhã, quando vemos Vénus mais para o Norte e Mercúrio mais para o Sul.

Por outro lado, numa posição mais próxima da Terra, quando se põem à tarde ou nascem de manhã, Vénus está no Sul e Mercúrio ao Norte. Inversamente, quando a Terra se encontra numa posição oposta a este lugar e na outra ápside média, isto é, quando a anomalia do círculo excêntrico é [igual a] 270°, Vénus aparece ao Sul, à maior distância da Terra, e Mercúrio ao Norte. Numa posição mais próxima da Terra, Vénus aparece ao Norte e Mercúrio ao Sul.

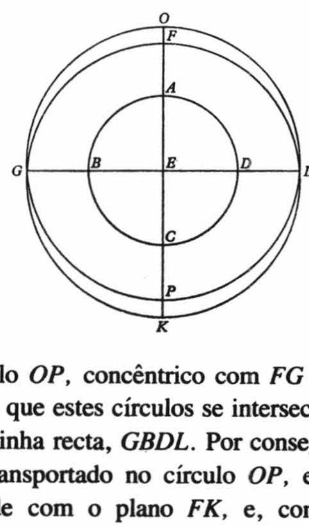
Mas quando a Terra se aproxima dos apogeus destes planetas, Ptolomeu verificou que a latitude de Vénus era Norte de manhã, e Sul à tarde. O contrário era verdadeiro para Mercúrio, cuja latitude era Sul de manhã, e Norte à tarde. No lugar oposto, com a Terra próxima do perigeu destes planetas, estas direcções são igualmente inversas, de modo que Vénus como estrela da manhã é vista ao Sul e como estrela da tarde é vista a Norte, enquanto que, de manhã, Mercúrio está a Norte, e à tarde ao Sul. Contudo, com a Terra nestes dois lugares, os antigos verificaram que o desvio de Vénus era sempre maior para Norte do que para Sul, e o de Mercúrio, maior para Sul do que para Norte. Assim, neste caso, [com a Terra nos apogeus e perigeus dos planetas], os antigos encontraram sempre o desvio de Vénus maior ao Norte do que ao Sul, e o de Mercúrio maior ao Sul do que ao Norte.

De acordo com estes factos e para esta situação [com a Terra nos apogeus e perigeus dos planetas] imaginaram uma latitude dupla e em geral tripla. A primeira que ocorre nas longitudes médias, foi por eles denominada «declinação». A segunda, que tem lugar nas ápsides superior e inferior, foi chamada «obliquação». A última, ligada à segunda, teve o nome de «desvio», sempre para o Norte, no caso de Vénus, e para o Sul, no de Mercúrio. Entre estes quatro limites, as latitudes fundem-se umas com as outras, crescendo e decrescendo, alternadamente, e dão lugar uma à outra. A todos estes fenómenos atribuiremos as circunstâncias convenientes.

TEORIA DOS CÍRCULOS PELOS QUAIS OS PLANETAS SE MOVEM EM LATITUDE

Devemos admitir, pois, que em relação a estes cinco planetas, as suas órbitas estão inclinadas em relação ao plano da eclíptica, com uma inclinação que varia, mas de forma ordenada. Com efeito, nos casos de Saturno, Júpiter e Marte, o ângulo de intersecção sofre uma certa oscilação, à volta daquela intersecção, como se fosse um eixo, tal qual expusemos ao falar da precessão dos equinócios [III, 3]. Mas, nestes três planetas, é simples e comensurável com o movimento em paralaxe, com o qual cresce e decresce, num período definido. Assim, sempre que a Terra está mais próxima do planeta, designadamente, quando atinge o seu ponto mais alto à meia-noite, a inclinação da órbita do planeta atinge o seu máximo; o seu mínimo na posição oposta; e o seu valor, médio, a meio caminho entre as duas. Daqui resulta que quando o planeta está no limite da sua máxima latitude Norte ou Sul, a sua latitude é muito maior na proximidade da Terra, do que quando se encontra mais afastado. A única causa desta variação podia ser a distância desigual da Terra, tendo em conta o princípio de que as coisas parecem maiores quando estão mais próximas do que quando estão mais afastadas. No entanto, as latitudes destes planetas aumentam e diminuem com uma variação maior [do que a produzida unicamente pelas variações da distância da Terra]. Isto não poderia acontecer a não ser que a inclinaçxão das suas órbitas também oscilasse. Mas, como dissemos, atrás [III, 3], nos movimentos que oscilam, deve aceitar-se um meio entre os extremos.

Para tornar isto mais claro, seja *ABCD* o grande círculo que está no plano da eclíptica, com o seu centro em *E*. Admita-se que a órbita do planeta está inclinada para o grande círculo. Seja *FGKL* a declinação média e permanente da órbita, com *F* no limite Norte da sua latitude, *K* no limite Sul, *G* no nodo descendente da intersecção e *L* no nodo ascendente. Seja a intersecção *BED* [da órbita do planeta com o grande círculo da Terra]. Prolonguemos *BED*, nas linhas rectas *GB* e *DL*. Estes quatro limites não se desviam a não ser com o movimento das ápsides. O movimento do planeta em longitude deve, contudo, ser entendido como ocorrendo não no plano do círculo *FG*, mas



no outro círculo *OP*, concêntrico com *FG* e inclinado para ele. Aceite-se que estes círculos se intersectam um ao outro nessa mesma linha recta, *GBDL*. Por conseguinte, enquanto o planeta é transportado no círculo *OP*, esse círculo, por vezes, coincide com o plano *FK*, e, como resultado do movimento em libração, atravessa em ambas as direcções, e por este motivo faz com que a latitude se apresente variável.

Assim [considere-se em primeiro lugar] que o planeta está na sua máxima latitude Norte, no ponto *O*, e na posição mais próxima da Terra, situada em *A*. Nesse instante, a latitude do planeta aumentará de acordo com o ângulo *OGF*, igual à inclinação máxima da órbita, *OGP*. O seu movimento é de aproximação e afastamento, porque, por hipótese, é comensurável com o movimento em paralaxe. Então, se a Terra está em *B*, *O* coincidirá com *F* e a latitude do planeta será mais pequena do que antes, no mesmo lugar. Será ainda muito menor se a Terra estiver no ponto *C*. Com efeito, *O* atravessará para a parte mais exterior da sua oscilação e deixará somente tanta latitude quanto excede a liberação subtractiva da latitude Norte, designadamente o ângulo igual a *OGF*. Por conseguinte, através de *CDA*, o semicírculo complementar, a latitude Norte do planeta, situado junto de *F*, aumentará até que a Terra volte ao primeiro ponto, *A*, do qual partiu.

Quando o planeta estiver localizado ao Sul, próximo do ponto *K*, o seu comportamento e vicissitudes serão os mesmos, quando o movimento da Terra é tomado como começando em *C*. Suponhamos, porém, que o planeta está num dos nodos *G* ou *L*, em oposição ou conjunção com o Sol; embora os círculos *FK* e *OP* estejam então na sua máxima inclinação um para o outro, nenhuma latitude se detectará no planeta, uma vez que ele ocupa uma intersecção dos círculos. Tendo isto em conta, facilmente se compreende como a latitude Norte do planeta diminui de *G* para *K*, enquanto desaparece completamente e atravessa para o Norte, em *L*.

Os três planetas superiores comportam-se do modo seguinte. Dado que Vénus e Mercúrio diferem deles, em longitude, há também uma diferença não pequena em latitude, porque o grande círculo é intersectado pelas órbitas dos planetas inferiores nos seus apogeus e perigeus. Nas suas ápsides médias, por outro lado, as suas inclinações máximas, como as dos planetas superiores, são modificadas por uma oscilação. Os planetas inferiores, contudo, sofrem uma oscilação adicional diferente da primeira. Não obstante, ambos são comensuráveis com as revoluções da Terra, mas não da mesma forma. Com efeito a primeira oscilação tem a propriedade de que, enquanto a Terra volta novamente às ápsides dos planetas inferiores, o movimento em oscilação faz duas revoluções, tendo como seu eixo a intersecção atrás mencionada, através dos apogeus e perigeus. Daqui resulta que, todas as vezes que a linha do movimento médio do Sol está no seu perigeu ou apogeu, o ângulo de intersecção atinge o seu máximo, enquanto está sempre no seu mínimo nas longitudes médias.

Por outro lado, a segunda oscilação, que se sobrepõe à primeira, difere dela por ter um eixo móvel. Assim, quando a Terra se encontra na longitude média de Vénus e de Mercúrio, o planeta está sempre no eixo, isto é, nesta intersecção das oscilações. Por contraste, o planeta está na sua divergência máxima [do eixo da segunda oscilação] quando a Terra está alinhada com o apogeu ou perigeu do planeta, Vénus inclinando-se sempre para o Norte, como dissemos [VI, 1], e Mercúrio, para o Sul. Contudo, nessas ocasiões os planetas não teriam latitude produzida pela primeira e simples declinação.

Assim, por exemplo, suponhamos que o movimento médio do Sol está no apogeu de Vénus e o planeta está na mesma posição. Evidentemente que, uma vez que nesse tempo o planeta está na intersecção da sua órbita com o plano da eclíptica, não haveria [então] latitude devida à simples declinação e à primeira oscilação. Mas a segunda oscilação, que tem a sua intersecção ou eixo ao longo de um diâmetro transversal do círculo excêntrico, sobrepõe a sua máxima divergência ao planeta, porque corta em ângulos rectos o diâmetro que passa através das ápsides superior e inferior.

Por outro lado, suponha-se que o planeta está num ou outro dos pontos à distância de um quadrante [do seu apogeu] e próximo das ápsides médias da sua órbita. Nesse momento o eixo desta segunda oscilação coincidirá com a linha do movimento médio do Sol. Para a divergência

Norte, Vénus acrescentará o desvio máximo que subtrai à divergência Sul, deixando que diminua. Deste modo a oscilação do desvio é proporcional ao movimento da Terra.

Para compreendermos isto ainda mais facilmente, reproduzamos em *ABCD* o grande círculo; seja *FGKL* a órbita de Vénus ou de Mercúrio, círculo excêntrico do círculo *ABC*, inclinado sobre ele com a obliquidade média; seja *FG* a sua intersecção, sendo *F* o apogeu da órbita e *G* o seu perigeu. Para uma mais completa demonstração, tomemos primeiramente a inclinação de *GKF*, o círculo excêntrico da órbita, como simples e constante, ou, se preferirmos, a meio caminho entre o mínimo e o máximo, mas admitindo que a intersecção *FG* se desvia com o movimento do perigeu e do apogeu. Quando a Terra está na intersecção, isto é, em *A* ou em *C*, e o planeta está na mesma linha, é evidente que não tem então latitude. Com efeito, toda a sua latitude está nos lados, nos semicírculos *GKF* e *FLG*. Aí o planeta desvia-se para Norte ou para Sul, como se disse [VI, 2], de acordo com a inclinação do círculo, *FKG* para o plano da eclíptica. Este desvio do planeta chama-se «obliquação», segundo alguns; outros dão-lhe o nome de «reflexão».

[Versão primitiva:
Assim, quando a linha do movimento médio do Sol passa através do apogeu ou perigeu do planeta, o corpo está então no seu maior desvio, qualquer que seja o lugar da sua órbita em que possa estar localizado, ao passo que não haverá nenhum afastamento [quando a linha do movimento médio do sol] está [próxima] das ápsides médias do planeta].

Por outro lado, quando a Terra está em *B* ou *D*, isto é, nas ápsides médias do planeta, *FKG* e *GLT*, denominadas as «declinações», terão as mesmas latitudes, em cima e em baixo. Assim, diferem das primeiras mais em nome do que de facto, e, nas posições médias, até os nomes são permutados. Contudo, verifica-se que o ângulo de inclinação destes círculos é maior na obliquação do que na declinação.

De acordo com isto, imaginou-se que tal disparidade ocorria como resultado de uma oscilação, balançando à volta da intersecção, *FG*, como seu eixo, de harmonia com o que se disse atrás [VI, 2]. Deste modo, quando conhecemos este ângulo de intersecção nos dois lados, da diferença entre eles facilmente deduzimos a oscilação do seu mínimo ao seu máximo.

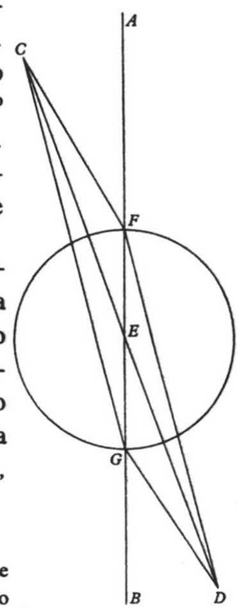
Imaginemos agora um outro círculo de desvio, inclinado sobre *GKFL*. Suponha-se que ele é concêntrico no caso de Vénus; e, no caso de Mercúrio, círculo excêntrico dum

excêntrico, como se indica em outro lugar [VI, 2]. Admita-se mais que a sua intersecção, *RS*, serve como eixo desta oscilação, que se move num círculo, de acordo com a regra seguinte. Quando a Terra está em *A* ou *B*, o planeta está no limite extremo do seu desvio, onde quer que seja, por exemplo, no ponto *T*. Na medida em que a Terra se vá afastando de *A*, entende-se que o planeta se move numa distância equivalente a *T*. Entretanto, a obliquidade do círculo de desvio diminui. Disto resulta que, quando a Terra atravessou o quadrante *AB*, entende-se que o planeta chegou ao nodo desta latitude, isto é, *R*. Nesse momento, contudo, os planos coincidem no ponto médio da oscilação e prosseguem em direcções opostas. Por conseguinte, o semicírculo complementar de desvio, que anteriormente era austral, salta para o Norte. Quando Vénus avança para este semicírculo, deixa o Sul e prossegue para o Norte, para nunca voltar ao Sul como resultado desta oscilação. De modo semelhante, Mercúrio prossegue na direcção oposta e permanece a Sul. Mercúrio difere também em oscilar, não num círculo concêntrico do círculo excêntrico, mas num círculo excêntrico dum excêntrico. Usámos um epiciclo na demonstração da não uniformidade do seu movimento em longitude [V, 25]. Aí, contudo, a sua longitude é considerada separada da sua latitude; aqui, a sua latitude é considerada separada da sua longitude. Estas estão incluídas em uma e mesma revolução e são igualmente completadas desse modo. Por conseguinte, com toda a evidência, ambas as variações podiam ser produzidas por um único movimento e pela mesma oscilação, ao mesmo tempo excêntrica e oblíqua. Não há outra hipótese senão a que acabamos de apresentar e que discutiremos mais amplamente a seguir [VI, 5-8].

QUAL A INCLINAÇÃO DAS ÓRBITAS DE SATURNO, JÚPITER E MARTE?

Depois de apresentar a teoria das latitudes dos cinco planetas, devemos voltar agora aos factos e analisar pormenores; em primeiro lugar [devemos determinar] qual a inclinação de cada um dos círculos. Calculamos estas inclinações por meio do grande círculo que passa pelos pólos do círculo inclinado e intersecta a eclíptica segundo ângulos rectos. Neste círculo, os desvios em latitude são determinados; e a partir do conhecimento destes, ficará aberto o caminho para achar as latitudes de cada um dos planetas.

Começando outra vez pelos três planetas superiores, nos limites de latitude mais a Sul, como se mostra na exposição de Ptolomeu [*Almagesto*, XIII, 5], quando estão em oposição, Saturno desvia-se 3° 5′, Júpiter 2° 7′, e Marte 7° 7′. Por outro lado, nas posições opostas, isto é, quando estão em conjunção com o Sol, Saturno desvia-se 2° 2′, Júpiter 1° 5′, e Marte apenas 5′, de modo que quase está na eclíptica. Estes valores podiam ser deduzidos das latitudes observadas por Ptolomeu cerca do tempo dos desaparecimentos e primeiras visibilidades do planeta.



Aceitando estas condições, considere-se um plano perpendicular à eclíptica passando pelo seu centro e que a intersecte em *AB;* e suponha-se que a sua intersecção com o círculo excêntrico de qualquer dos três planetas é *CD*, passando pelos mais afastados limites a Sul e a Norte. Seja *E* o centro da eclíptica; *FEG*, o diâmetro do grande círculo da Terra; *D*, o limite Sul, e *C*, o limite Norte. Juntemos *CF*, *CG*, *DF* e *DG*.

[Versão primitiva:

Agora como exemplo utilizarei Marte porque ele excede em latitude todos os outros planetas. Deste modo, quando ele se encontra oposto ao ponto D, com a Terra colocada em G [corrigido de F], o ângulo AFC é dado e igual a 7° 7′. Mas o ponto C é dado como posição de Marte no apogeu. A partir dos lados previamente estabelecidos do círculo, temos CE igual 1 unidade 22′ 20″, com FG [inclinado para FE] igual a uma unidade. No triângulo CEF, a razão dos lados CE e EF é dada, assim como o ângulo CFE. Por isso deveremos também ter como dado CEF, igual ao maior ângulo da inclinação do excêntrico = 5° 11′, conforme a doutrina dos triângulos planos. Todavia, quando a Terra está na posição contrária, isto é, em G [deveria ter sido corrigida para F], enquanto que o planeta se encontra ainda em C, o ângulo CGF é igual ao ângulo da latitude aparente = 4′].

Ao tratar dos planetas atrás, já deduzimos para cada um, as razões entre EG, a órbita da Terra, e ED, [o raio do] círculo excêntrico do planeta, para quaisquer posições dadas. Mas os lugares das latitudes máximas são também dados por observação. Por conseguinte, BGD, o ângulo da latitude Sul máxima é dado como um ângulo externo do triângulo EGD. Segundo os teoremas sobre os triângulos planos, o ângulo interno oposto, GED, também será dado como ângulo da inclinação Sul máxima do círculo excêntrico, em relação ao plano da eclíptica. De igual modo, demonstraremos a inclinação mínima, recorrendo à latitude Sul mínima, por exemplo, ou seja por meio do ângulo EFD. Visto que no triângulo EFD a razão entre os lados EF e ED é dada, assim como o ângulo EFD, teremos o ângulo externo GED dado, como o ângulo da mínima inclinação Sul. De acordo com isto, a partir da diferença entre as duas inclinações, obteremos toda a oscilação do círculo excêntrico em relação à eclíptica. Além disso, por meio destes ângulos de inclinação, calcularemos as latitudes setentrionais opostas, tais como AFC e EGC. Se estas concordarem com as observações, indicarão que não cometemos qualquer erro.

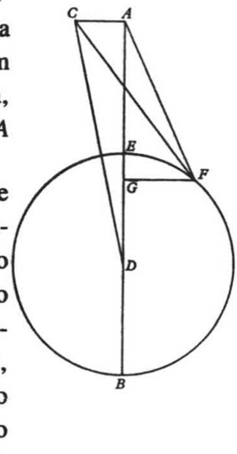
Usaremos Marte como exemplo, pois excede todos os outros planetas em latitude. A sua latitude Sul máxima foi fixada por Ptolomeu em [cerca de] 7° quando Marte estava no perigeu e a sua máxima latitude Norte em 4° 20′ [*Almagesto*, XIII, 5]. No entanto, tendo determinado o ângulo *BGD* com 6° 50′, achámos o ângulo correspondente, *AFC*, com cerca de 4° 30′. Dado que *EG* está para *ED* assim como 1 unidade está para 1 unidade 22′ 26″, podemos concluir, a partir disto e do ângulo *BGD*, que o ângulo *DEG*, inclinação Sul máxima, tem cerca de 1° 51′. Visto que *EF* está para *CE* assim como 1 unidade está para 1 unidade 39′ 57″ [V, 19], e o ângulo *CEF* é igual a *DEG* com 1° 51′, e consequentemente o mencionado ângulo externo, *CFA*, é igual a $4^1/_2$° quando o planeta está em oposição. Similarmente, na posição oposta, quando está em conjunção com o Sol, suponhamos que o ângulo *DEF* é igual a 5′. A partir dos lados dados, *DE* e *EF*, juntamente com o ângulo *EFD*, obteremos o ângulo *EDF* e o ângulo externo, *DEG*, da inclinação mínima, com cerca de 9′.

Este resultado também nos permite conhecer o ângulo *CGE* de latitude Norte, com cerca de 6′. Ora, se subtrairmos a inclinação mínima da máxima, isto é, 9′ de 1° 51′, o resto são 1° 41′ aproximadamente. Esta é a oscilação desta inclinação e metade da oscilação são cerca de 50 $^1/_2$′.

De modo análogo, os ângulos de inclinação dos outros dois planetas, Júpiter e Saturno, foram determinados em conexão com as suas latitudes. Assim, a inclinação máxima de Júpiter é de 1° 42′; a sua inclinação mínima, 1° 18′. Portanto, toda a sua oscilação não compreende mais do que 24′. Por outro lado, a inclinação máxima de Saturno vale 2° 44′; a sua inclinação mínima, 2° 16′; a oscilação interveniente, 28′. Assim, através dos ângulos mais pequenos de inclinação, que ocorrem na posição oposta, quando os planetas estão em conjunção com o Sol, os seus desvios, em latitude, da eclíptica aparecerão com 2° 3′, quanto a Saturno e 1° 6′ quanto a Júpiter. Estes valores têm de ser determinados e retidos na construção das Tabelas que vêm depois.

EXPOSIÇÃO GERAL DE QUAISQUER OUTRAS LATITUDES DESTES TRÊS PLANETAS

Do que atrás fica exposto, deduzir-se-ão claramente, do mesmo modo, as latitudes particulares destes três planetas, no caso geral. Como anteriormente, imaginemos a intersecção *AB* do plano perpendicular à eclíptica que passa pelos limites dos seus maiores desvios, com o limite Norte em *A*. Considere-se a linha recta *CD* como a intersecção da órbita do planeta [com a eclíptica]. Suponha-se que *CD* intersecte *AB* no ponto *D*. Tendo *D* como centro, descrevamos *EF*, o grande círculo da Terra. De *E*, onde a Terra está alinhada com o planeta, em oposição, tomemos um arco conhecido *EF*. De *F* e *C*, a posição do planeta, tracemos *CA* e *AG*, perpendiculares a *AB*. Juntemos *FA* e *FC*.



Nesta situação, procurámos primeiramente o valor de *ADC*, ângulo da inclinação do círculo excêntrico. Mostrou-se [VI, 3] que atinge o seu máximo quando a Terra está no ponto *E*. A sua oscilação total, contudo, como é exigido pela natureza da oscilação, revelou-se proporcional à revolução da Terra, no círculo *EF*, determinado pelo diâmetro, *BE*. Por conseguinte, porque o arco *EF* é dado, a razão entre *ED* e *EG* será dada, e esta é a razão entre a oscilação total e aquela que se acabou de separar do ângulo *ADC*. Assim, neste caso, é dado o ângulo *ADC*.

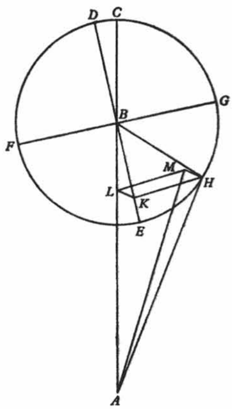
Por conseguinte, no triângulo *ADC*, sendo os ângulos dados, todos os seus lados são dados. Mas a razão entre *CD* e *ED* é dada, segundo o que disse atrás. Também é dada, portanto, a razão entre *CD* e *DG*, diferença entre *ED* e *EG*. Assim, as razões tanto entre *CD* como [entre] *AD* e *GD* são conhecidas. De acordo com isto, *AG*, diferença entre *AD* e *GD*, também é dada. Daqui se infere que *FG* é igualmente dada, pois é metade da corda subtendida pelo dobro de *EF*. Por conseguinte, no triângulo rectângulo *AGF*, sendo dados dois lados [*AG* e *RG*], a hipotenusa *AF* é dada e a razão entre *AF* e *AC* também. Assim, finalmente, no triângulo rectângulo *ACF*, sendo dados dois lados [*AF* e *AC*], o ângulo *AFC* será dado, e este é o ângulo da latitude aparente, que procurávamos.

Tomaremos mais uma vez com Marte um exemplo desta análise. Seja o limite máximo da sua latitude Sul próximo de *A*, que ocorre quase na sua ápside inferior. Contudo, considere-se a posição do planeta em *C*, onde se mostrou [VI, 3] que o ângulo de inclinação, *ADC*, estava no seu máximo, 1° 50′, quando a Terra se encontrava no ponto *E*. Consideremos agora a Terra no ponto *F*, e seja *EF* o movimento em paralaxe, com 45°. Por conseguinte, a linha recta *FG* é dada com 7 071 unidades, sendo *ED* = 10 000, e *GE* terá 2 929 unidades, [pois é] diferença entre o raio [10 000 unidades] e *GD* com 7 071. Mas metade de *ADC*, o ângulo de oscilação, mostrou-se que media 0° 50$^1/_2$′ [VI, 3]. Nesta situação, a razão entre o seu aumento e decréscimo, é igual à razão entre *DE* e *GE* ou, aproximadamente, a razão entre 50 $^1/_2$′ e 15′. Se subtrairmos esta última quantidade de 1° 50′, o resto, 1° 35′, é igual a *ADC*, o ângulo de inclinação, no caso presente. Por conseguinte os ângulos e lados do triângulo *ADC* serão dados. Mostrou-se que *CD* tinha 9040 unidades e *ED* 6 580 [V, 19]. Assim, no triângulo rectângulo *AFG*, a perpendicular *AG* tem 4383 unidades, e a base *FG* = 4 653. Daqui resulta que a hipotenusa *AF* tem 6 392 unidades. Portanto, e finalmente, o triângulo *ACF* tem *CAF*, um ângulo recto, juntamente com os lados dados, *AC* e *AF* [– 249$^1/_2$ e 6 392 unidades]. Daqui se infere que o ângulo *AFC* é dado com 2° 15′, igual à latitude aparente quando a Terra está situada em *F*. Prosseguiríamos a análise de modo análogo, em relação aos outros dois planetas, Saturno e Júpiter.

Capítulo V

AS LATITUDES DE VÉNUS E MERCÚRIO

Faltam agora Vénus e Mercúrio. Os seus desvios em latitude, como dissemos [VI, 1], serão demonstrados juntamente com três alterações latitudinais interligadas. Para podermos separá-las umas das outras, começaremos por uma chamada «declinação», pois é mais simples de tratar. Esta é a única que, por vezes, está separada das outras. Esta separação ocorre próximo das longitudes médias e dos nodos, quando, segundo os movimentos em longitude corrigidos, a Terra está localizada à distância de um quadrante do apogeu e perigeu do planeta. Se a Terra está perto do planeta, os antigos verificaram que a latitude Sul ou Norte de Vénus era de $6^{\circ}\ 22'$ e de $4^{\circ}\ 5'$ [no caso] de Mercúrio; mas com a Terra, à sua máxima distância do planeta, era de $1^{\circ}\ 2'$ para Vénus e de $1^{\circ}\ 45'$, para Mercúrio [Ptolomeu, *Almagesto*, XIII, 5]. Nestas circunstâncias, os ângulos de inclinação do planeta são conhecidos através das Tabelas de prostaféreses apresentadas [VI, 8]. Assim, quando Vénus se encontra à sua maior distância da Terra, com uma latitude de $1^{\circ}\ 2'$ e à mínima [distância da Terra] com uma latitude de $6^{\circ}\ 22'$, convém-lhe, nos dois casos, um arco de aproximadamente $2\,^{1}/_{2}{}^{\circ}$ de inclinação orbital. Quando Mercúrio se encontra mais afastado da Terra, a sua latitude é de $1^{\circ}\ 45'$, e quando se encontra mais próximo, a uma latitude de $4^{\circ}\ 5'$, é necessário um arco de $6\,^{1}/_{4}{}^{\circ}$, como inclinação da sua órbita. Deste modo, os ângulos de inclinação da órbita são $2^{\circ}\ 30'$ para Vénus e $6\,^{1}/_{4}{}^{\circ}$ para Mercúrio. no sistema em que 360° são iguais a 4 ângulos rectos. Neste caso, cada uma das latitudes particulares em declinação pode ser explicada, como vamos mostrar agora, começando por Vénus.



Considere-se a eclíptica como o plano de referência. Suponha-se que um plano perpendicular a ele e passando pelo seu centro, o intersecta segundo *ABC*. Seja *DBE* a intersecção da eclíptica com o plano orbital de Vénus; *A* o centro da Terra; *B* o centro da órbita do planeta; e *ABE* o ângulo da inclinação da órbita para a eclíptica,. Com o centro em *B*, descrevamos a órbita *DFEG*. Tracemos o diâmetro, *FBG*, perpendicular ao diâmetro *DE*. Imaginemos que o plano da órbita está de tal modo relacionado com o plano perpendicular estabelecido que as linhas assim traçadas perpendiculares a *DE*, são paralelas umas às outras e ao plano da eclíptica, em que *FBG* é a única perpendicular [deste tipo].

Partindo das linhas rectas dadas, *AB* e *BC*, conjuntamente com *ABE*, ângulo de inclinação dado, propomo-nos encontrar quanto o planeta se desvia em latitude. Assim, por exemplo, suponha-se que o planeta está à distância de 45° de *E*, o ponto mais próximo da Terra. Seguindo Ptolomeu [*Almagesto*, XIII, 4], escolhemos este ponto para que fique claro se a inclinação da órbita produz alguma variação na longitude de Vénus e Mercúrio. Com efeito, tais variações teriam sido observadas no seu máximo, a cerca de meio caminho entre os pontos cardiais, *D* e *F*, *E* e *G*. A principal razão é esta: quando o planeta está localizado nestes 4 pontos cardiais, tem a mesma latitude que teria sem qualquer declinação, como é evidente.

Portanto, tomemos um arco *EH*, com 45°, como dissemos. Tracemos *AK* perpendicular a *BE*. Tracemos *KL* e *HM* perpendiculares à eclíptica, como plano de referência. Juntemos *HB*, *LM*, *AM* e *AH*. Teremos *LKHM*, um paralelogramo com 4 ângulos rectos, pois *HK* é paralelo ao plano da eclíptica [*KL* e *HM* foram traçados perpendicularmente à eclíptica]. O lado, *LM*, do paralelogramo, é definido pelo ângulo *LAM*, ângulo da prostaférese longitudinal. Mas o ângulo, *HAM*, abrange o desvio em latitude, dado que *HM* também cai perpendicularmente sobre o mesmo plano da eclíptica. Ora, visto que se sabe ser o ângulo *HBE* dado, com 45°, *HK*, metade da corda subtendida pelo dobro de *HE*, terá 7 071 unidades, sendo *EB* = 10 000.

De modo semelhante, no triângulo *BKL*, o ângulo *KBL* é dado com 2 $^1/_2$° [VI, 5], *BKL* é um ângulo recto e a corda *BK* tem 7071 unidades, sendo *BE* igual a 10 000. Daqui resulta que os lados restantes, *KL* e *BL*, têm, respectivamente, 308 unidades e 7 064, mas, dado que, como se demonstrou anteriormente [V, 21], *AB* está para *BE*, assim como 10 000 está para 7 193, aproximadamente, os lados restantes, *HK*, *HM* e *BL*, terão, respectivamente, 5 086 unidades, 221 e 5 081, sendo *HM* igual a *KL*. Assim, *LA*, diferença entre *AB* e *BL*, tem 4 919 unidades.

Ora, no triângulo *ALM*, dados os lados *AL* e *LM* (que é igual a *HK*) e *ALM* como ângulo recto, verificamos que a hipotenusa, *AM*, tem 7 075 unidades e o ângulo, *MAL*, mede 45° 57'. Esta é a prostaférese ou grande paralaxe de Vénus, segundo o cálculo.

De modo semelhante, no triângulo *AMH*, sendo dado o lado *AM* com 7 075 unidades e o lado *MH*, igual a *KL* [= 221 unidades], o ângulo *MAH* é conhecido com 1° 47', que é a declinação latitudinal. Mas se não foi [considerado supérfluo] analisar a variação em longitude a que esta declinação de Vénus dá lugar, tomemos o triângulo, *ALH*, tendo em conta que *LH* é a diagonal de *LKHM*. Com efeito, *LH*, tem 5091 unidades, *AL* = 4 919. O ângulo *ALH* é um ângulo recto. Assim, a hipotenusa, *AH*, obtém-se com 7 079 unidades. Deste modo, dada a razão entre os lados, o ângulo *HAL* tem 45° 59'. Mas mostrou-se que *MAL* media 45° 57', portanto, a diferença é apenas de 2'. *Q. E. D.*

De modo semelhante, demonstraremos agora as latitudes de declinação em Mercúrio por meio de uma figura semelhante à anterior. Admitamos, pois, que o arco *BH* = 815° e que cada um dos segmentos *HK* e *KB* é tomado, como antes, com 7 071 unidades, e a hipotenusa *HB* com 10 000. Logo, como pode inferir-se das diferenças em longitude, segundo o que se mostrou atrás, [V, 27], o raio *BH* tem 3 953 unidades e *AB* = 9 964, assim como *BK* e *KH* terão ambos 2 795 unidades. Mostrámos que *ABE*, o ângulo de inclinação, tem 6° 15′ [VI, 5], com 360° equivalendo a 4 ângulos rectos.

Assim, no triângulo *BKL*, os ângulos são dados. De acordo com isto, *KL* tem 304 unidades, e a perpendicular *BL* = 2 778. Por conseguinte, *AL*, diferença entre *AB* e *BL*, tem 7 186 unidades. Mas *LM*, igual a *HK*, tem 2 795 unidades. Daqui resulta que no triângulko *ALM*, é um ângulo recto, e os dois lados *AL* e *LM*, são dados. Por conseguinte, teremos a hipotenusa, *AM*, com 7 710, e o ângulo *LAM* com 21° 16′, a prostaférese calculada.

Do mesmo modo, no triângulo *AMH*, são dados dois lados, *AM* e *MH*, definindo o ângulo recto *M*. Assim se obtém o ângulo *MAH* com 2° 16′, a latitude que procurávamos. Pode perguntar-se que latitude é devida à prostaférese verdadeira e aparente. Tomemos *LH*, a diagonal do paralelogramo. A partir dos lados concluímos que ela tem 2 811 unidades e *AL* = 7 186. Isto mostra-nos que o ângulo *LAH* vale 21° 23′, a prostaférese aparente. Excede o anterior cálculo em cerca de 7′. *Q. E. D.*

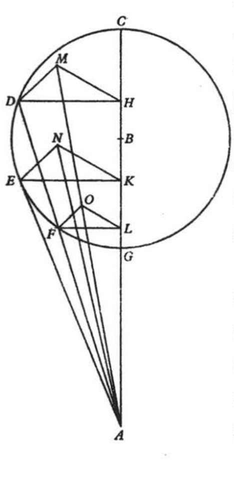
A SEGUNDA DIGRESSÃO LONGITUDINAL DE VÉNUS E MERCÚRIO, DEVIDA À INCLINAÇÃO DAS SUAS ÓRBITAS NO APOGEU E NO PERIGEU

As observações anteriores referiram-se à digressão latitudinal destes planetas, que ocorre próximo das longitudes médias das suas órbitas. Estas latitudes, como dissemos [VI, 1], chamam-se «declinações». Vamos agora discutir as latitudes que ocorrem próximo dos perigeus e apogeus. Com estas latitudes está confundido o desvio ou terceira digressão latitudinal. Este desvio não aparece nos três planetas superiores, mas em Vénus e Mercúrio pode distinguir-se e separar-se mais facilmente, e de modo racional como se vê a seguir.

Ptolomeu [*Almagesto*, XIII, 4] observou que estas latitudes apareciam no seu máximo quando os planetas estavam em linhas rectas, traçadas do centro da Terra, tangentes às suas órbitas. Isto acontece, como dissemos [VI, 21, 27], quando os planetas estão nas suas distâncias máximas do Sol, de manhã e à tarde. Ptolomeu também verificou [*Almagesto*, XIII, 3] que as latitudes Norte de Vénus eram $^1/_3{}^{\circ}$ maiores do que as do Sul, mas as latitudes Sul de Mercúrio eram cerca de $^1/_2{}^{\circ}$ maiores do que as do Norte.

Contudo, desejando aligeirar a dificuldade e o trabalho dos cálculos, aceitou $2^1/_2{}^{\circ}$ como uma espécie de quantidade média para os valores variáveis da latitude, principalmente porque julgava que disso não resultaria qualquer erro importante, como também nós mostraremos a seguir [VI, 7]. Estes graus são subtendidos pelas latitudes, no círculo à volta da Terra, e em ângulos rectos com a eclíptica, círculo em que se medem as latitudes. Se tomarmos agora $2\ ^1/_2{}^o$ como a digressão igual para os dois lados da eclíptica e excluirmos, entretanto, o desvio, as nossas demonstrações serão mais simples e mais fáceis para que determinemos as latitudes das obliquações.

Devemos mostrar a seguir, primeiramente, que o desvio desta latitude atinge o seu máximo próximo do ponto de contacto do círculo excêntrico, onde as prostaféreses longitudinais estão também no seu máximo. [Suponha-se] que os planos da eclíptica e do círculo excêntrico, quer de Vénus quer de Mercúrio, se intersectam numa linha através do apogeu e do perigeu do planeta. Na intersecção, tomemos *A* como a posição da Terra, e *B* como o centro do círculo excêntrico, *CDEFG*, que está inclinado sobre a eclíptica. Assim, no círculo excêntrico, quaisquer linhas rectas traçadas perpendicularmente a *CG*, definem ângulos iguais à inclinação do [excêntrico em relação à eclíptica]. Tracemos *AE*, tangente ao círculo excêntrico, e *AFD*, uma secante. Além disso, dos pontos *D*, *E* e *F*, tracemos *DH*, *EK* e *FL*, perpendiculares a *CG*; e também *DM*, *EN* e *FO*, perpendiculares ao plano horizontal da eclíptica. Juntemos *MH*, *NK*, e *OL*, assim como *AN*, e *AOM*. Com efeito, *AOM* é uma linha recta, pois que três dos seus pontos estão em dois planos, designadamente o plano da eclíptica e o plano *ADM* perpendicular ao plano da eclíptica. Quanto à inclinação estabelecida, então, os ângulos *HAM* e *KAN*, definem os prostaféreses longitudinais destes planetas, enquanto os seus desvios em latitude são definidos pelos ângulos *DAM* e *EAN*.



Em primeiro lugar dizemos que o maior de todos os ângulos de latitude é *EAN*, formado no ponto de contacto onde a prostaférese longitudinal está também quase no seu máximo. Com efeito, o ângulo *EAK* é o maior de todos [os ângulos longitudinais]. Por conseguinte, a razão entre *KE* e *EA* é maior do que a razão entre *HD* e *DA*, assim como a razão entre *LF* e *FO*. Mas *EK* está para *EN* assim como *HD* está para *DM* e como *LF* está para *FO*, visto que os ângulos correspondentes são iguais, como dissemos. Além disso, *M*, *N* e *O* são ângulos rectos. Portanto, a razão entre *NE* e *EA* é maior do que a razão entre *MD* e *DA*, assim como entre *OF* e *FA*. Mais uma vez, *DMA*, *ENA* e *FOA* são ângulos rectos. Por conseguinte, o ângulo *EAN* é maior do que *DAM* e todos os outros ângulos que são formados deste modo.

A diferença máxima na prostaférese longitudinal causada por esta obliquação é, portanto, claramente também aquela que ocorre no afastamento maior, próximo do ponto *E*. Com efeito, devido à igualdade dos ângulos correspondentes [em triângulos semelhantes], *HD* está para *HM*, assim como *KE* está para *KN*, e assim como *LF* está para *LO*. A mesma razão é válida para as suas diferenças [*HD* – *HM*, *KE* – *KN*, *LF* – *LD*]. Assim, a diferença entre *EK* e *KN* comparada com *EA* equivale a uma razão superior à existente entre as diferenças restantes e os lados como *AD*. Daqui resulta que também é evidente que a razão entre a maior prostaférese longitudinal e o máximo desvio latidudinal será a mesma que a razão entre as prostaféreses longitudinais dos segmentos do círculo excêntrico e os desvios latidudinais. Com efeito, a razão entre *KE* e *EN* é igual à razão entre todos os lados como *LF* e *HD*, e os lados como *FO* e *DM*. *Q. E. D.*

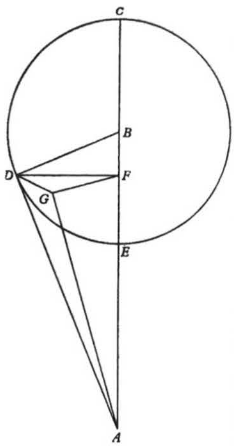
VALOR DOS ÂNGULOS DE OBLIQUAÇÃO DOS DOIS PLANETAS, VÉNUS E MERCÚRIO

Depois destas observações preliminares vejamos o valor de um ângulo definido pela inclinação dos planos destes dois planetas.

Recordemos o que se disse atrás [VI, 5], isto é, que cada um dos planetas, quando se encontrava a meio caminho entre a máxima e mínima distâncias em relação ao Sol, está mais a Norte ou mais a Sul, num máximo de 5°, em direcções opostas, dependendo da sua posição na [sua] órbita. Com efeito, no apogeu e no perigeu do círculo excêntrico o desvio de Vénus é imperceptivelmente maior ou menor do que 5°, afastando-se Mercúrio desta quantidade $^1/_2$°, mais ou menos.

Como anteriormente, seja *ABC* a intersecção da eclíptica com o círculo excêntrico. Com centro em *B*, descrevamos a órbita do planeta inclinada sobre o plano da eclíptica na forma exposta atrás. Do centro da Terra tracemos a linha recta *AD*, tangente à órbita do planeta, no ponto *D*. Deste ponto tracemos as perpendiculares, *DF* sobre *CBE*, e *DG* sobre o plano horizontal da eclíptica. Juntemos *BD*, *FG* e *AG*. Admitamos também que no caso dos dois planetas, o ângulo *DAG*, que compreende metade da supramencionada diferença em latitude, tem $2^1/_2$°, sendo 4 ângulos rectos 360°. Tentemos encontrar, para ambos os planetas, a grandeza do ângulo de inclinação dos planos, isto é, o ângulo *DFG*.

No caso do planeta Vénus, tendo o raio da órbita 7 193 unidades, a maior distância do planeta [à Terra] que se



verifica no apogeu, é 10 208 unidades, como se mosttrou, e a sua distância mínima, no perigeu, 9 792 [V, 21 e 22; 10 000 − 208]. O valor médio são 10 000 unidades, que adoptámos para as demonstrações. Ptolomeu quis aligeirar a dificuldade e, quanto possível, usar um método abreviado [*Almagesto*, XIII, 3]. De facto, como os valores extremos não produzem diferenças sensíveis, é preferível adoptar o valor médio.

Assim, *AB* está para *BD* assim como 10 000 unidades estão para 7 193 unidades, e *ADB* é um ângulo recto. Então, teremos o lado *AD* igual a 6 947 unidades. De modo semelhante, *BA* está para *AD*, assim como *BD* está para *DF*, e teremos *DF* como 4 997 unidades. De novo, o ângulo *DAG* é considerado como valendo $2\ {}^{1}/_{2}{}^{o}$; e *AGD* é um ângulo recto. Então, no triângulo *ADG*, sendo os ângulos dados, o lado *DG* tem 303 unidades e *AD* = 6 947. Assim, de igual modo, no triângulo *DGF* com dois lados dados, *DF*, *DG*, e *DGF* um ângulo recto, *DFG*, o ângulo de inclinação ou obliquação, tem 3° 29′. O excesso do ângulo *DAF* sobre *FAG*, compreende a diferença em paralaxe longitudinal. Então a diferença tem de ser deduzida dos valores conhecidos destes ângulos.

Já foi demonstrado que no sistema em que *DG* tem 303 unidades, a hipotenusa, *AD*, tem 6 947 unidades, e *DF*, 4 997; e também que a diferença entre o quadrado de *AD* e o quadrado de *DG* é igual ao quadrado de *AG*, sendo a diferença entre o quadrado de *FD* e o quadrado de *AG* igual ao quadrado de *GF*. Assim, *AG* é dado em 6 940 unidades de comprimento e *FG* em 4 988. Tendo *AD* = 10 000 unidades, *DF* tem 7 193, e o ângulo *FAG* = 45° 57′. No sistema de unidades em que *AD* tem 10 000 unidades, *DF* terá 7 193 e o ângulo *DAF* cerca de 46°. Na maior obliquação, portanto, a prostaférese paraláctica é diminuída em cerca de 3′ [= 46° − 45° 57′]. Na ápsidse média, contudo, o ângulo de inclinação entre os dois círculos é claramente

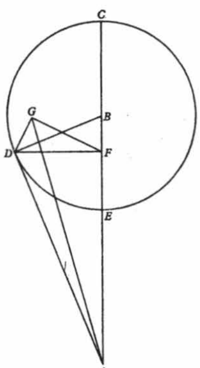
$2^1/_2°$; aí, portanto, ele é aumentado para 3° 29′, [ou seja] de quase um grau, que foi acrescentado por este primeiro movimento de libração que mencionámos.

No caso de Mercúrio a demonstração segue o mesmo processo. Tendo o raio da órbita 3 573 unidades, a distância máxima da órbita, em relação à Terra, é de 10 948 unidades; a distância mínima 9 052; e, entre estes valores, o valor médio é de 10 000. *AB* está para *BD* assim como 10 000 está para 3 573. Então, no triângulo *ABD*, teremos o terceiro lado *AD* com 9340 unidades. *AB* está para *AD* assim como *BD* está para *DF*. Por conseguinte *DF* tem 3 337 unidades de comprimento. Assim, no triângulo *DFG*, sendo dada a razão destes dois lados, e sendo *G* um ângulo recto, teremos o ângulo *DFG* com cerca de 7°. Este é o ângulo da inclinação da órbita de Mercúrio ou da sua obliquidade em relação ao plano da eclíptica. No entanto, próximo das longitudes médias, à distância de um quadrante do apogeu e perigeu, o ângulo de inclinação mede 6° 15′ como se mostrou [VI, 5]. Por conseguinte, 45′ [= 7° − 6° 15′] têm agora de ser acrescentados pelo movimento da primeira libração.

Analogamente, para estabelecer os ângulos de prostaférese e a sua diferença, deve observar-se que a linha recta *DG* tem 407 unidades como se demonstrou, sendo *AD* = 9 340 e *DF* = 3 337. A diferença entre os quadrados de *AD* e *DG* é igual ao quadrado de *AG;* e a diferença entre os quadrados de *DF* e *DG* é igual ao quadrado de *FG*. Assim teremos *AG* com 9 331 unidades de comprimento e *FG* com 3 314. Daqui resulta que o ângulo *GAF*, o ângulo da prostaférese, tem 20° 48′, *DAF* = 20° 56′, sendo *GAF* que depende da obliquação, menor do que ele cerca de 8′.

Ainda nos falta ver se estes ângulos de obliquação e as latitudes relacionadas com a máxima e mínima distância da órbita, em referência à Terra, se encontram em conformidade com as que se obtiveram pela observação.

Com esta finalidade, admitamos novamente, na mesma figura, na primeira posição, quanto à distância máxima da órbita de Vénus em relação à Terra, que *AB* está para *BD*, assim como 10 208 está para 7 193. Dado que *ADB* é um ângulo recto, *AD* terá 7 238 unidades de comprimento. *AB* está para *AD* assim como *BD* está para *DF*. Então *DF* tem 5 102 unidades de comprimento. Mas *DFG*, o ângulo de obliquidade, foi calculado em 3° 29′ [VI, 7]. O lado que falta *DG* tem 309 unidades e *AD* = 7 238. Ora sendo *AD* = 10 000 unidades *DG* tem 427. Assim se infere que o ângulo *DAG* tem 2° 27′, à maior distância do planeta à Terra. Contudo, tendo *BD*, o raio da órbita, 7 193 unidades, *AB* tem 9 792 [= 10 000 − 208], à distância mínima do planeta à Terra. *AD*, perpendicular a *BD*, é igual a 6 644 unidades. *AB* está para *AD* assim como *BD* está para *DF*. De modo semelhante, *DF* é dado com 4 883 unidades de comprimento. Mas estabeleceu-se que o ângulo *DFG* tinha 3° 29′. Deste modo, *DG* é dado com 297 unidades e *AD* com 6 644. Portanto, no triângulo *ADG*, sendo os lados dados, o ângulo *DAG* é dado com 2° 34′. No entanto, nem 3′, nem 4′ [2° 30′= 3′+ 2° 27′= 2° 34′− 4′], são suficientemente grandes para serem registados pelo instrumento, o astrolábio. Assim, o que foi considerado como o desvio máximo, em latitude, do planeta Vénus, mantém-se.



De modo semelhante, admitamos que a distância máxima da órbita de Mercúrio, em relação à Terra, está para o raio da órbita de Mercúrio assim como *AB* está para *BD* e assim como 10 948 unidades estão para 3 573. Assim, por demonstrações semelhantes às anteriores, *AD* é igual a 9 452 unidades e *DF* igual a 3 085. Mas aqui também temos *DFG*, ângulo de inclinação entre o plano da órbita de Mercúrio e o plano da eclíptica conhecido e igual a 7°, e por esta razão, a linha recta *DG* igual a 376 unidades, tendo *DF* 3 085 ou *DA* 9 452. Assim no triângulo *DAG*, cujos lados são dados, teremos o ângulo *DAG* com cerca de 2° 17′′, o maior digressão em latitude.

Na distância mínima da órbita à Terra, *AB* está para *BD*, assim como 9 052 unidades estão para 3 573. Assim, no mesmo sistema de unidades *AD* tem 8 317 unidades e *DF* 3 283. Contudo, devido à mesma inclinação [= 7°], *DF* está para *DG* assim como 3 283 para 400, sendo *AD* igual a 8 317 unidades. Portanto o ângulo *DAG* é igual a 2° 45′.

A digressão em latitude, associada ao valor médio [da distância da órbita de Mercúrio à Terra] é aqui de 2 $^1/_2$°. A digressão em latitude, no apogeu, em que atinge o seu mínimo, difere desta quantidade em 13′ [= 2° 30′ – – 2° 17′]. No perigeu, contudo, onde o desvio em latitude atinge o seu máximo, difere do valor médio em 15′ [= 2° 45′ – 2° 30′]. Em lugar destas diferenças, em cálculos baseados no valor médio, acima dele e abaixo dele, usaremos $^1/_4$°, que não difere perceptivelmente das observações.

Como consequência das demonstrações anteriores e também por causa da prostaférese máxima em longitude ter a mesma razão para a digressão máxima em latitude como as prostaféreses parciais, nas porções restantes da órbita têm para os vários desvios em latitude, obteremos todas as quantidades latitudinais que ocorrem devido à inclinação das órbitas de Vénus e de Mercúrio. Mas apenas as latitudes a meio caminho entre o apogeu e o perigeu, como dissemos [VI, 5], são calculáveis.

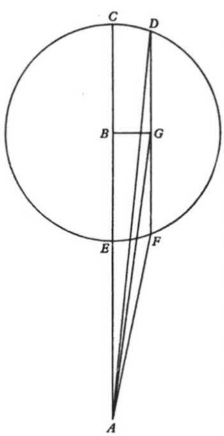
Demonstrou-se que destas latitudes o máximo valor é de 2$^1/_2$° [VI, 6], enquanto a maior prostaférese de Vénus vale 46° e a de Mercúrio cerca de 22° [VI, 5 : 45° 57′, 28° 16′]. E agora, nas Tabelas dos seus movimentos não uniformes [V, 33], temos as prostaféreses ao lado das porções individuais das órbitas. Na proporção em que cada uma das prostaféreses é mais pequena do que o máximo, tomaremos a parte correspondente daqueles 2$^1/_2$° para cada planeta.

Registaremos essa parte numericamente na Tabela que vamos apresentar adiante [VI, 8]. Deste modo, teremos em pormenor cada latitude individual de obliquação que ocorre quando a Terra se encontra nas ápsides superior e inferior destes planetas. Do mesmo modo, registámos as latitudes das suas declinações [quando a Terra está] à distância de um quadrante [a meio caminho entre o apogeu e o perigeu] e [os planetas estão] nas suas longitudes médias. O que ocorre entre estes quatro pontos críticos pode ser deduzido pela subtileza da matemática, do sistema de círculos proposto, não sem trabalho, contudo. Não obstante, Ptolomeu foi, em todos os casos, tão conciso quanto possível, reconhecendo [*Almagesto,* XIII, 4] que por si próprias, estas duas espécies de latitude, como um todo e em cada parte, cresciam e decresciam proporcionalmente como a latitude da Lua. Por isso multiplicou cada uma das suas partes por doze, uma vez que a sua latitude máxima era igual a 5°, ou $^1/_{12}$ de 60°. Ele transformou estes produtos em minutos proporcionais, que pensava deverem ser usados não somente com estes dois planetas mas também com os três planetas superiores, como se explicará a seguir.

A TERCEIRA ESPÉCIE DE LATITUDE, CHAMADA «DESVIO», EM VÉNUS E MERCÚRIO

Depois de todas estas explicações, resta ainda algo a dizer do terceiro movimento em latitude, que é o «desvio». Os nossos predecessores, que defenderam ser a Terra o centro do Universo, pensam que o «desvio» é produzido por uma oscilação do círculo excêntrico conjuntamente com a do epiciclo, à volta do centro da Terra, atingindo o máximo, quando o epiciclo está localizado no apogeu ou no perigeu do círculo excêntrico [Ptolomeu, *Almagesto*, XIII, 1]. Para Vénus, «o desvio» é sempre $^1/_6{}^o$ para Norte, mas para Mercúrio sempre $^3/_4{}^o$ para Sul, como dissemos acima. Contudo, não está suficientemente claro se os antigos consideravam esta inclinação dos círculos como constante e sempre a mesma. Com efeito, esta imutabilidade está indicada pelas suas quantidades numéricas quando prescrevem que $^1/_6$ dos minutos proporcionais deve ser sempre considerado como «desvio» de Vénus e $^3/_4$ como «desvio» de Mercúrio [*Idem*, XIII, 6]. Estas fracções não são correctas a menos que o ângulo de inclinação permaneça sempre o mesmo, como é exigido pelo esquema dos que se baseiam nesse ângulo. Além disso, mesmo que o ângulo permaneça o mesmo será impossível compreender como esta latitude de tais planetas salta repentinamente da intersecção para a mesma latitude donde anteriormente saiu. Pode dizer-se que este salto ocorre como a reflexão da luz, como na óptica. Aqui, contudo, estamos a tratar de um movimento que não é instantâneo, mas, pela sua própria Natureza, tem um tempo determinado.

Deve admitir-se, pois, que estes planetas têm uma libração, como explicámos, [VI, 2]. Ela faz com que as partes do círculo mudem de uma latitude para a latitude oposta. É também uma consequência necessária para que as suas quantidades numéricas variem de $^1/_5$°, no caso de Mercúrio. Assim, não haverá motivo de surpresa se, segundo a minha hipótese, também esta latitude varia e não seja absolutamente constante. Não obstante, não produz uma irregularidade perceptível, possível de distinguir como tal, em todas as suas variações.



Considere-se o plano horizontal perpendicular à eclíptica. Na intersecção [*AEBC* desses dois planos], seja *A* o centro da Terra; e, à maior ou menor distância da Terra, seja *B* o centro do círculo *CDF*, que passa virtualmente pelos pólos da órbita oblíqua. Se o centro da órbita está no apogeu e perigeu, isto é, em *AB*, o planeta encontra-se no seu «desvio» máximo, onde quer que esteja, por ser determinado por um círculo paralelo à órbita. O diâmetro deste círculo paralelo à órbita, *DF*, é paralelo a *CBE*, o diâmetro da órbita. Os diâmetros, [*DF* e *CBE*] destes círculos paralelos que são perpendiculares ao plano de *CDF*, são tomados como sendo as intersecções [com *CDF*]. Bissectemos *DF* em *G*, que será o centro do círculo paralelo à órbita. Juntemos *BG*, *AG*, *AD* e *AF*. Admitamos o ângulo *BAG* com $^1/_6$°, como no maior «desvio» de Vénus. Ora, no triângulo *ABG*, com um ângulo recto em *B*, temos a razão entre os lados *AB* e *BG*, igual à razão entre 10 000 unidades e 29 unidades. Mas nesse mesmo sistema de unidades, toda a linha *ABC* tem 17 193 unidades [$CB = CA - BA \times 17\ 193 - 10\ 000 = 7\ 193$; $CE = 2 \times 7\ 193 = 14\ 386$], e *AE*, diferença entre *AC* e *CE*, 2 807. Metade das cordas subtendida pelo dobro de *CD* e *EF* equivale a *BG*.

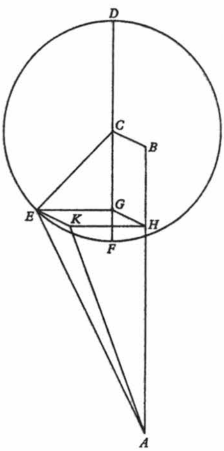
Por conseguinte, o ângulo *CAD* é igual a 6′ e *EAF* a cerca de 15′. Diferem de *BAG*, apenas em 4′, no primeiro caso, e no segundo em 5′, quantidades geralmente desprezádas, pela sua exiguidade. Ora, o desvio aparente de Vénus, quando a Terra está localizada no seu apogeu e perigeu, será ligeiramente maior ou mais pequeno do que 10′, qualquer que seja o lugar ocupado pelo planeta na sua órbita.

No caso de Mercúrio, contudo, consideramos o ângulo *BAG* com $^3/_4$°. *AB* está para *BG*, assim como 10 000 unidades estão para 131 unidades; *ABC* é igual a 13 573 unidades; e *AE*, diferença entre *AB* e *BE*, tem 6 427 unidades. Ora, o ângulo *CAD* mede 33′, e *EAF* cerca de 70′. No primeiro caso, por conseguinte, faltam 12′, e no segundo há um excesso de 25′. Todavia, estas diferenças são praticamente anuladas pelos raios do Sol antes que Mercúrio se nos torne visível. Assim, os antigos investigaram apenas o seu «desvio» perceptível como se este fosse invariável.

No caso, porém, de alguém, não olhando a trabalhos, desejar obter um conhecimento exacto desses movimentos ocultos pelo Sol, vamos explicar como [pode] fazê-lo, do modo seguinte.

Como exemplo, usaremos Mercúrio, porque o seu «desvio» é mais notável do que o de Vénus. Considere-se a linha recta *AB*, como estando na intersecção da órbita do planeta com a eclíptica. [Suponha-se ainda] que a Terra, colocada em *A*, está no apogeu ou perigeu da órbita do planeta. Consideremos a linha *AB* com 10 000 unidades, sem qualquer variação, equivalendo à extensão média, entre o máximo e o mínimo, como fizemos em relação à obliquação [VI, 7].

Tendo *C* como centro, descrevamos o círculo *DEF*, paralelo à órbita do círculo excêntrico e à distância *CB*. Imaginemos o planeta com o seu máximo «desvio», nesse tempo, neste círculo paralelo. Seja *DCF* o diâmetro do círculo; [esse diâmetro] deve igualmente ser paralelo a *AB*, e as duas linhas estão no mesmo plano, perpendiculares à órbita do planeta.

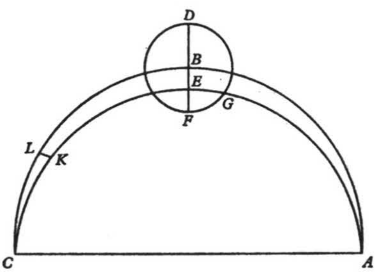


Seja *EF*, com 45°, por exemplo, o arco no qual investigamos o «desvio» do planeta. Tracemos *EG* perpendicular a *CF; EK* e *GH* perpendiculares ao plano horizontal da órbita. Juntando *HK*, completemos o rectângulo. Juntemos também *AE*, *AK* e *EC*. Ora, dado que *BC*, no caso de Mercúrio se encontrar no seu «desvio» máximo, tem 131 unidades, *AB* = 10 000, *CE* = 3 573 e o triângulo rectângulo [*CEG*] apresenta lados dados, o lado *EG* igual a *KH*, terá 2 526 unidades. Subtraindo *BH*, igual a *EG* e *CG* [= 2 526], de *AB*, o resto, *AH*, tem 7 474 unidades. Por conseguinte, no triângulo *AHK*, sendo dados os lados que definem o ângulo recto, *H*, a hipotenusa, *AK*, tem 7 889 unidades. Mas *KE*, igual a *CB* e *GH* foi considerada como tendo 131 unidades. Assim, no triângulo *AKE*, os dois lados dados, *AK* e *KE*, formam o ângulo recto *K* e o ângulo *KAE* é dado. Este corresponde ao «desvio» que procurávamos para o arco considerado, *EF*, e pouco difere das observações. Procedendo de modo semelhante nos outros «desvios» de Mercúrio e de Vénus, anotaremos os resultados na Tabela a seguir.

Depois de dar esta explicação, ajustaremos os sexagésimos ou minutos proporcionais, tanto em Vénus como em Mercúrio. Seja o círculo, *ABC*, o excêntrico de Vénus ou Mercúrio. Sejam *A* e *C* os nodos desta latitude. Seja *B* o límite do «desvio» máximo. Com *B* por centro, descrevamos um círculo pequeno *DFG*, cujo diâmetro seja *DBF*. [Suponha-se] que a libração do movimento em «desvio» se dá ao longo de *DBF*. Partimos do princípio que quando a Terra está no apogeu ou perigeu do círculo excêntrico do planeta, este executa o seu maior «desvio», no ponto *F*, onde o deferente do planeta é tangente ao círculo pequeno.

Agora admita-se que a Terra esteja a qualquer distância do apogeu ou perigeu do círculo excêntrico do planeta. De acordo com este movimento, tomemos *FG* como um arco semelhante no círculo pequeno. Descrevamos *AGC*, como deferente do planeta. *AGC* intersectará o círculo pequeno e cortará o seu diâmetro *DF*, no ponto *E*. Em *AGC* coloquemos o planeta no ponto *K*, com o arco *EK* semelhante a *FG*, por hipótese. Tracemos *KL* perpendicular ao círculo *ABC*.

Partindo de *FG*, *EK* e *BE*, tentaremos achar o valor de *KL*, distância do planeta ao círculo *ABC*. Com efeito, por meio do arco *FG*, será conhecido *EG* como se fosse uma linha recta, pouco diferente de uma linha circular ou con-



vexa. Do mesmo modo, *EF* será dada no mesmo sistema de unidades que toda a linha *BF* e *BE*, diferença entre *BF* e *EF*. *BF* está para *BE*, assim como a corda subtendida pelo dobro do quadrante *CE* está para *KL*. Por conseguinte, se compararmos *BF* e o raio de *CE* ao mesmo número 60, deles obteremos o valor de *BE*. Se o elevarmos ao quadrado, dividindo o produto por 60, obteremos *KL*, os desejados minutos proporcionais do arco *EK*. Do mesmo modo, anotámos estes minutos na quinta e sexta colunas da Tabela que se segue.

LATITUDES DE SATURNO, JÚPITER E MARTE

Números comuns		Latitude de Saturno				Latitude de Júpiter				Latitude de Marte				Minutos proporcionais do desvio	
		Norte		Sul		Norte		Sul		Norte		Sul			
°	°	°	′	°	′	°	′	°	′	0	′	0	′		
3	357	2	3	2	2	1	6	1	5	0	6	0	5	59	48
6	354	2	4	2	2	1	7	1	5	0	7	0	5	59	36
9	351	2	4	2	3	1	7	1	5	0	9	0	6	59	6
12	348	2	5	2	3	1	8	1	6	0	9	0	6	58	36
15	345	2	5	2	3	1	8	1	6	0	10	0	8	57	48
18	342	2	6	2	3	1	8	1	6	0	11	0	8	57	0
21	339	2	6	2	4	1	9	1	7	0	12	0	9	55	48
24	336	2	7	2	4	1	9	1	7	0	13	0	9	54	36
27	33	2	8	2	5	1	10	1	8	0	14	0	10	53	18
30	330	2	8	2	5	1	10	1	8	0	14	0	11	52	0
33	327	2	9	2	6	1	11	1	9	0	15	0	11	50	12
36	324	2	10	2	7	1	11	1	9	0	16	0	12	48	24
39	321	2	10	2	7	1	12	1	10	0	17	0	12	46	24
42	318	2	11	2	8	1	12	1	10	0	18	0	13	44	24
45	315	2	11	2	9	1	13	1	11	0	19	0	15	42	12
48	312	2	12	2	10	1	13	1	11	0	20	0	16	40	0
51	309	2	13	2	11	1	14	1	12	0	22	0	18	37	36
54	306	2	14	2	12	1	14	1	13	0	23	0	20	35	12
57	303	2	15	2	13	1	15	1	14	0	25	0	22	32	36
60	300	2	16	2	15	1	16	1	16	0	27	0	24	30	0
63	297	2	17	2	16	1	17	1	17	0	29	0	25	27	12
66	294	2	18	2	18	1	18	1	18	0	31	0	27	24	24
69	291	2	20	2	19	1	19	1	19	0	33	0	29	21	21
72	288	2	21	2	21	1	21	1	21	0	35	0	31	18	18
75	285	2	22	2	22	1	22	1	22	0	37	0	34	15	15
78	282	2	24	2	24	1	24	1	24	0	40	0	37	12	12
81	279	2	25	2	26	1	25	1	25	0	42	0	39	9	9
84	276	2	27	2	27	1	27	1	27	0	45	0	41	6	24
87	273	2	28	2	28	1	28	1	28	0	48	0	45	3	12
90	270	2	30	2	30	1	30	1	30	0	51	0	49	0	0

LATITUDES DE SATURNO, JÚPITER E MARTE

Números comuns		Latitude de Saturno				Latitude de Júpiter				Latitude de Marte				Minutos proporcionais do desvio	
		Norte		Sul		Norte		Sul		Norte		Sul			
°	°	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'		
93	267	2	31	2	31	1	31	1	31	0	55	0	52	3	12
96	264	2	33	2	33	1	33	1	33	0	59	0	56	6	24
99	261	2	34	2	34	1	34	1	34	1	2	1	0	9	9
102	258	2	36	2	36	1	36	1	36	1	6	1	4	12	12
105	255	2	37	2	37	1	37	1	37	1	11	1	8	15	15
108	252	2	39	2	39	1	39	1	39	1	15	1	12	18	18
111	249	2	40	2	40	1	40	1	40	1	19	1	17	21	21
114	246	2	42	2	42	1	42	1	42	1	25	1	22	24	24
117	243	2	43	2	43	1	43	1	43	1	31	1	28	27	12
120	240	2	45	2	45	1	45	1	44	1	36	1	34	30	0
123	237	2	46	2	46	1	46	1	46	1	41	1	40	32	36
126	234	2	47	2	48	1	47	1	47	1	47	1	47	35	12
129	231	2	49	2	49	1	49	1	49	1	54	1	55	37	36
132	228	2	50	2	51	1	50	1	51	2	2	2	5	40	0
135	225	2	52	2	53	1	51	1	53	2	10	2	15	42	12
138	222	2	53	2	54	1	52	1	54	2	19	2	26	44	24
141	219	2	54	2	55	1	53	1	55	2	29	2	38	46	24
144	216	2	55	2	56	1	55	1	57	2	37	2	48	48	24
147	213	2	56	2	57	1	56	1	58	2	47	3	4	50	12
150	210	2	57	2	58	1	58	1	59	2	51	3	20	52	0
153	207	2	58	2	59	1	59	2	1	3	12	3	32	53	18
156	204	2	59	3	0	2	0	2	2	3	23	3	52	54	36
159	201	2	59	3	1	2	1	2	3	3	34	4	13	55	48
162	198	3	0	3	2	2	2	2	4	3	46	4	36	57	0
165	195	3	0	3	2	2	2	2	5	3	57	5	0	57	48
168	192	3	1	3	3	2	3	2	5	4	9	5	23	58	36
171	189	3	1	3	3	2	3	2	6	4	17	5	48	59	6
174	186	3	2	3	4	2	4	2	6	4	23	6	15	59	36
177	183	3	2	3	4	2	4	2	7	4	27	6	35	59	48
180	180	3	2	3	5	2	4	2	7	4	30	6	50	60	0

LATITUDES DE VÉNUS E MERCÚRIO															
Números comuns		Vénus				Mercúrio				Mercúrio		Vénus		Minutos proporcionais do desvio	
		Declinação		Obliquação		Declinação		Obliquação		Declinação		Obliquaçao			
°	°	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′		
3	357	1	2	0	4	1	45	0	5	0	7	0	33	59	36
6	354	1	2	0	8	1	45	0	11	0	7	0	33	59	12
9	351	1	1	0	12	1	45	0	16	0	7	0	33	58	25
12	348	1	1	0	16	1	44	0	22	0	7	0	33	57	14
15	345	1	0	0	21	1	44	0	27	0	7	0	33	55	41
18	342	1	0	0	25	1	43	0	33	0	7	0	33	54	9
21	339	0	59	0	29	1	42	0	38	0	7	0	33	52	12
24	336	0	59	0	33	1	40	0	44	0	7	0	34	49	43
27	333	0	58	0	37	1	38	0	49	0	7	0	34	47	21
30	330	0	57	0	41	1	36	0	55	0	8	0	34	45	4
33	327	0	56	0	45	1	34	1	0	0	8	0	34	42	0
36	324	0	55	0	49	1	30	1	6	0	8	0	34	39	15
39	321	0	53	0	53	1	27	1	11	0	8	0	35	35	53
42	318	0	51	0	57	1	23	1	16	0	8	0	35	32	51
45	315	0	49	1	1	1	19	1	21	0	8	0	35	29	41
48	312	0	46	1	5	1	15	1	26	0	8	0	36	26	40
51	309	0	44	1	9	1	11	1	31	0	8	0	36	23	34
54	306	0	41	1	13	1	8	1	35	0	8	0	36	20	39
57	303	0	38	1	17	1	4	1	40	0	8	0	37	17	40
60	300	0	35	1	20	0	59	1	44	0	8	0	38	15	0
63	297	0	32	1	24	0	54	1	48	0	8	0	38	12	20
66	294	0	29	1	28	0	49	1	52	0	9	0	39	9	55
69	291	0	26	1	32	0	44	1	56	0	9	0	39	7	38
72	288	0	23	1	35	0	38	2	0	0	9	0	40	5	39
75	285	0	20	1	38	0	32	2	3	0	9	0	41	3	57
78	282	0	16	1	42	0	26	2	7	0	9	0	42	2	34
81	279	0	12	1	46	0	21	2	10	0	9	0	42	1	28
84	276	0	8	1	50	0	16	2	14	0	10	0	43	0	40
87	273	0	4	1	54	0	8	2	17	0	10	0	44	0	10
90	270	0	0	1	57	0	0	2	20	0	10	0	45	0	0

LATITUDES DE VÉNUS E MERCÚRIO															
Números comuns		Vénus				Mercúrio				Mercúrio		Vénus		Minutos proporcionais do desvio	
		Declinação		Obliquação		Declinação		Obliquação		Declinação		Obliquação			
°	°	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'		
93	267	0	5	2	0	0	8	2	23	0	10	0	45	0	10
96	264	0	10	2	3	0	15	2	25	0	10	0	46	0	40
99	261	0	15	2	6	0	23	2	27	0	10	0	47	1	28
102	258	0	20	2	9	0	31	2	28	0	11	0	48	2	34
105	255	0	26	2	12	0	40	2	29	0	11	0	48	3	57
108	252	0	32	2	15	0	48	2	29	0	11	0	49	5	39
111	249	0	38	2	17	0	57	2	30	0	11	0	50	7	38
114	246	0	44	2	20	1	6	2	30	0	11	0	51	9	55
117	243	0	50	2	22	1	16	2	30	0	11	0	52	12	20
120	240	0	59	2	24	1	25	2	29	0	12	0	52	15	0
123	237	1	8	2	26	1	35	2	28	0	12	0	53	17	40
126	234	1	18	2	27	1	45	2	26	0	12	0	54	20	39
129	231	1	28	2	29	1	55	2	23	0	12	0	55	23	34
132	228	1	38	2	30	2	6	2	20	0	12	0	56	26	40
135	225	1	48	2	30	2	16	2	16	0	13	0	57	29	41
138	222	1	59	2	30	2	27	2	11	0	13	0	57	32	51
141	219	2	11	2	29	2	37	2	6	0	13	0	58	35	53
144	216	2	25	2	28	2	47	2	0	0	13	0	59	39	15
147	213	2	43	2	26	2	57	1	53	0	13	1	0	42	0
150	210	3	3	2	22	3	7	1	46	0	13	1	1	45	4
153	207	3	23	2	18	3	17	1	38	0	13	1	2	47	21
156	204	3	44	2	12	3	26	1	29	0	14	1	3	49	43
159	201	4	5	2	4	3	34	1	20	0	14	1	4	52	12
162	198	4	26	1	55	3	42	1	10	0	14	1	5	54	9
165	195	4	49	1	42	3	48	0	59	0	14	1	6	55	41
168	192	5	13	1	27	3	54	0	48	0	14	1	7	57	14
171	189	5	36	1	9	3	58	0	36	0	14	1	7	58	25
174	186	5	52	0	48	4	2	0	24	0	14	1	8	59	12
177	183	6	7	0	25	4	4	0	12	0	14	1	9	59	36
180	180	6	22	0	0	4	5	0	0	0	14	1	10	60	0

CÁLCULO DAS LATITUDES DOS CINCO PLANETAS

O método de calcular as latitudes dos cinco planetas com estas Tabelas é o seguinte. Em Saturno, Júpiter e Marte, obtemos os números comuns da anomalia do círculo excêntrico, ajustada ou corrigida. Em Marte, conservamos a anomalia como ela é. Em Júpiter, subtraímos, primeiramente, 20°, mas em Saturno, acrescentamos 50°. Depois registamos os resultados, na última coluna, abaixo dos sexagésimos ou minutos proporcionais.

De modo semelhante, da anomalia paraláctica ajustada, tomamos cada número do planeta como sua latitude associada. Tomamos a primeira latitude, a Setentrional, se os minutos proporcionais têm uma escala de cima para baixo. Isto acontece quando a anomalia do círculo excêntrico está abaixo de 90° ou excede 270°. Mas tomamos a segunda latitude, a austral, se os minutos proporcionais seguem uma escala ascendente, isto é, se a anomalia do círculo excêntrico, que notámos na Tabela, é superior a 90° ou inferior a 270°. Se multiplicarmos então uma destas latitudes pelos seus sexagésimos, o produto será a distância Norte ou Sul da eclíptica, dependente da classificação dos números considerados.

No caso de Vénus e Mercúrio, por outro lado, da anomalia paraláctica ajustada, devemos tomar primeiramente as três latitudes que aparecem: a «declinação», a «obliquação» e o «desvio». Estas são anotadas separadamente. Por excepção, em Mercúrio, $^1/_{16}$ da obliquação é subtraído se a anomalia do círculo excêntrico e o seu número se encontram na parte superior da Tabela, ou uma fracção igual é acrescentada se a anomalia do círculo excêntrico e o seu número se encontram na parte inferior da Tabela. O resto ou soma resultantes destas operações põe-se de lado.

Contudo, a classificação destas latitudes como Setentrional e Austral deve ser confirmada. Suponhamos que a anomalia paraláctica ajustada se encontra no semicírculo do apogeu, isto é, a menor do que 90º, ou maior do que 270º, e também que a anomalia do círculo excêntrico é inferior a um semicírculo; ou, então, suponhamos que a anomalia paraláctica está no arco do perigeu, isto é, apresenta-se com mais de 90º e menos de 270º, e a anomalia do círculo excêntrico é maior do que um semicírculo. Então, a declinação de Vénus será Setentrional e a de Mercúrio Austral.

Por outro lado, suponhamos que a anomalia paraláctica está no arco do perigeu enquanto a anomalia do círculo excêntrico é inferior a um semicírculo ou que a anomalia paraláctica está na região do apogeu enquanto a anomalia do círculo excêntrico é maior do que um semicírculo. Então, inversamente a declinação de Vénus será Austral e a de Mercúrio Setentrional. Na obliquação, porém, se a anomalia paraláctica é inferior a um semicírculo e a anomalia do círculo excêntrico é na região do apogeu, ou se a anomalia paraláctica é maior do que um semicírculo e a anomalia do círculo excêntrico é na região do perigeu, a obliquação de Vénus será Setentrional e a de Mercúrio Austral. Também aqui a recíproca é verdadeira. Contudo «os desvios» são sempre para o Norte em Vénus e para o Sul, em Mercúrio.

Então, com a anomalia ajustada do círculo excêntrico, tomemos os minutos proporcionais, comuns a todos os cinco planetas. Estes minutos proporcionais que são propostos para os três planetas superiores, embora sejam assim atribuídos, devem ser considerados como relativos à obliquação e ao resto do «desvio». Por conseguinte, juntemos 90º a essa mesma anomalia do círculo excêntrico. Os minutos proporcionais comuns que estão relacionados com esta soma, devem aplicar-se novamente à latitude de «declinação».

Depois de ordenar assim estes valores, multipliquemos, pelos seus próprios minutos proporcionais, cada uma das três latitudes separadas, que foram apresentadas. Elas aparecerão então corrigidas em relação ao tempo e ao espaço, de modo que, finalmente, temos a descrição completa das três latitudes, para estes dois planetas. Se todas as latitudes são da mesma classificação, adicionemo-las. Mas se não o são, combinemos apenas as duas que são da mesma classificação. Consoante estas duas totalizarem mais ou menos do que o terceiro latitude da classificação oposta, subtrai-se das duas ou subtraem-se as duas dela, e o resto predominante será a latitude que procuramos.

ÍNDICE GERAL

Capitulo XXI

Capitulo XXII

Capitulo XXIII

Capitulo XXIV

Capitulo XXV

Capitulo XXVI

Capitulo XXVII

Capitulo XXVIII

Capitulo XXIX

Esta 3.ª edição de
AS REVOLUÇÕES DOS ORBES CELESTES,
de Nicolau Copérnico,
foi impressa e encadernada para
a *Fundação Calouste Gulbenkian*,
na Gráfica ACD Print, S.A.
www.acdprint.pt

A tiragem é de 750 exemplares

Dezembro de 2014

EDIÇÕES DA FUNDAÇÃO
CALOUSTE GULBENKIAN

Textos Clássicos

Próxima publicação:

Princípios de Política Económica
Walter Eucken

Cultura Portuguesa

Próxima publicação:

Obras Completas de Francisco Rebelo Gonçalves, Vol. IV

Manuais Universitários

Próxima publicação:

Teoria Geral do Estado, 4.ª Edição Atualizada
Reinhold Zippelius

Capa de Sebastião Rodrigues

EDIÇÕES
DA FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

TEXTOS CLÁSSICOS – As raízes da cultura estão naquelas obras chamadas clássicas, obras cuja mensagem se não esgotou e permanecem fontes vivas do progresso humano. Por isso a Fundação, ao esquematizar o seu Plano de Edições, julgou que seria indispensável colocar ao alcance do público lusófono livros que marcassem momentos decisivos na história dos vários sectores da civilização. Da ciência pura à tecnologia, da quantidade abstracta ao humanismo concreto, procurar-se-á que os depoimentos mais representativos figurem nesta nova série editorial. Para dificultar ao mínimo o acesso do leitor, todas as obras serão vertidas em português e apresentadas com a dignidade e a segurança que naturalmente lhes são devidas. Integrando na língua pátria estes grandes nomes estrangeiros, supomos contribuir para uma mais perfeita consciência da própria cultura nacional, cujos clássicos terão também o lugar que lhes compete no plano de Edições da Fundação Calouste Gulbenkian. ■ NICOLAU COPÉRNICO (1473-1543). Nasceu em Torun e faleceu em Frauenburgo. Seguiu a vida eclesiástica, tendo frequentado a Universidade de Cracóvia. Em 1496 foi para Itália, a fim de prosseguir os seus estudos superiores em Bolonha, em Pádua e Ferrara. De início Copérnico inscreveu-se na Faculdade de Leis da escola bolonhesa, mas a sua atenção foi sobretudo atraída para os estudos de Astronomia; em Pádua viria a estudar Teologia, e em Ferrara cursaria Medicina. Depois de dez anos em Itália voltou à Polónia e dedicou-se inteiramente à Astronomia, baseando-se em obras de Purbáquio e Regiomontano (século XV) e em teorias e observações da Antiguidade. Antes de 1514 já Copérnico tinha elaborado a sua teoria heliocêntrica para explicar os movimentos aparentes dos astros do sistema solar; apresentou-a, sem os cálculos justificativos, num opúsculo anónimo conhecido por *Commentariolus*, que só em 1530 veio a ser impresso. Depois de longas hesitações, Copérnico consentiria na publicação da sua grande obra *Acerca da Revolução dos Orbes Celestes*, que abriu de modo irreversível o caminho para a explicação real da mecânica do sistema solar. ■ *Luís de Albuquerque* (1917-1992). Foi Professor Catedrático da Universidade de Coimbra, Director do Centro de Estudos de Cartografia Antiga (I. I. C. T.) e da Biblioteca-Geral da Universidade de Coimbra. ■ *A. Dias Gomes*. Fez estudos literários e teológicos no Seminário Adventista de Collonges sous-Falèze, França e no Alto Seminário Teológico em Washington. Frequentou as Faculdades de Ciências e de Medicina de Lisboa. Professor de Ciências Naturais, foi fundador e director do Colégio de São Paulo. ■ *Gabriel Domingues*. Licenciado em Filologia Clássica pela Universidade de Coimbra, foi professor liceal efectivo.

ISBN 978-972-31-0341-0

9 789723 103410